I PRINCIPII DELLA MECCANICA

ESPOSTI

CRITICAMENTE E STORICAMENTE NEL LORO SVILUPPO

DA

ERNESTO MACH

TRADUZIONE

di DIONISIO GAMBIOLI

CON PREFAZIONE

di GIOVANNI VAILATI

ROMA-MILANO

SOCIETÀ EDITRICE DANTE ALIGHIERI
DI
ALBRIGHI, SEGATI e C.

1909

PREFAZIONE DEL TRADUTTORE

Avendo tradotto dall'inglese la storia delle matematiche, e quelle della fisica e dell'astronomia, ho creduto conveniente completare il ciclo della storia delle scienze, che hanno maggiore attinenza con la matematica, madre di tutte le altre, col volgere dal tedesco nel nostro idioma l'eccellente opera del Mach: *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt.*

Nutro speranza che anche questo lavoro incontrerà il favore del nostro pubblico studioso, e che esso varrà a dare nuovo impulso, fra noi, allo studio della storia delle scienze.

Della presente opera del Mach è stata pubblicata una traduzione inglese da U. J. Mac Cormack, (1) e una francese da E. Bertrand (2).

Debbo qui ringraziare innanzi tutto il chiarissimo professore dott. Ernesto Mach, il quale non solo è stato così gentile da concedermi il permesso di volgere nel nostro idioma la sua opera, ma ha voluto mettere a mia disposizione tutte le aggiunte fatte ad essa prima ancora che ne uscisse la 6ª edizione tedesca.

Inoltre porgo vivi ringraziamenti all'amico prof. Vailati pel valido ausilio datomi in questa pubblicazione.

Roma, gennaio 1909.

DIONISIO GAMBIOLI.

(1) *The Sience of Mechanics, a critical and historical account of its development.* — London e Chicago, 1902.

(2) *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement.* — Paris, 1904.

PREFAZIONE ALLA TRADUZIONE ITALIANA

del Prof. G. Vailati.

Il titolo che E. Mach ha voluto dare alla sua opera di cui qui si presenta la traduzione italiana " *La meccanica esposta storicamente e criticamente nel suo svolgimento* „ indica già abbastanza per se stesso che la trattazione storica ha, in essa, il carattere, non di uno scopo, ma di un mezzo, o di un sussidio, per l'analisi critica delle teorie, e per la determinazione del loro significato e della loro portata.

Preoccupazione fondamentale del Mach è quella di distinguere quale parte, nell'avanzamento delle conoscenze e nello sviluppo delle dottrine meccaniche, sia da attribuire ai vari processi mentali che vi hanno concorso: all'intuizione, sia essa istintiva o basata consciamente sulla memoria e sul confronto di esperienze antecedenti — alle ricerche sperimentali dirette alla verifica o al controllo di date ipotesi preconcette — ai processi di generalizzazione e di unificazione miranti a far rientrare una sempre più grande quantità e varietà di fatti in un numero sempre minore di schemi teorici sempre più semplici, più coerenti e più comprensivi.

Dei principî e dei concetti fondamentali della meccanica egli tenta di ricostruire lo sviluppo embrionale, di riconoscere le influenze che essi ebbero a subire dall'ambiente in cui nacquero e si svolsero, di seguirli attraverso a tutte le fasi del loro svolgimento. I processi di adattamento che ne determinarono le trasformazioni successive — i contrasti che si manifestarono tra

i vari modi di descrivere, o spiegare, gli stessi fatti — le combinazioni, o interferenze, dei vari schemi a cui si ricorse per rappresentarli — le azioni e reazioni che si esercitarono tra le teorie scientifiche propriamente dette e le speculazioni filosofiche — le ripercussioni teoriche delle applicazioni pratiche e tecnologiche — tutti gli episodî insomma che costituiscono il lato più interessante e istruttivo della lotta dell'uomo per l'acquisto del sapere, assumono, nell'opera del Mach, tutto quel rilievo e quella potenza di suggestione che ad essi può derivare dal trovarsi rappresentati ed esemplificati nel caso della più perfetta ed organica di tutte le scienze: di quella scienza che, tanto per la precisione e la portata delle sue previsioni, quanto per la varietà ed imponenza delle sue applicazioni pratiche, può riguardarsi come il modello di tutte le altre.

Un altro carattere fondamentale della esposizione del Mach è costituito da quella che si potrebbe chiamare la sua “ *concezione economica* „ delle teorie scientifiche.

Allo stesso modo come il possesso di concetti generali equivale alla capacità di “ dimenticare artificialmente „, davanti a dati fatti, tutte quelle, tra loro particolarità, o caratteri, che non interessano per lo scopo che si può avere in vista, e di concentrare l'attenzione su quei lati o qualità loro che, per il momento, sono da riguardare come “ essenziali „, così avviene, secondo il Mach anche di ogni specie di teorie e concezioni scientifiche astratte.

Queste sono da lui riguardate come dei particolari “ strumenti „ per realizzare, nel modo più semplice, meno faticoso, più “ economico „, una corrispondenza sempre più esatta tra le nostre aspettazioni, o credenze, e i fatti a cui esse si riferiscono. Ed egli ritiene che, come il valore d'ogni strumento, così anche quello delle teorie sia da misurare dal servizio che ci rendono, dalla fatica che ci risparmiano, dalla sicurezza e dall'estensione dei risultati a cui esse ci portano.

Da questa sua concezione, per così dire pragmatistica, del significato e del compito delle teorie e dei principî della mec-

canica, il Mach si trova naturalmente condotto a degli apprezzamenti di fondamentale importanza anche per ciò che riguarda i limiti e la natura del contributo che i progressi delle conoscenze meccaniche possono apportare alla risoluzione dei problemi più fondamentali della filosofia e della teoria della conoscenza.

Così, per esempio, la distinzione espressa ordinariamente col contrapporre le qualità " primarie „ (estensione, figura, struttura, resistenza alla pressione o al moto, ecc.) alle qualità " secondarie „ (colore, sapore, ecc.) della " materia „ — e col qualificare le prime come le sole che abbiano una esistenza " fuori di noi „, e le seconde invece come puramente " soggettive „ e dipendenti dallo stato dei nostri organi sensorii — è da lui riguardata come avente la sua sola base e giustificazione nel fatto che le qualità indicate come " primarie „ sono più direttamente soggette che non le altre a venire modificate per mezzo delle nostre azioni, cioè per mezzo dei nostri sforzi muscolari, mentre sulle altre noi non abbiamo alcuna presa se non per via indiretta.

È nota l'osservazione, di Francesco Bacone, che l'uomo non può agire sulle cose se non trasportandole, deformandole, riunendole, separandole — agendo insomma su di esse " meccanicamente „ e lasciando poi " ad esse „ l'ufficio di fare il resto. Il Mach trova in questo fatto la spiegazione e la giustificazione della tendenza, che mostrano, in grado maggiore o minore, tutte le scienze, a dare, quanto più è possibile, alle proprie teorie una base " meccanica „ e a tradurre le proprie leggi e ipotesi in termini di moto, di forza, di energia.

La maggior soddisfazione che si trova ordinariamente nelle spiegazioni prendenti le mosse da considerazioni meccaniche, per quanto possa apparire dovuta a cause semplicemente teoriche o speculative, si riconnette intimamente, secondo il Mach, al fatto che i fenomeni studiati dalla meccanica rappresentano, per il tecnico, qualche cosa di analogo a ciò che la moneta rappresenta per il commerciante: un mezzo cioè universale di

scambio, la cui appropriazione basta a rendere possibile il conseguimento di ogni altra cosa desiderabile.

Riconoscere, di questa tendenza, la causa e l'origine, è riconoscere, nello stesso tempo, anche i limiti della sua proficua e legittima esplicazione.

L'illusione che, nel campo economico, ha dato origine alle teorie “ mercantiliste „, trova qui il suo perfetto riscontro in quelle dottrine metafisiche, che, come quelle per esempio adottate dai filosofi meccanicisti del secolo XVIII, riguardavano le leggi della meccanica come sufficienti a “ rendere ragione „ di tutti i fatti dell'Universo, e concepivano questo come capace di venire, qualche giorno, dedotto, come un teorema o un corollario geometrico, da qualche ancora ignota formula relativa ai moti e agli urti di atomi e molecole.

Le costruzioni filosofiche di questa specie sono qualificate dal Mach come della pura “ mitologia meccanica „, non meno antropomorfica, per quanto in diverso senso, di quelle mitologie “ animistiche „ di cui ci è offerto esempio dalle cosmogonie antiche.

GIOVANNI VAILATI.

PREFAZIONE DELL'AUTORE

Il presente volume non è un trattato intorno all'applicazione dei principî della meccanica; esso piuttosto è lavoro di esposizione critica animato da uno spirito *antimetafisico;* e la parte matematica è tutt'affatto accessoria.

La meccanica vi è trattata non come un ramo di matematica, ma come un ramo delle scienze fisiche; e se da questo lato il lettore avrà interesse di conoscerne il contenuto, sarà curioso di sapere come siano stati ottenuti i principî della meccanica, da quali *fonti* siano stati attinti, e fino a qual punto si possano considerare come una conquista *bene assicurata,* troverà, lo speriamo, in quest'opera, qualche lume. Questo contenuto, il quale per il filosofo ed il fisico offre l'interesse maggiore e più generale, si trova infatti nascosto sotto la veste didattica della scienza odierna.

Gli elementi fondamentali delle nozioni, che studia la meccanica, si sono sviluppati quasi compiutamente, quando si son fatte le ricerche su casi speciali e semplicissimi dei fenomeni meccanici; e l'analisi storica delle discussioni riguardanti questi casi rimane ancora il mezzo più efficace ed il più naturale per conoscere gli elementi essenziali dei principî, e si può anche dire che solo per questa via possiamo arrivare alla compiuta comprensione dei risultati generali della meccanica. Uniformandomi a tali vedute sono giunto ad un'esposizione forse alquanto lunga, nello stesso tempo però abbastanza chiara. Per l'imper-

fezione del linguaggio ordinario mi è stato impossibile, a meno di non volere talvolta sacrificare la forma, mettere da banda le brevi ed esatte notazioni matematiche.

Le idee svolte in quest'opera furono sin da principio e quasi senza eccezione accolte con gran freddezza ed assai lentamente ottennero migliore accoglienza. Tutte le concezioni essenziali, che essa contiene, furono espresse per la prima volta in una breve comunicazione intitolata *Ueber die Definition der Masse,* 5 p. in-8; (Sulla definizione di massa), che incontreremo nel cap. II, n. V. che Poggendorff rifiutò di pubblicare nei suoi *Annali,* e perciò comparve un anno dopo (1868) nel *Repertorio di fisica sperimentale* di Carl. Nel 1871 in una conferenza io ho chiaramente indicato il punto di vista, in cui mi ero posto, nella critica della conoscenza rispetto alla scienza in generale ed alla fisica in particolare. Secondo un tal modo di vedere il concetto di *causa* è sostituito da quello di *funzione;* la scoperta della *reciproca dipendenza* dei fenomeni e la loro descrizione *economica* allora divengono lo scopo, mentre i concetti fisici non sono più che semplici mezzi per giungervi. Ora non mi premeva più di chiedere a nessun direttore di Rivista di assumersi la responsabilità della pubblicazione di questa conferenza, e, nel 1872, io la feci pubblicare in un opuscolo (1).

Inoltre ebbi la contentezza di vedere nel 1874 da Kirchhoff introdurre nella sua Meccanica (2) e da Helmholtz (3) la *descrizione* come *dimostrazione,* idea che non corrispondeva che ad una parte delle mie idee e che destò nondimeno " la meraviglia generale " dei contemporanei. Ma la grande autorità di Kirchhoff esercitò gradatamente la sua grande influenza e il risultato evidentemente ne fu che la mia Meccanica, quando fu pub-

---

(1) *Die Geschichte und die Wurzel des Satres des Erhaltung der Arbeit,* Praga, Calve, 1872.

(2) *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik,* Leipzing, 1874.

(3) *Die Thatsachen in der Wahrnehmung,* Berlin, 1879.

blicata, nel 1883, non sembrò più sì peregrina. Davanti a questo incalcolabile appoggio, che così diede Kirchhoff alle mie idee, io considero come assolutamente secondario il fatto che si sia ritenuto, e in parte si ritenga ancora, la mia esposizione fisica dei principî come una estensione della sua, benchè essa sia, in realtà, non soltanto più antica rispetto all'epoca della sua apparizione, ma ancora più radicale.

Ho già esposto la mia opinione sulla natura di ogni scienza, la quale consiste nel considerarla come una *economia* del *pensiero*, in una conferenza fatta sulle *forme dei liquidi* (1); l'ho sostenuta nel mio opuscolo del 1872 già citato, e l'ho infine discussa particolareggiatamente in un discorso accademico sulla *Natura economica della ricerca fisica* (2). Ora non sono più solo di questa opinione, poichè con mia grande soddisfazione Avenarius ha sviluppato in una maniera tutta sua propria idee molto simili alle mie (3). La tendenza veramente filosofica di riunire tutte le scienze in un unico sistema — tendenza che fa d'altronde una opposizione vigorosa alle usurpazioni della filosofia speculativa — non sarà certamente disconosciuta nel mio libro.

Le questioni qui trattate mi preoccupavano già nella mia giovinezza, e l'interessamento che destavano in me fu potentemente eccitato dall'ammirevole introduzione che Lagrange fece precedere i capitoli della sua *Mécanique analytique*, come da una Memoria di Jolly scritta con finezza e con chiarezza (*Principien der Mechanik*, Stuttgart, 1852). L'eccellente storia critica dei principî della meccanica del Dühring (*Kritische Geschichte der Principien der Mechanik*, Berlin, 1873), non ha più esercitato un'influenza sensibile sopra le mie idee, poichè, all'epoca della

---

(1) Populär, *Wissenschaftlischen Vorlesungen*, Leipzig, 1896, pag. 1 e seg.

(2) *Ibid*, pag. 203 e seg.

(3) *Philosophie als Denken der Welt nach dem Princip des kleinsten Kraftmaasses*, Leipzig, 1876.

sua pubblicazione io possedevo ed avevo già spiegato tutti gli elementi essenziali; tuttavia si troveranno molti punti di contatto, almeno per ciò che riguarda la parte negativa della critica. Il numero dei fautori di quest'opera di molto è accresciuto in questi venti anni, ed il richiamo occasionale dei miei svolgimenti negli scritti di Blondlot, Boltzmann, Föppl Hertz, Love, Maggi, Pearson, Slate, Voss e d'altri, mi danno affidamento a sperare che il mio lavoro non sarà riuscito vano. Mi ha fatto particolarmente piacere di vedere K. Pearson e J.-B. Stallo prendere lo stesso mio atteggiamento verso la metafisica e trovare in W. K. Clifford un pensatore, il cui fine è quasi identico al mio.

I nuovi apparecchi di dimostrazione descritti in questo libro furono costruiti intieramente dietro le mie indicazioni nel laboratorio dell'Istituto di fisica dell'Università di Praga, che io ho altre volte diretto. Alcune illustrazioni, copie fedeli di antiche incisioni, sono in relazione meno strette col testo. Le effigie dei grandi investigatori, riprodotte in questi disegni in un modo sì originale e sì naturale, mi hanno spesso arrecato nel lavoro una impressione di freschezza, a cui io spero partecipino i miei lettori.

Vienna, 1903.

E. Mach.

PREFAZIONE ALLA VI EDIZIONE

Lavori di Auding, Duhem, Föppl, Hartmann, Seeliger, Vailati e Wohhvill sono presi in considerazione in un'appendice divisa in sei parti alle quali il testo rimanda. Devo suggerimenti per aggiunte e modificazioni ai signori E. Lampe (Berlino) e V. Samter (North Wobarn, Mass.)

Vienna, novembre 1908.

E. Mach.

INDICE

CAPITOLO TERZO.

Estensione dei principî e sviluppo deduttivo della meccanica.

CAPITOLO QUARTO.

Svolgimento formale della meccanica.

CAPITOLO QUINTO.

Relazioni della meccanica con le altre scienze.

INTRODUZIONE

1. La parte della fisica, che è la più antica e ad un tempo la più semplice, e che perciò viene considerata come la base della comprensione di molte altre parti di questa scienza, ha per oggetto lo studio del moto e dell'equilibrio delle masse: essa dicesi meccanica.

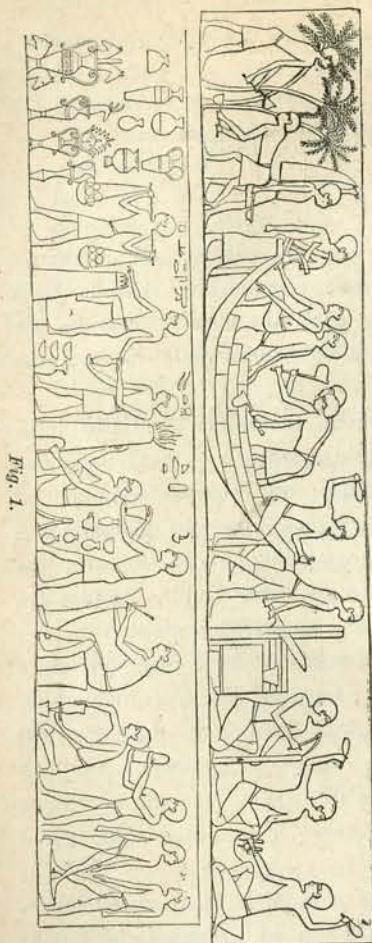
2. La storia dello sviluppo della meccanica è affatto indispensabile per comprendere compiutamente la scienza nella sua condizione presente, e fornisce anche un esempio semplice ed istruttivo del processo, col quale si costituiscono generalmente le scienze fisiche. La *conoscenza istintiva* ed involontaria dei fenomeni della natura precede sempre senza dubbio la loro conoscenza cosciente, scientifica, cioè la indagine deliberata dei fenomeni. La prima è dovuta alle relazioni fra i fenomeni della natura ed il soddisfacimento dei nostri bisogni. L'acquisto delle cognizioni più elementari non riguarda il solo individuo; ma esso è previamente effettuato dallo sviluppo della specie. Infatti è necessario di fare una distinzione fra le esperienze di meccanica e la scienza della meccanica, secondo il significato che ora si attribuisce a questa parola.

Egli è certo che le esperienze meccaniche sono antichissime. Esaminando attentamente i bassorilievi ed i disegni dei monumenti egiziani ed assiri, troviamo rappresentati molto bene numerosi strumenti ed apparecchi meccanici; ma la storia della scienza di questi popoli o non esiste affatto od è poco o punto attendibile. A lato degli strumenti ingegnosissimi vi trovi dei procedimenti del tutto grossolani come, ad esempio, il trasporto

di enormi massi di pietre per mezzo dei traini. Tutto ciò porta seco il carattere della scoperta istintiva, incompleta, accidentale.

Fig. 1.

Le tombe dei tempi preistorici contengono pure numerosi istrumenti, la cui costruzione e l'uso suppongono un'abilità tecnica poco comune e molta esperienza meccanica. Talchè molto prima che si fosse pensato ad una teoria, nel senso ora attribuito a questa parola, s'incontrano strumenti, macchine, esperimenti e cognizioni meccaniche.

3. Talvolta si è condotti a pensare che la mancanza dei documenti scritti alteri il nostro giudizio riguardo ai popoli antichi. Si trovano specialmente negli autori antichi certi passi staccati, che sembrano testimoniare la dottrina ben più profonda di quella che generalmente si attribuisce a questi popoli. Prendiamo, per esempio, il passo seguente di Vitruvio (1): “ Vox autem est spiritus fluens, et auris ictu sensibilis auditui. Ea movetur circulorum rotundationibus infinitis, uti si in placidam auqam lapide immisso nascantur innumerabiles undarum circuli crescentes a centro et quam latissime possint vagantes, nisi

(1) Vedi Vitruvio, *De Architectura,* lib. V, cap. III, pag. 6, stampato a Firenze per gli eredi di Filippo Giunti, anno 1522.

angustia loci interpellaverit, aut aliqua offensio, quae non patiatur designationes earum undarum ad exitus pervenire. Itaque cum interpellentur offensionibus, primae redundantes insequentium disturbant designationes. Eadem ratione vox ita ad circinum efficit motiones. Sed in aqua circuli aequa planitie in latitudinem moventur, vox et in latitudine progreditur et altitudinem gradatim scandit. Igitur ut in aqua undarum designationibus, ita in vóce cum offensio nulla primam undam interpellaverit, non disturbat secundam nec insequentes sed omnes sine resonantia perveniunt ad imorum et summorum aures „.

Eccone la traduzione: “ La voce è un vento, che scorre e che si stende sensibile all'udito con la percossa dell'aria. Si muove per infiniti giri circolari, ed appunto come sono quegl'infiniti cerchi delle onde, i quali si generano gettando un sasso in una acqua quieta, e crescendo coll'allontanarsi dal centro, si diffondono, quanto più possono, se non sono impediti o dalla strettezza del luogo, o da altro intoppo, che non lascia giungere queste onde alla fine del loro destino; onde è che rimanendo le prime rattenute dagl'intoppi, ripercuotendosi interrompono le terminazioni delle seguenti. Non altrimenti si estende la voce anche circolarmente: con questa sola differenza, che nell'acqua i cerchi si estendono in larghezza orizzontale, ma la voce si estende in larghezza, e va di mano in mano salendo anche in altezza; laonde, siccome accade nella terminazione delle onde, così anche nella voce, quando non vi è intoppo, che trattenga la prima, questa non disturba la seconda, nè le altre appresso, ma tutte senza rimbombo giungono egualmente alle orecchie dei primi e degli ultimi. „

Non direbbesi di sentire un volgarizzatore, la cui incompleta esposizione ci sia pervenuta, allorchè forse le opere più profonde, cui ha attinto, si sono perdute? Pure a noi, da qui a migliaia d'anni, ci apparirebbe sotto una strana luce, se la nostra letteratura popolare, che a causa della sua estensione, correndo meno pericoli di essere distrutta, si conservasse più lungamente delle nostre opere scientifiche? Ma questa opi-

nione favorevole è distrutta da un gran numero di altri passi, i quali contengono errori sì grossolani e così evidenti, che sono appena compatibili con una coltura scientifica più avanzata.

Pertanto aggiungiamo che le ricerche recenti sulla letteratura scientifica degli antichi " conducono a modificare il nostro giudizio in un senso più favorevole. Cosí Schiaparelli ha dato un eccellente ragguaglio dell'astronomia dei Greci; e Govi, nel suo lavoro sull'ottica di Tolomeo, ha messo in luce dei veri tesori. L'opinione testè molto diffusa, cioè che i Greci in particolare avessero completamente trascurato l'esperimentare, è oggi del tutto insostenibile. I più antichi esperimenti sono senza dubbio quelli dei pitagorici, i quali si servivano del monocordo col cavalletto per la determinazione dei rapporti delle lunghezze delle corde vibranti armonicamente. Anassagora dimostra che l'aria è pesante per mezzo di vesciche gonfie e chiuse; Empedocle mediante un vaso rovesciato, immerso nell'acqua (Aristotele, *Fisica*); ma questi sono esperimenti primitivi; Tolomeo espose ricerche metodiche sulla rifrazione della luce; e le sue osservazioni di ottica fisiologica sono tutt'ora interessanti. Aristotele (*Meteor.*) riporta alcune osservazioni, le quali conducono alla spiegazione del fenomeno dell'arcobaleno. Si può attribuire all'immaginazione di storici ignoranti le fandonie assurde, molto adatte ad aumentare la nostra diffidenza, come ad esempio la storia di Pitagora ed i martelli che producevano un suono, la cui altezza era proporzionale al loro peso. Plinio abbonda di storielle di questo genere, prive di ogni senso critico. In sostanza esse non sono nè peggiori, nè più false delle favole della mela di Newton o del ramino di Watt. Forse esse si comprenderanno ancora meglio,s e si terrà conto della difficoltà e della spesa altissima, che s'incontravano per la pubblicazione degli scritti antichi, e quindi la loro limitatissima diffusione (1).

(1) Vedi I. Muller, *Ueber das Experiment in den physikalischen Studien der Griechen*, Naturwiss. Verein, Innsbruk, XXIII, 1896-97.

4. È oggi difficile stabilire, dal punto di vista storico, quando, dove ed in qual modo abbia realmente incominciato lo sviluppo della scienza. Sembra ben naturale ammettere che l'istintiva classificazione degli esperimenti abbia preceduto la loro classificazione scientifica. Le tracce di questo processo si possono ancora trovare nella scienza odierna; e possiamo anche, al bisogno, osservarle in noi stessi. L'uomo, per il soddisfacimento dei propri bisogni, fa involontariamente ed istintivamente degli esperimenti, dei quali si serve in una maniera incoscente e senza pensarvi. A questi appartengono per esempio i primi esperimenti che riguardano l'applicazione della leva sotto le sue forme più differenti. Ma ciò che si trova in un modo così istintivo ed irriflessivo può solo sembrare come qualche cosa di speciale o di sorprendente, ed in generale non provoca alcuna nuova idea.

La transizione di questo studio ad una conoscenza e ad una cognizione classificata, scientifica dei fenomeni non diviene possibile, se non quando si sono costituite certe professioni speciali, che soddisfano determinati bisogni sociali. Ciascuna di queste professioni si occupa di certe classi speciali di fenomeni naturali. Ma le classi di quelli, che esercitano questi mestieri, si rinnovano; gli antichi membri scompaiono e ne subentrano dei nuovi. Si doveva quindi sentire la necessità di far conoscere ai nuovi venuti le esperienze possedute, di imparare ad essi da quali condizioni dipende il raggiungimento di un dato fine, ond'essi possono precedentemente determinarne i risultati.

Questa esigenza dapprima costringe ad una riflessione più precisa, come ognuno oggi può ancora osservar su se stesso. D'altra parte il nuovo membro considera come straordinarie delle cose, che gli antichi facevano macchinalmente e che divengono in questo modo per lui occasioni di riflessione e di ricerca.

Quando vogliamo iniziare qualcuno alla conoscenza di certi fenomeni naturali, noi possiamo o farglieli osservare da se stesso (ma allora non havvi insegnamento) ovvero dobbiamo descriverglieli in un modo qualunque per risparmiargli la fatica di ripetere personalmente e da capo ciascun esperimento. Ma la de-

scrizione non è possibile che quando si tratta di fenomeni, i quali si ripetono continuamente o che, per lo meno, risultino di parti, che si riproducono costantemente. Si può descrivere o rappresentare astrattamente col pensiero solo quello che è uniforme o che segue una legge; poichè la descrizione suppone per rappresentare gli elementi, l'applicazione di certe determinazioni, le quali si comprendono solo quando gli elementi si ripetono.

5. Fra i numerosi fenomeni della natura alcuni di essi sembrano comuni, altri appaiono come straordinari, sorprendenti, sconcertanti e per così dire in contraddizione coi primi. Finchè si verifica ciò, noi non possediamo una concezione stabile ed unilaterale della natura; onde il compito di ricercare fra la moltiplicità degli elementi sempre presenti dei fenomeni naturali quelli che sono della stessa specie. D'altra parte la descrizione e la comunicazione più brevi e più economiche sono rese perciò possibili; l'acquisto di questa facoltà di riconoscere nella complicazione dei fenomeni questi elementi sempre simili conduce d'altronde ad *una concezione sinottica, unitaria, logica e facile dei fatti.* Quand'anche si sia giunti a scoprire ovunque un piccolo numero di elementi semplici, *sempre gli stessi,* i quali si assomigliano in un modo comune, questi ci sembrano come cose note, che non ci sorprendono più; nulla più di estraneo, di nuovo o di confuso troviamo nei fenomeni; noi ci familiarizziamo con essi, i quali non ci lasciano più perplessi; essi sono *spiegati.* Questo è un processo di adattamento del pensiero ai fatti.

6. L'economia nella comunicazione e nella concezione appartiene alla vera essenza della scienza. In ciò risiede il suo elemento acquietante, esplicativo ed estetico di questa, ed è indubbiamente della più grande importanza dal punto di vista dell'origine storica della scienza. In principio ogni economia ebbe per iscopo immediato il soddisfacimento dei bisogni fisici. Per il lavoratore, ed ancor più per l'investigatore, la più breve, la più semplice conoscenza di una classe determinata di fenomeni naturali, quella che si può raggiungere col minimo numero di sforzi intellettuali, naturalmente diviene per sè stesso uno

scopo economico; in questo, quantunque non sia da principio che un mezzo per ottenere un risultato determinato, i bisogni fisici sono quasi intieramente trascurati, poichè i bisogni intellettuali corrispondenti sono svegliati e richiedono di essere soddisfatti.

Così dunque la scienza della natura si propone di ricercare ciò che havvi di invariabile nei fenomeni, negli elementi di essi, nel modo con cui sono collegati insieme e nella loro mutua dipendenza. Essa si sforza, mediante una descrizione generale e compiuta, di rendere inutili nuovi sperimenti, di risparmiarceli, per esempio quando la conoscenza della dipendenza reciproca di due fenomeni fa sì, che l'osservazione del primo rende inutile quello del secondo, che è predeterminato e codeterminato dal primo. Ma si può risparmiare molto lavoro della descrizione stessa, introducendovi il metodo, e cercando di descrivere il più possibile nello stesso tempo e nel modo più breve. Studiando i particolari, tutto ciò diverrà molto più chiaro, di quanto sia possibile in una esposizione generale. Tuttavia è opportuno di segnalare fin da ora i punti di vista fondamentali, di cui avremo occasione di occuparci nel corso della nostra opera.

7. Entreremo subito in modo più particolare nel nostro soggetto; e, senza fare della storia della meccanica il principale nostro scopo, considereremo il suo sviluppo storico per quanto sia necessario al comprendimento dello stato attuale di questa scienza, e per quanto non distrugga l'unità del nostro lavoro. Facendo astrazione, che non possiamo permetterci di trascurare i grandi incentivi dati dagli uomini più illustri di tutte le epoche, incentivi i quali, tutto considerato, sono d'altronde più fecondi di quelli che possono dare le migliori menti odierne, non havvi spettacolo più grandioso, nè più intellettualmente elevato di quello offerto dalla potente intellettualità degli investigatori fondamentali. Benchè non possedessero alcun metodo, poichè essi furono creati dal loro sforzo e sarebbero rimasti sempre incompresi senza conoscere le loro opere, tuttavia essi s'impossessarono, si reserò padroni della loro materia e ad essa imposero

la forma astratta. Chi conosce il corso compiuto dello sviluppo della scienza giudicherà evidentemente in un modo assai più indipendente e più esatto il significato di un movimento scientifico odierno di colui, che, limitandosi nel suo giudizio al periodo di tempo, in cui è vissuto, non può fondarsi che sull'indirizzo momentaneo, che ha preso questo movimento.

CAPITOLO PRIMO

Sviluppo dei principî della statica

I. *Il principio della leva.*

1. Le più antiche ricerche di meccanica, di cui abbiamo qualche notizia, quelle dei Greci antichi, relative alla statica, riguardano l'equilibrio. Parimente, quando i Greci fuggiaschi, dopo la presa di Costantinopoli da parte dei Turchi nel 1453, diedero al pensiero in occidente un nuovo impulso per mezzo degli scritti antichi, che essi avevano conservati, furono le ricerche sulla statica, principalmente originate dai lavori di Archimede, quelle di cui si occuparono i più grandi investigatori di quel tempo.

Le ricerche sulle altre parti della meccanica non incominciarono che assai tardi presso i Greci, e non si possono paragonare ai grandi progressi che questo popolo fece nelle matematiche e particolarmente in geometria.

I documenti sulla meccanica, riguardanti i più antichi investigatori greci, sono assai rari. *Archita* da Taranto (circa il quattrocento a. C.) si segnalò in geometria, in cui si occupò del celebre problema della duplicazione del cubo, e costruì alcuni istrumenti di meccanica per il tracciamento delle diverse curve. In astronomia insegnò che la terra era sferica e che essa compiva in un giorno una rotazione intorno al proprio asse; in meccanica trovò la teoria della puleggia. In uno dei suoi scritti sulla meccanica egli deve avere applicata la geometria a questa scienza, ma non si ha alcun documento certo, il quale fornisca qualche particolare. Inoltre Aulo Gellio (X, 12) riferisce che

Archita aveva costruita una macchina automatica straordinaria consistente in una colomba volante di legno, che era probabilmente messa in movimento per mezzo dell'aria compressa. È infatti una caratteristica della preistoria della meccanica che da un lato si sia richiamata l'attenzione sulla sua utilità pratica e che dall'altro essa sia stata applicata alla costruzione di macchine automatiche, le quali potevano servire solo a meravigliare gli ignoranti.

Anche più tardi, all'epoca di Ctesibio (285-247 a. C.) ed Erone (1⁰ secolo a. C.), queste tendenze non erano sostanzialmente cambiate. Durante il decadimento della cultura, nel medio-evo si ripetè questo stesso fenomeno. Si conoscono le ingegnose macchine automatiche ed i complicati meccanismi di orologeria, la costruzione dei quali la credenza popolare attribuiva all'opera del demonio. Imitando la apparenza esteriore della vita, l'uomo nutriva speranza di penetrare il fondamento interno. La credenza meravigliosa della possibilità del moto perpetuo è pure in relazione con questa concezione errata della vita. Solo gradualmente e lentamente, e sotto forma vaga, si presentarono da principio alla mente dei pensatori i genuini problemi della meccanica.

I *problemi meccanici* di Aristotile (364-322 a. C.) sono una conferma di questo modo di vedere. Aristotele sa *riconoscere* e *porsi* i problemi; egli concepì il principio del parallelogramma dei *moti;* e fu sul punto di scoprire la forza centrifuga; ma non fu felice nella risoluzione dei problemi. L'intiero lavoro ha un carattere più dialettico che scientifico; Aristotele si tien pago di mettere in evidenza le aporie (le difficoltà), che contengono i problemi. Del resto tutto questo libro di Aristotele caratterizza benissimo lo stato intellettuale corrispondente all'inizio di una ricerca scientifica.

« Ciò che si verifica secondo le leggi della natura, ma di cui la causa non è apparente, ci sembra meraviglioso... Sono di tal genere i fatti, in cui il minore vince il maggiore, i piccoli pesi superano i maggiori e quasi tutti i problemi che noi chiamiamo meccanici.... Ma alle difficoltà di questa specie apparten-

gono quelle che sono inerenti alla leva, poichè sembrerebbe contradditorio che una forza minima metta in moto un grande peso, cui è ancora aggiunto un carico più grosso. Chi non può muovere un peso senza l'aiuto di una leva, può facilmente muoverlo coll'aiuto di essa. La causa primordiale di tutto ciò è inerente alla natura del cerchio, ed è veramente naturalissimo, poichè non havvi nulla di contradditorio a ciò, che il meraviglioso esca dal maraviglioso. Ma un insieme di proprietà contrarie in un tutto unitario è ciò che vi ha di più meraviglioso. Il cerchio è veramente composto in questo modo, perchè esso è generato da qualche cosa che si muove e da qualche cosa che rimane nel suo luogo „.

In un altro passo dello stesso lavoro havvi la testimonianza di un presentimento degli spostamenti virtuali sotto forma assai indeterminata.

Queste considerazioni mostrano che si sa scoprire un problema e si sa enunciarlo; ma l'investigatore è ben lungi ancora dalla sua risoluzione.

2. Archimede da Siracusa (287-212 a. C.) ha lasciato un gran numero di opere, alcune delle quali ci sono pervenute complete, fra le altre un trattato di *De Aequiponderantibus,* che contiene alcune proposizioni sulla leva e sul baricentro e che ora esamineremo.

In questo trattato Archimede parte dalle seguenti ipotesi, che egli considera come evidenti per sè stesse:

a) Due pesi eguali applicati ad egual distanza (dal punto di appoggio) si fanno equilibrio.

b) Due pesi eguali applicati a distanze disuguali (dal punto di appoggio) non si fanno equilibrio ed il peso, che è più distante, discende.

Da queste ipotesi egli deduce la proposizione seguente:

“ Pesi commensurabili sono in equilibrio, quando sono in ragione inversa delle loro distanze dal punto di appoggio „.

Potrebbe sembrare superfluo di fare una analisi minuta di queste ipotesi; ma considerandole meglio, ci accorgiamo che questa analisi è indispensabile.

Immaginiamo un'asta rigida senza peso appoggiata ad un punto; a distanze eguali da esso si sospendono pesi eguali. Archimede suppone questi pesi in equilibrio e assume questa ipotesi per punto di partenza.

Per la simmetria di tutto il sistema non havvi alcuna ragione di moto in un senso piuttosto che in un altro. Sembra evidente, in virtù del principio della ragione sufficiente, che l'ipotesi sia in dipendente ad ogni esperienza. Ma allora si dimenticherebbero gran numero di esperienze positive e negative che vi sono già contenute; esperienze negative per esempio come queste: il colore dei bracci della leva, la posizione dello spettatore, un fenomeno qualunque che avviene nella vicinanza, non hanno alcuna influenza; d'altra parte un'esperienza positiva, chiaramente messa in evidenza nella seconda ipotesi, e per la quale sono, non soltanto i pesi, ma anche le loro distanze dal fulcro, i fattori che determinano la rottura dell'equilibrio, o, se si vuole, i determinanti del moto. Queste esperienze sono necessarie per comprendere che realmente lo stato di riposo (di non moto) è l'unico, che sia determinato in *un sol modo* dalle condizioni determinanti della ipotesi (1).

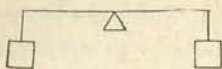



Fig. 2.

Ma la conoscenza delle circostanze determinanti un fenomeno si può considerare come *sufficiente* solo quando essa dà una determinazione *unica* di questo. Le esperienze, di cui or ora si è parlato, permettono di fare l'ipotesi che *i soli pesi e le loro distanze sono determinanti;* solo allora la prima proposizione di Archimede acquista realmente un alto grado di evidenza e diviene eminentemente idonea a servire di base ad ulteriori ricerche.

Per l'osservatore posto nel piano di simmetria dell'apparecchio, la prima proposizione diviene una convinzione *istintiva,* che assolutamente s'impone e che d'altra parte è fondata nella sim-

(1) Se si ammettesse, ad esempio, che il peso destro cada, sarebbe istantaneamente determinato il moto in senso contrario; basterebbe che lo spettatore si mettesse dalla parte opposta.

metria del nostro proprio corpo. Si può anche aggiungere che la analisi delle proposizioni del carattere di questa è un mezzo eccellente per avvezzare il nostro pensiero ad una precisione analoga a quella, che la natura manifesta nei suoi fenomeni.

3. Archimede in seguito cercò di ricondurre il caso generale della leva al caso particolare, che è per sè stesso evidente. Nelle sue linee generali il suo ragionamento è il seguente: I due pesi eguali 1, sospesi alle estremità *a* e *b* (fig. 3) di un'asta *a b* mobile intorno al suo punto di mezzo *c*, sono in equilibrio. Se si sospende il tutto ad un filo attaccato in *c*, questo filo dovrà sostenere il peso 2, facendo astrazione da quello dell'asta. Due pesi eguali

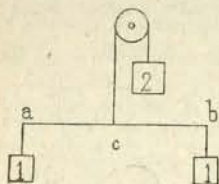
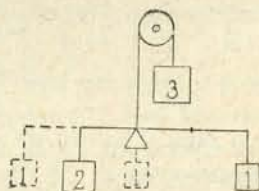



Fig. 3. *Fig. 4.*

applicati alle estremità equivalgono perciò ad un peso doppio applicato nel mezzo.

Ora sospendiamo i pesi 2 ed 1 (fig. 4) alle estremità di una leva, i cui bracci sono proporzionali ai numeri 1 e 2. Si può immaginare il peso 2 sostituito da due pesi 1, applicati alle distanze 1 e 2 dal punto di sospensione. Allora havvi completa

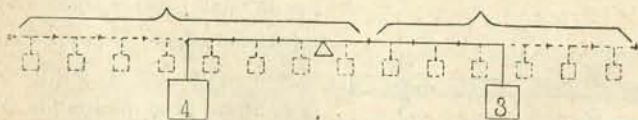



Fig. 5.

simmetria rispetto al fulcro e quindi havvi equilibrio. Supponiamo ancora i pesi 3 e 4 (fig. 5) sospesi alle estremità dei bracci della leva 4 e 3. Questi pesi saranno sostituiti rispettivamente da 3 e 4 paia di pesi $\frac{1}{2}$ applicati simmetricamente come si vede nella

figura, e si ha di nuovo la simmetria perfetta. Nel ragionamento ci siamo serviti di numeri particolari, ma esso si può facilmente generalizzare.

4. È interessante vedere come, dopo i lavori di Stevino, Galileo modificasse il modo di vedere di Archimede.

Galileo immagina un prisma omogeneo pesante; lo sospende (fig. 6) nelle sue estremità ad un'asta omogenea orizzontale della stessa lunghezza, e sospende quest'asta nel suo punto di mezzo; havvi certamente equilibrio. Ora Galileo asserisce che sono compresi in *questo caso* tutti gli altri; e lo dimostra in questo modo. Indichiamo con $2(m+n)$ la lunghezza dell' intiera asta o del prisma; si tagli il prisma in due altri prismi di lunghezze $2m$ e $2n$ rispettivamente; ciò che si può fare senza alterare l'equilibrio, legando all'asta le estremità contigue dei primi $2m$ e $2n$. Tutti i legami precedenti si possono distruggere, qualora si sospendano prima le due parti del prisma all'asta nei loro punti di mezzo. Essendo la lunghezza totale $2(m+n)$, la metà di essa sarà $m+n$; la distanza del punto di sospensione del prisma metà di destra al punto di sospensione dell'asta è m, ed n è la distanza corrispondente pel prisma metà di sinistra.

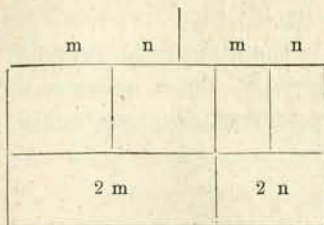



Fig. 6.

Da ciò si comprende agevolmente che questo fenomeno dipende dal peso e non dalla forma del corpo. Dunque è manifesto che havvi equilibrio, quando un peso qualunque $2m$ è sospeso ad una distanza n ed un peso $2n$ ad una distanza m da ambo le bande del punto di appoggio (sospensione).

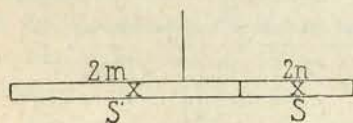



Fig. 7.

Questo processo mette in evidenza meglio ancora di quello di Archimede, gli elementi istintivi della nostra conoscenza del principio della leva; ma, benchè tutto questo sia assai bello, vi

si trova ciò non ostante un avanzo di quella complicazione propria agli investigatori dell'antichità.

Un fisico moderno avrebbe trattato questo problema in un modo assai differente; ecco, per esempio, il metodo seguito da Lagrange:

Un prisma orizzontale omogeneo è sospeso pel suo centro; poi s'immagina diviso in due prismi di lunghezza $2m$ e $2n$ rispettivamente, e si considerano i baricentri di questi prismi parziali, a cui si applicano dei pesi proporzionali a $2m$ e $2n$; questi pesi posti a delle distanze n ed m dal punto di appoggio continuano a farsi equilibrio. Intanto aggiungiamo che una brevità così elegante del problema esige un'eccellentissima intuizione matematica.

5. L'oggetto, che Archimede ed i suoi successori si proposero nelle loro dimostrazioni, era di ricondurre il caso generale più complicato della leva al caso più semplice e che sembra evidente per sè stesso, di *discernere* il semplice nel complicato od anche inversamente. Infatti noi riguardiamo un fenomeno come spiegato, allorchè perveniamo a scoprirvi fenomeni più semplici già noti.

Queste deduzioni fatte da Archimede e dai suoi successori possono a prima vista sorprendere il nostro assenso; ma una più attenta considerazione fa sorgere dei dubbi intorno al loro rigore. Si domanda in qual modo il semplice fatto dell'equilibrio dei pesi eguali a distanze eguali dal punto di appoggio logicamente possa condurre alla proporzionalità inversa dei pesi e dei bracci della leva?

Se, lungi dal potere *dimostrare a priori* il semplice fatto che l'equilibrio dipende dal peso e dalla distanza, si deve andare a cercarlo nella esperienza, tanto meno si potrà determinare la forma di questa dipendenza (la legge di proporzionalità) con un mezzo semplicemente speculativo!

È un fatto che Archimede e tutti i suoi successori fecero un uso tacito, più o meno simulato, della ipotesi che l'effetto di una forza P, applicata ad una distanza L da un asse di rotazione, è misurata dal prodotto P.L, detto momento statico. Anzi-

tutto è chiaro che, nel caso di una disposizione esattamente simmetrica, l'equilibrio sussiste *qualunque sia* la legge P.*f* (L), colla quale ciò che determina l'alterazione dell'equilibrio dipende da L; perciò è *impossibile* dedurre dalla persistenza dell'equilibrio, pel caso della simmetria, la forma determinata P.L di questa legge. Quindi l'errore fondamentale della dimostrazione si deve trovare nella *trasformazione* che si ha in vista; e difatti vi si trova. Si consideri un peso applicato *da una parte* dell'asse di rotazione; lo si divida in due parti eguali, che si spostano simmetricamente rispetto al fulcro primitivo; uno di questi pesi si *avvicina* all'asse di rotazione tanto quanto si è *allontanato* l'altro. Ora se si fa l'ipotesi che nello spostamento l'effetto rimane *lo stesso*, ciò equivale aver deciso sulla forma della legge, la quale fa dipendere il momento dalla distanza L, poichè questa permanenza della azione delle due parti del peso non è possibile che quando questa legge abbia la forma P.L, cioè nel caso della *proporzionalità* ad L. Ogni altra dimostrazione non ci può insegnare nulla di più di questo; perciò è superflua. Un ingegno versato nella meccanica non si persuaderà mai che è a priori *identicamente indifferente* per l'equilibrio spostare due pesi eguali simmetricamente rispetto all'asse di rotazione o simmetricamente rispetto ad un punto posto da una parte di quest'asse. Poichè precisamente l'influenza della posizione dell'asse di rotazione è stata riconosciuta importante, e per questo è stata studiata; essa non deve essere quindi in questa ricerca considerata a *priori* come indifferente. D'altra parte o che questo errore sia commesso in buona fede o ad arte, il vizio della dimostrazione rimane lo stesso.

Se si sospende un prisma omogeneo pel suo baricentro con un filo, che passa per una puleggia ed è caricato di un peso uguale a quello del prisma, quest'ultimo è in equilibrio; e, senza distruggere l'equilibrio, si può praticare in questo prisma una sezione *in un punto qualunque*. Nello stesso modo si può fare equilibrio ad un secondo prisma di questa specie, di lunghezza diversa ed in diversa posizione rispetto alla sezione, e poscia

collegato invariabilmente al primo, senza alterare questo equilibrio (Stevino, Lagrange). *Sembra* che in tal guisa si deducano nuovi casi di equilibrio della leva. Procedendo esattamente, non si può mai dedurre da una cosa all'infuori di ciò che vi si è messo. Archimede, Stevino e Galileo cadono nello stesso errore.

6. Pure Huygens critica questa dimostrazione e ne propone un'altra, che egli crede rigorosa. Il suo processo consiste in fondo nel far ruotare i due prismi parziali, di cui più sopra si è parlato nel metodo di Lagrange, di 90° intorno alle verticali dei loro baricentri (fig. 8-*a*) e nel dimostrare che esiste l'equilibrio. Lo si può abbreviare e semplificare nel modo seguente:

In un piano rigido e senza pesi (fig. 8) si conduca una retta passante per un punto S, e su questa retta, da una parte e dall'altra di S, si prendano i segmenti SA e SB di lunghezza 1 e 2 rispettivamente. Si pongano, perpendicolarmente a questa retta ed in modo che i loro centri siano nelle estremità A e B di questa, due prismi sottili, omogenei, pesanti, CD ed EF, i cui pesi rispettivi siano 4 e 2. Si congiunga il centro G di AC col punto S mediante la retta GSH; da C si conduca la parallela CF a questa retta e si trasporti la parte di prisma CG parallelamente a se stessa in FH. Quindi tutto diviene simmetrico intorno all'asse GH e vi è equilibrio intorno a quest'ultimo. Ma pure havvi equilibrio intorno all'asse AB e perciò intorno a ogni asse passante per S ed in particolare intorno all'asse condotto per S perpendicolarmente ad AB. Così si ottiene il caso generale dell'equilibrio della leva.

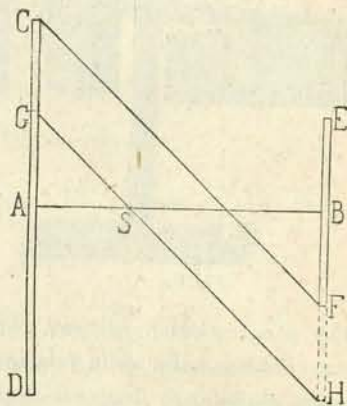



Fig. 8.

Questa dimostrazione pare non contenga altre ipotesi all'infuori di quella dell'equilibrio dei due pesi uguali p, p (fig. 9)

posti in un piano orizzontale rigido alle distanze eguali l, l da un asse AA′ di questo piano. Per concedere a questa ipotesi lo stesso grado di evidenza *a priori* che alla prima proposizione di Archimede, basta immaginare di collocarsi nell'intorno del punto M nel piano verticale condotto per AA′; ammesso ciò, ne risulta

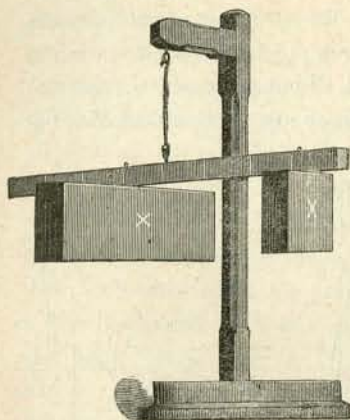
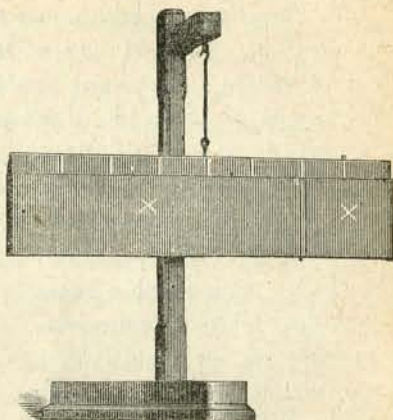



Fig. 8a. *Fig. 8a.*

che una traslazione di pesi parallelamente all' asse di rotazione non cambia nulla nelle relazioni di equilibrio o di moto e così resta giustificato il processo di Huygens.

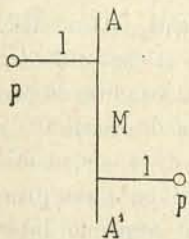
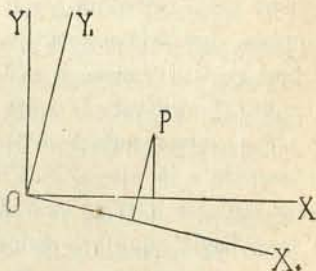



Fig. 9. *Fig. 10.*

L'errore del ragionamento sta in questa affermazione: Se l'equilibrio esiste ad un tempo per due assi del piano, esisterà per ogni asse passante per il loro punto d'intersezione; se tale

deduzione non fosse una verità puramente istintiva, essa non potrebbe essere dedotta che dall'ipotesi di un'azione di forze *proporzionale* alle loro distanze dall'asse. Ma è proprio questo che costituisce il vero nocciolo della teoria della leva e del baricentro.

Si riferisca a due assi coordinati rettangolari un sistema piano di punti materiali. Siano m, m', m'' ... le masse dei punti del sistema ed $x, x', x'' \dots y, y', y'' \dots$ le loro coordinate (fig. 10); le coordinate del loro baricentro sono date dalle formule ben note:

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

Ora si facciano ruotare gli assi di un angolo a; le nuove coordinate ed i punti del sistema sono:

$$x_1 = x \cos a - y \operatorname{sen} a, \, y_1 = x \operatorname{sen} a + y \cos a.$$

Onde il nuovo baricentro ha per coordinate:

$$\xi_1 = \frac{\Sigma m (x \cos a - y \operatorname{sen} a)}{\Sigma m} = \cos a \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} - \operatorname{sen} a \frac{\Sigma m y}{\Sigma m} =$$

$$= \xi \cos a - \eta \operatorname{sen} a:$$

e similmente:

$$\eta_1 = \xi \operatorname{sen} a + \eta \cos a.$$

Dunque si vede che le coordinate del nuovo baricentro si ottengono applicando semplicemente a quelle del primo baricentro le formule di trasformazione delle coordinate; quindi il centro di gravità rimane *lo stesso*. Se scegliamo il centro di gravità stesso come origine delle coordinate, allora abbiamo:

$$\Sigma m x = \Sigma m y = 0;$$

e tali relazioni si verificano anche quando si faccia eseguire una rotazione qualsiasi al sistema di assi coordinati. Se l'equilibrio sussiste per due assi rettangolari, continuerà perciò ad esistere per ogni altro asse passante per il loro punto d'intersezione e reciprocamente. Quindi l'equilibrio intorno a due assi qualunque passanti per un punto di un piano costituisce la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio intorno ad ogni altro asse passante per questo punto del piano.

Ma questa condizione non si verificherebbe più se le coordinate del baricentro fossero date da un'equazione di una forma più generale, come:

$$\xi = \frac{m\,f(x) + m'\,f(x') + m''\,f(x'') + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}.$$

Il ragionamento di Huygens è perciò inammissibile, e contiene l'identico errore che si è osservato nel caso di Archimede.

Archimede, nel suo tentativo di ricondurre il caso complicato della leva al caso semplice, che istintivamente si comprende, ha errato probabilmente, perchè egli ha fatto involontariamente uso *degli studî sul baricentro fatti mediante la proposizione che trattasi di dimostrare*. È caratteristico che Archimede, e molti altri con lui, non abbiano voluto ammettere la ovvia osservazione sul significato del prodotto P.L, ma abbiano cercato di approfondire la questione.

Infatti ora non si può giungere, ed ancor meno all'epoca di Archimede, ad alcuna comprensione della leva, se non si *discerne* nel fenomeno il prodotto P.L, come la circostanza determinante dell'alterazione dell'equilibrio. Le deduzioni di Archimede sono sbagliate in quanto che, nella sua ricerca della dimostrazione logica, caratteristica del genio greco, egli vuol evitare l'accettazione di questo fatto. Ma riguardando il significato di P.L come dato sperimentalmente, le deduzioni di Archimede conservano ancora un notevole valore, poichè esse convalidano l'una coll'altra le concezioni dei casi diversi, mostrano la concordanza del semplice e del complicato, e stabiliscono uno stesso modo di concezione per tutti i casi.

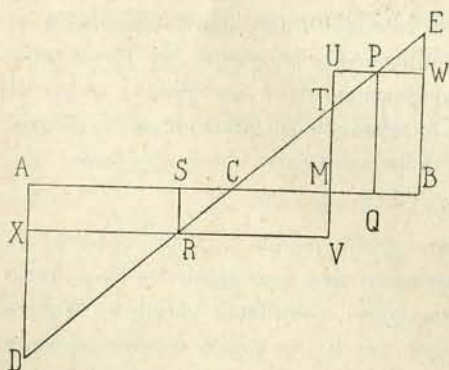



Fig. 11.

Si può rappresentare con una costruzione geometrica assai semplice la somma dei prodotti delle forze per i loro bracci di leva, cioè la circostanza determinante dell'alterazione dell'equilibrio. Infatti s'immagini (fig. 11) un prisma orizzontale, omogeneo, di asse AB, appoggiato al suo centro C. I pesi elementari sono proporzionali alle lunghezze degli elementi corrispondenti dell'asse. Si prenda come ordinata su ciascuno di questi elementi la distanza dall'asse, presa positivamente a destra di C, e portata allora verso l'alto, negativamente a sinistra di C, e portata verso il basso. La somma delle aree dei due triangoli CAD e CBE è CAD + CBE = 0, la quale rende istintiva la persistenza dell'equilibrio. Si dividano i prismi in due parti mediante una sezione in M; si sostituiscano alle superficie MTEB e TMCAD i rettangoli equivalenti MUWB e MVXA, ottenuti conducendo le parallele alla base dai punti P ed R, centri di TE e TD. Ora si facciano ruotare i due prismi parziali intorno ad S ed a Q, fino a che non vengano ad essere perpendicolari ad AB. L'equilibrio è ancora identico, essendo UXAM + MUWB = 0.

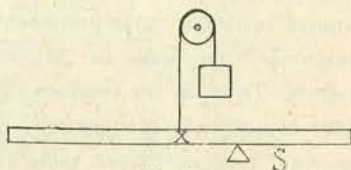



Fig. 12.

Si può aggiungere che le considerazioni di Archimede furono di una grande utilità, anche quando nessuno ebbe più alcun dubbio sul significato del prodotto P.L, e che l'opinione in proposito era stata stabilita in modo saldo tanto storicamente, quanto mediante molte verificazioni.

Le esperienze non sono mai assolutamente esatte, ma esse possono almeno *condurre a congetturare* che la soluzione che spiega il legame fra tutti i fenomeni si trova nel concetto quantitativo esatto P.L. Solo in questo senso le deduzioni di Archimede, di Galileo, ecc., per la prima volta divengono comprensibili; e solo ora si può con assoluta sicurezza fare le trasformazioni, gli allungamenti o le compressioni necessarie dei prismi. Un prisma sospeso pel suo centro si può sezionare, *ove si vuole,* senza distruggere l'equilibrio, e diverse disposizioni analoghe si

possono combinare insieme in modo da fornire de' casi di equilibrio apparentemente nuovi, ma la conversione di un caso di equilibrio o la sua suddivisione in parecchi altri è possibile solo, quando si prenda in considerazione innanzi tutto il significato del prodotto P.L.

Io non posso essere d'accordo col signor O. Hölder, che sostiene l'esattezza delle deduzioni di Archimede contro le mie critiche nel suo saggio: "*Denken und Anschauung in der Geometrie*", quantunque io sia assai soddisfatto del nostro grande accordo rispetto alla natura delle scienze esatte ed ai loro fondamenti. Potrebbe sembrare che Archimede (*De aequiponderantibus*) riguardasse come esperienza generale che due pesi eguali possono sotto qualunque condizione sostituirsi mediante uno eguale al loro peso unito al centro (Teorema 5, corollario 2). In tal caso sarebbe necessaria la sua tardiva deduzione, poichè la ragione cercata consegue immediatamente come si è detto più sopra. Il modo di esprimersi di Archimede non è a favore di questa veduta. Tuttavia un teorema di questa specie non si può riguardare come evidente *a priori;* e le vedute date in ciò che precede mi pare che siano tuttora incontrastate.

7. È interessante ed istruttivo vedere in qual modo i fisici moderni abbiano generalizzato la forma semplice delle leggi della leva trasmessa da Archimede e come ne abbiano fatto uso.

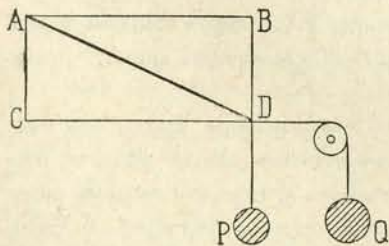



Fig. 13.

Leonardo da Vinci (1452-1519), famoso pittore e scienziato, pare sia stato il primo a riconoscere l'importanza della nozione generale del momento statico. Questa idea generale si ritrova in parecchi passi dei suoi manoscritti. Considera, per esempio, un'asta AD (fig. 13) mobile intorno ad A ed alla cui estremità D è sospeso un peso P, e subisce lo sforzo orizzontale di un peso L mediante un filo che passa per una puleggia. Leonardo

giunge a determinare il rapporto delle forze necessarie per l'equilibrio, osservando da un lato che il braccio della leva per il peso P non è AD, ma che la leva *potenziale* è AB; dall' altro che il braccio di leva per il peso Q non è AD, ma che la leva *potenziale* è AC. È assai difficile dire in qual modo Leonardo sia giunto a questa veduta generale; ma è ben chiaro che egli ha riconosciuto ciò che determina l'azione di un peso.

Considerazioni analoghe si trovano nelle opere di Guido Ubaldi.

8. Ora ci proponiamo di ricercare come siasi potuto arrivare alla nozione di momento statico (che è il prodotto di una forza per la distanza della sua linea di azione dall'asse), benchè oggi non sia più possibile dire esattamente il cammino che è stato seguito. Si ammette facilmente che vi è equilibrio nel caso di una puleggia, il cui filo è tirato da forze eguali nei due sensi. Infatti esiste un piano di simmetria nell'intiero apparecchio, il piano EE, normale al piano dei due fili e bisettore del loro angolo. Siccome il moto della puleggia in queste condizioni non può essere determinato in modo unico con nessuna regola, così non si può produrre questo moto. Inoltre osserviamo ora che il materiale, di cui è composta la carrucola, non ha altro effetto che quello di determinare la forma del moto dei punti di applicazione dei fili; è evidente che senza alterare l'equilibrio si può toglierne una porzione qualunque, la sola parte essenziale essendo formata di due raggi fissi, che termina ai punti di contatto. I raggi fissi normali alle direzioni delle forze qui rappresentano i bracci della leva di Archimede.

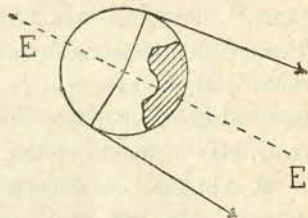



Fig. 14.

Si consideri ora un verricello (fig. 15) di raggio 1 e 2, ed i carichi rispettivi siano 2 e 1. Questo caso corrisponde esattamente al caso generale della leva di Archimede. L' equilibrio non è in nulla modificato, se si fa passare sulla puleggia un

secondo filo teso da forze 2 da ciascuna parte. Ora è evidente che, senza tenere più oltre conto degli altri due fili, si possono concepire i due fili della figura 16 come si facessero equilibrio. Se adesso facciamo astrazione da tutte le circostanze accessorie,

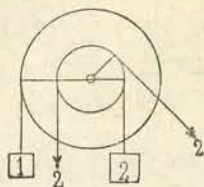



Fig. 15.

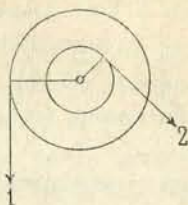



Fig. 16.

da tutti i punti che, non essendo essenziali, si possono trascurare, si giunge subito alla nozione che le circostanze determinanti il moto sono non le forze soltanto, ma ancora le perpendicolari abbassate dall'asse sulle loro linee di azione. Onde la causa determinante è il prodotto della forza per la perpendicolare abbassata dall'asse sulla linea di azione; in altre parole, il così detto momento statico.

9. Abbiamo considerato fin qui lo sviluppo della conoscenza del principio della leva. In modo del tutto indipendente da questa si sviluppò la conoscenza del principio del piano inclinato. Ma non è necessario per comprendere quest'ultima macchina di ricorrere ad un nuovo principio oltre quello della leva. Galileo, ad esempio, espose la teoria del piano inclinato come una conseguenza di quella della leva. Essendo dato (fig. 17) sopra un piano inclinato il peso Q tenuto in equilibrio dal

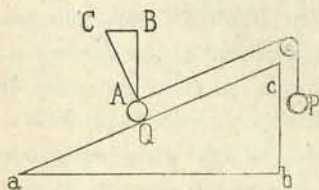



Fig. 17.

peso P, Galileo dimostra che non occorre che il peso Q giaccia direttamente sul piano inclinato, ma che il punto essenziale è piuttosto la forma, od il carattere, del moto di Q. Dunque si può supporre che questo peso Q sia fisso all'asta AC, normale al piano e mobile intorno al punto C. Per una rotazione infinitamente

piccola dell'asta il peso Q si muove sopra un arco di cerchio elementare posto nel piano inclinato. Il fatto che il cammino si incurva se il moto continua, non ha alcuna influenza, poichè nel caso dell'equilibrio questi spostamenti ulteriori non si producono effettivamente, e la mobilità istantanea è la sola circostanza determinante. Se ora rammentasi l'osservazione di Leonardo da Vinci, citata più sopra, si otterrà facilmente l'equazione:

$$Q \cdot CB = P \cdot CA;$$

d'onde:

$$\frac{Q}{P} = \frac{CA}{CB} = \frac{ca}{cb}.$$

Così otteniamo la legge di equilibrio sul piano inclinato. Dunque si può dire in generale che si può facilmente dedurre dal principio della leva la teoria delle altre macchine semplici.

II. *Il principio del piano inclinato.*

1. Lo studio delle proprietà meccaniche del piano inclinato fu fatto la prima volta da Stevino (1548-1620) ed in un modo del tutto originale. Se un peso giace (fig. 18) sopra una tavola orizzontale, il principio di simmetria, di cui si è già fatto uso, fa subito vedere che havvi equilibrio. Lungo un muro verticale invece la caduta non viene impedita in *nessun modo*. Quindi il piano inclinato sembrerebbe come un caso intermedio fra questi due casi estremi. L'equilibrio non sussisterà comesul sostegno orizzontale, ma la caduta è in qualche modo diminuita, come senel caso del muro verticale il peso, che cade, avesse da vincere lo sforzo di un contrappeso minore di esso. Gli antichi investigatori incontrarono grandissime difficoltà a discernere la leggestatica, che spiega questo fenomeno.

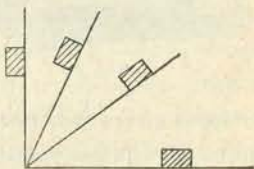



Fig. 18.

Il processo di Stevino è in sostanza il seguente: immagina un prisma triangolare cogli spigoli laterali orizzontali; la figura 19

rappresenta una sua sezione ABC. Per fissare le idee si prenda AC orizzontale ed AB = 2BC. Su questo prisma Stevino fa passare un filo senza fine, portante 14 palle equidistanti ed equibariche, che vantaggiosamente possono essere sostituite da una catena omogenea chiusa. Questa catena sarà o no in equilibrio. Supponiamo che non sia in equilibrio; se essa si muove non muta nelle sue condizioni; onde, una volta principiato il moto, esso deve continuare indefinitivamente; così si avrebbe un corpo in moto

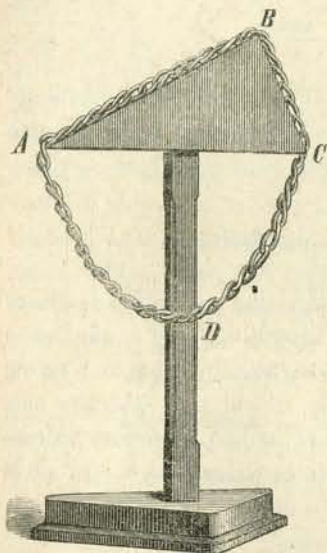
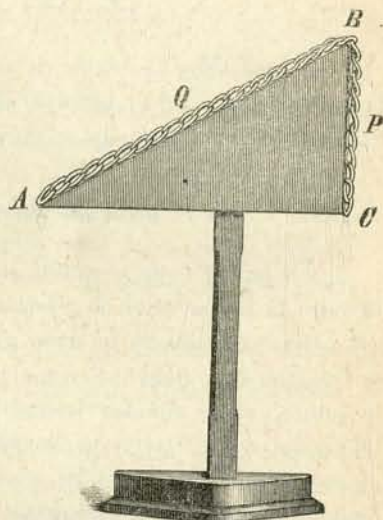



Fig. 19. *Fig. 20.*

perpetuo, ciò che Stevino considera come assurdo. Quindi è possibile solo il primo caso: la catena è in equilibrio. Perciò senza alterare l'equilibrio si può sopprimere la parte simmetrica ADC della catena; la parte rimanente è divisa in due pezzi AB e BC, che si fanno fra loro equilibrio. Da ciò consegue che sui piani inclinati della stessa altezza, pesi uguali agiscono in ragione inversa della lunghezza dei piani.

Nella sezione retta del prisma della figura 20, AC è orizzontale, BC è verticale ed è AB = 2BC; inoltre, essendo P e Q

i pesi delle parti di catena AB e BC, essi sono proporzionali alle lunghezze su cui giacciono; onde si avrà:

$$\frac{P}{Q}=\frac{AB}{BC}=2.$$

La generalizzazione è per se stessa evidente.

2. Indubbiamente questa ipotesi, da cui parte Stevino, cioè che la catena chiusa non si muove, contiene evidentemente solo una cognizione *meramente istintiva*. Egli si accorse subito, e noi con lui, di non avere mai osservato, nè veduto nulla che assomigliasse ad un moto di questo genere, e che nulla di simile esistesse in natura. Questa convinzione ha una *potenza logica* così grande, da ammettere senza obbiezioni la legge di equilibrio sul piano inclinato, che ne è una conseguenza; mentre invece questa legge sembrerebbe dubbia, se fosse presentata come un risultato dell'esperienza diretta, ovvero esposta in un altro modo. In ciò non havvi nulla di sorprendente, quando riflettiamo che ogni risultato sperimentale è oscurato, alterato da circostanze estranee (l'attrito, ecc.); ed ogni congettura che se ne trae rispetto alle circostanze determinanti può così trovarsi errata. Il fatto che Stevino attribuisce maggior valore ad una conoscenza istintiva di questa specie che ad una sua osservazione semplice, chiara e diretta, può sorprenderci, se noi stessi non proviamo questo sentimento. Quindi la domanda che ci si presenta da se stessa, consiste nel sapere donde viene questo valore maggiore. Per rispondervi bisogna ricordarsi che il bisogno della dimostrazione scientifica e la critica scientifica generalmente sono una conseguenza del riconoscimento della fallibilità dell'investigatore. Ora noi sentiamo chiaramente che la conoscenza istintiva si è formata senza che noi abbiamo *in nulla* contribuito su essa *personalmente*, che essa è indipendente da ogni partecipazione volontaria da parte *nostra*. Noi così non abbiamo alcuna diffidenza sulla nostra propria interpretazione soggettiva dei fatti osservati.

La deduzione di Stevino è uno dei più preziosi documenti che possediamo sulla storia primitiva della meccanica, e getta

una vivida luce sul processo di formazione della scienza, sull'origine della conoscenza istintiva. Rammentiamo ancora che Archimede possedeva esattamente la stessa tendenza di Stevino, ma la seguì con molto meno fortuna. Anche in epoche posteriori le conoscenze istintive furono ancora spesso il punto di partenza delle ricerche. Ogni sperimentatore può giornalmente osservare sopra se stesso in qual modo egli è guidato da esse; e quando giunge a formulare in un modo astratto ciò che esse contengono, egli ha generalmente realizzato un gran progresso scientifico.

Non havvi alcun errore nel processo di Stevino; e se ne contenesse uno, esso sarebbe comune a noi tutti. Infatti la caratteristica evidente dei grandi investigatori è precisamente questa unione di un istinto fortissimo e di una grandissima potenza d'astrazione. Questo modo di vedere non conduce per nulla a fare dell'istinto nella scienza un nuovo misticismo e neppure a ritenerlo come infallibile, allorchè facili esperienze possono farlo apparire in difetto. Ogni conoscenza istintiva, fosse anche di una forza logica sì grande come il principio di simmetria, impiegato da Archimede, può trarci in errore. Molti lettori forse si ricorderanno l'emozione intellettuale che provarono, quando per la prima volta fu loro detto che l'ago calamitato, collocato nel meridiano magnetico, veniva deviato in una determinata direzione fuori di esso da una corrente elettrica, condotta da un filo metallico posto parallelamente al di sopra di esso. La conoscenza istintiva è tanto soggetta all'errore quanto la conoscenza chiaramente acquisita; insomma essa non ha valore se non in quei campi che ci sono assai familiari.

Ora ci rimane a ricercare l'origine delle conoscenze istintive e ad analizzare il loro contenuto. Ciò che si osserva nella natura s'imprime *incompreso* ed *inanalizzato* nelle nostre rappresentazioni, e queste poi imitano i fenomeni nei loro tratti caratteristici più sorprendenti e più generali. Queste esperienze accumulate per noi costituiscono un tesoro, che abbiamo sempre tra mani, e solo una piccolissima parte di esso è contenuta nella

serie delle nostre idee distinte chiaramente; il fatto cioè che noi possiamo farne uso più facilmente della natura stessa, ed il fatto che esse sono in un certo senso scevre di subbiettività, conferiscono ad esse un grandissimo valore. Una delle caratteristiche della conoscenza istintiva è di essere principalmente di una natura negativa. Ciò che a noi è possibile non è già di predire ciò che avverrà, ma solamente di dire le cose che non possono avvenire; poichè solo quest'ultime contrastano fortemente contro la massa oscura delle esperienze, nella quale non si può discernere il fatto isolato.

Attribuendo ciascuno alla conoscenza istintiva un gran valore euristico, il punto di vista, in cui ci siam posti, non ci permette di limitarci alla constatazione della sua autorità. Occorre al contrario che ricerchiamo le condizioni, che hanno dato luogo al suo sviluppo. Allora troviamo ordinariamente che quello *stesso* principio, per conferma del quale siam ricorsi alla conoscenza istintiva, costituisce alla sua volta *la condizione fondamentale* dell'origine di questa conoscenza; e ciò è del tutto ovvio e naturale. La conoscenza istintiva ci conduce al principio che la spiega, e che alla sua volta è anche corroborato dalla esistenza di questa conoscenza, la quale per se stessa è già un fatto. Un attento esame dimostra che si verifica precisamente tutto ciò nel caso di Stevino.

3. Le deduzioni di Stevino ci sembrano di un altissimo valore intellettuale, poichè il risultato, cui egli arriva, evidentemente contiene più dell'ipotesi, da cui egli prende le mosse. Mentre da una parte questo risultato s'impone per evitare una contraddizione, dall'altra lascia in noi come il bisogno di un esame più approfondito. Se Stevino avesse chiaramente spiegato il fenomeno sotto tutti i suoi aspetti, come fece Galileo più tardi, la sua teoria ci apparirebbe meno ingegnosa, ma l'idea che ci faremmo del fenomeno riuscirebbe assai più chiara e più soddisfacente. In sostanza tutto è già contenuto nel fatto della catena chiusa, che non scorre sul prisma. Si può asserire che la catena non iscorre, perchè il suo movimento non produce al-

cuna caduta di corpi pesanti; ma si osserva pertanto che se la catena si muove, parecchi suoi anelli discendono, mentre gli altri salgono. Dunque bisogna dire con maggior precisione che la catena non scorre, perchè in questo movimento una discesa qualsiasi di un corpo pesante trae seco una salita eguale di un corpo dello stesso peso ad una salita di metà altezza di un corpo di peso doppio. Questa proposizione era ben nota a Stevino, che l'ha enunciata e che se ne è servito nella sua teoria della puleggia; ma è manifesto che egli non si peritava di affermare direttamente e senza un appoggio anteriore, la validità di questa legge nel caso del piano inclinato; ora se questa legge non fosse generale, la conoscenza istintiva, di cui si fa uso nel caso della catena senza fine, non si sarebbe potuta mai stabilire. La spiegazione che si cerca, così la si avrebbe compiuta. Il fatto che Stevino nelle sue deduzioni non siasi spinto troppo lungi e siasi accontentato di mettere d'accordo le sue concezioni (trovate indirettamente) col suo pensiero istintivo, ora non ci deve più meravigliare.

Si può ancora riguardare in un altro modo la teoria di Stevino. Poichè si ha la ferma convinzione istintiva che la catena chiusa pesante non gira, i casi speciali, facili a scegliersi quantitativamente, i quali considera Stevino, si presentano siccome tante esperienze particolari. D'altronde non è necessario che l'esperienza sia o no effettivamente realizzata, poichè il risultato non è dubbio. Inoltre Stevino esperimenta col pensiero ed i suoi risultati si sarebbero potuti dedurre mediante esperienze corrispondenti fisicamente realizzate, in cui l'attrito fosse stato ridotto quanto era possibile. La teoria della leva data da Archimede si poteva anche esporre secondo il metodo di Galileo. La realizzazione fisica delle esperienze eseguite con la mente permise di dedurre con perfetto rigore la legge mediante la quale il momento dipende linearmente dalla distanza dell'asse. La meccanica ci offrirà ancora tra i più grandi investigatori numerosi esempi di questi adattamenti “ a titolo di prova „ delle concezioni quantitative particolari ad un'impressione istintiva

generale. Questo stesso procedimento si riscontra in generale in tutte le scienze (1); ed è ad esso che si devono i progressi scientifici più importanti e più notevoli. Questo metodo, che è seguìto da tutti i grandi investigatori, e che consiste nel mettere in armonia le rappresentazioni particolari con la concezione generale, che uno si fa di una categoria di fenomeni, e di considerare sempre il tutto nel caso di ciascun fatto speciale, può essere qualificato come un procedimento veramente filosofico. In ogni scienza il metodo filosofico consisterà sempre nel mettere d'accordo i risultati ottenuti con le nozioni generali più fondate e più solide. Solo in questo modo si potranno impedire le eccessive usurpazioni della filosofia, e distruggere le pretese di certe mostruose teorie speciali.

Val la pena di esaminare i punti di accordo e di discrepanza fra il cammino del pensiero di Stevino e quello di Archimede. Entrambi prendono per punto di partenza la conoscenza istintiva. Stevino già possiede la concezione *generalissima* di una catena chiusa, pesante, facilmente movibile e di *forma qualunque*, che rimane in riposo. Si può assai facilmente inferirne la spiegazione di casi *particolari* quantitativamente semplici e facili da essere subito compresi. Archimede parte dal caso *più particolare* che si può immaginare, da cui è impossibile dedurre rigorosamente l'andamento del fenomeno nelle condizioni *più generali*. Con tutto ciò pare ch'egli riuscisse in questa deduzione, ma ciò deriva dal fatto che uno possiede precedentemente la conoscenza del caso più generale. Veramente anche Stevino conosceva precedentemente il risultato che cercava, o almeno all'incirca; ma il suo metodo gli permise di trovarlo direttamente. Una relazione statica, rinvenuta così con un metodo di questa specie, ha maggior valore del risultato di una esperienza di misura, che è sempre affetta da errore. Ma tale errore aumenta con le circostanze perturbatrici come l'attrito e scompare con esse. Il rapporto statico esatto non si può ottenere che

(1) Cfr. al riguardo il mio lavoro *Principien der Wärmelehre*, pag. 151.

mettendosi in circostanze *ideali* e *facendo astrazione* dalle cause perturbatrici. Così il procedimento di Stevino e di Archimede sembrerebbe come un'*ipotesi* senza la quale si metterebbero immediatamente in contraddizione logica fra loro i fatti isolati fornitici dall'esperienza. È ora per la prima volta che possiamo

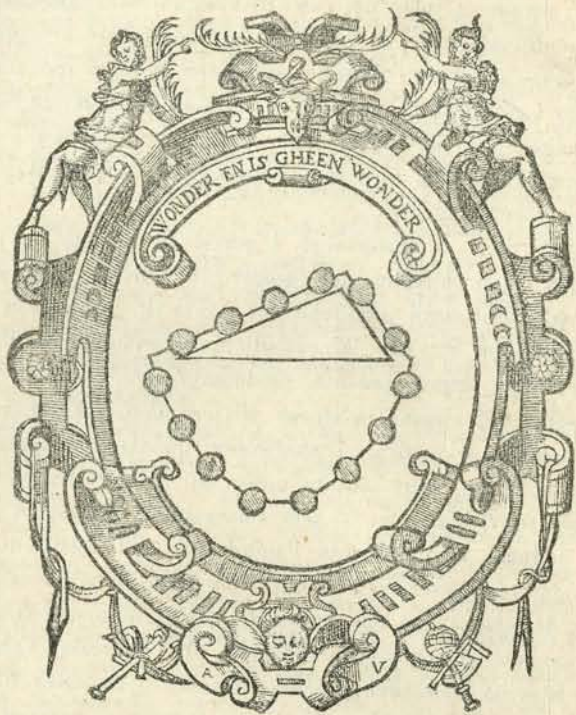



Fig. 21.

dominare logicamente e scientificamente i fatti e ricostruirli mediante concetti esatti, la cui disposizione è per così dire spontanea. La leva ed il piano inclinato sono in meccanica degli oggetti ideali, come i triangoli sono oggetti ideali nella geometria. Questi oggetti ideali sono i soli, che possono compiutamente soddisfare le condizioni che abbiamo *imposto* ad essi. La leva fisica non soddisfa a queste condizioni solo in quanto essa si

accosta alla leva ideale. L'investigatore della natura si sforza di *adattare* la sua *idea* alla realtà.

Stevino così rese a se stesso ed ai suoi lettori il servigio di coordinare nozioni differenti, le une chiaramente note, le altre istintive, e di collegarle fra loro, conciliandole in modo che esse si avvalorino a vicenda. Un piccolo fatto fa vedere quanto questo metodo consolidi i concetti di Stevino stesso: in principio della sua opera *Hypomnemata mathematica* (Leida 1605) egli pose la figura del prisma, che regge la catenella contornata dalla scritta " *Wonder en is gheen Wonder*, „ (una meraviglia che non è una meraviglia). Nulla di più esatto di questa riflessione; ogni lampo di progresso scientifico provoca una specie di disillusione; noi riconosciamo che una cosa che c'era parsa meravigliosa, non lo è maggiormente di altre, di cui noi abbiamo una conoscenza istintiva, e che noi riteniamo per se stesse evidenti. Noi vediamo che il contrario sarebbe infinitamente più meraviglioso, e che lo stesso fatto si riproduce in tutti i casi. Il problema che era stato posto perde ogni carattere d'incognito; esso scompare e non è più che un ricordo storico.

4. Dopo che Stevino ebbe scoperto il principio del piano inclinato, gli fu facile servirsene per la spiegazione delle altre maccchine semplici.

Ecco, ad esempio, una delle applicazioni che egli ne fece: sopra un piano inclinato (fig. 22) supponiamo un peso Q trattenuto da un filo che passa sopra una puleggia A ed è teso da un contrappeso P. Come più tardi Galileo, così Stevino osservò che non è necessario che il peso Q si trovi sopra un piano inclinato. Il rapporto tra la forza ed il peso rimane costante, soltanto quando il genere di moto resti invariato. Noi possiamo quindi supporre che il peso Q sia trattenuto da un filo perpen-

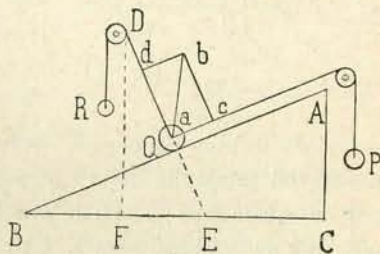



Fig. 22.

dicolare al piano inclinato, che passi su una puleggia D, e che sostenga da ultimo il peso R; la qual cosa viene a formare un vero e proprio poligono funicolare. Onde si determina agevolmente la frazione di peso che tende a provocare la discesa del corpo. Infatti prendendo un segmento verticale *ab* in direzione contraria al peso Q, ed abbassando le perpendicolari *db*, *bc* si avrà:

$$\frac{P}{Q} = \frac{AC}{AB} = \frac{ac}{ab};$$

ac rappresenta così la tensione del filo *a*A. Si può rovesciare col pensiero la funzione dei due fili e supporre che il peso Q poggi sul piano inclinato DEF disegnato in punteggiatura. Analogamente si troverà che *ad* rappresenta la tensione R del secondo filo. Per questa via indiretta Stevino giunse a conoscere i rapporti statici nel poligono funicolare ed al principio del parallelogramma delle forze, ma solamente nel caso speciale, in cui i fili (o forze) *ac* ed *ad* siano perpendicolari.

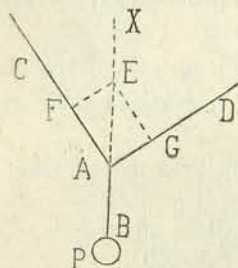
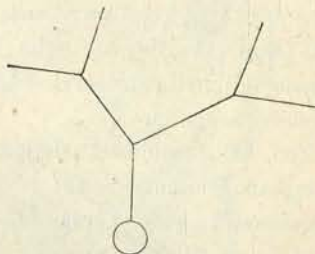



Fig. 23. *Fig. 24.*

Senza dubbio Stevino si serve ulteriormente della forma generale del principio della composizione delle forze, ma la via per la quale egli vi arriva non è del tutto chiara ed anzi si può dire ancora assai oscura. Egli considera, per esempio, il caso di tre fili AB, AC, AD, tesi sotto angoli qualunque, ed il primo di essi sorregge un peso P. Si può allora determinare le tensioni prendendo nel prolungamento (fig. 23) AX di AB un segmento AE e conducendo per E le rette EF ed EG rispettiva-

mente parallele ad AD e ad AC. Le tensioni dei fili AB, AC, AD stanno fra loro come i segmenti AE, AF, AG.

Con l'aiuto di questa costruzione egli potè risolvere problemi già assai complicati, per esempio la determinazione delle tensioni in un sistema ramificato di fili, analogo a quello della figura 24. Questa determinazione risulta immediatamente dalla tensione data dal filo verticale.

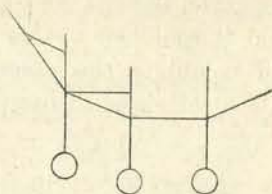



Fig. 25.

La stessa costruzione darà ancora, come fa vedere la figura 25, il rapporto delle tensioni dei fili di un poligono funicolare.

Si possono quindi spiegare le altre macchine semplici tanto col principio del piano inclinato, quanto con quello della leva.

III. *Il principio della composizione delle forze.*

1. Il teorema del parallelogramma delle forze, cui arrivò Stevino e del quale fece uso senza però enunciarlo formalmente, come si sa è il seguente:

A due forze (fig. 26) applicate ad un corpo A, le cui direzioni sono quelle delle rette AB ed AC e le cui intensità sono proporzionali ai seguenti rettilinei AB ed AC, si può sostituire una sola forza diretta secondo la diagonale AD del parallelogramma ABCD e la cui intensità è proporzionale alla sua lunghezza.

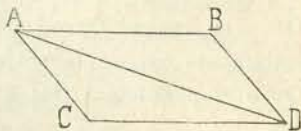



Fig. 26.

Si suppongano ad esempio due pesi proporzionali alle lunghezze AB ed AC, che tirino due fili disposti secondo queste rette; essi si potranno sostituire con un solo peso proporzionale ad AD ed avente pure la direzione di AD. Le forze AB ed AC si dicono componenti, AD la loro risultante. Si comprende agevolmente che per converso ad una sola forza si può sempre sostituire due o parecchie altre forze.

2. Partendo dalle ricerche di Stevino si cercherà di far vedere come si sia potuto arrivare al teorema generale del parallelogramma delle forze. Si supporrà noto (indirettamente) il rapporto, dato da Stevino, di due forze perpendicolari fra loro, cui fa equilibrio una terza forza. Ora supponiamo tre trazioni in equilibrio, che agiscano secondo i tre fili (fig. 27) Ox, Oy, Oz e cerchiamo di determinarle. Ciascuna di esse faccia equilibrio alle altre due. Per il principio di Stevino si sostituisca alla trazione Oy le due trazioni rettangolari, l'una secondo Ou (prolungamento di Ox), l'altra secondo la perpendicolare Ov alla prima. Si scomponga nello stesso modo la tra zione Oz secondo Ou ed Ow. La somma delle trazioni secondo Ou deve fare equilibrio alla trazione Ox, mentre le trazioni secondo Ov ed Ow devono distruggersi. Queste ultime devono perciò essere eguali ed opposte; le si rappresentino coi seguenti Om ed On; e così si determinano ad un tempo le componenti Op ed Oq secondo Ou e le trazioni Or ed Os. La somma $Op + Oq$ è uguale e direttamente opposta alla trazione Ox. Si conduca *st* parallela a Oy o *rt* parallela a Oz; queste due parallele determinano un segmento $Ot = Op + Oq$; d'onde abbiamo il teorema generaledel parallelogramma delle forze.

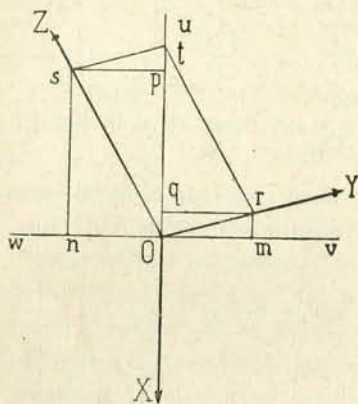
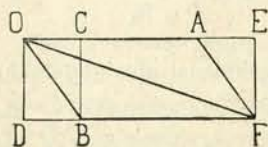



Fig. 27.

Fig. 28.

Il caso generale della composizione delle forze si può dedurre ancora in un altro modo dalla composizione speciale di due forze rettangolari. Abbiansi le due forze OA ed OB (fig. 28) applicate al punto O. Si sostituisca ad OB una forza OC parallela ad OA ed una forza OD perpendicolare ad essa, e le due forze

OA ed OB sono allora sostituite dalla OE = OA + OC e dalla OD; la loro risultante OF è ad un tempo la diagonale del parallelogramma OAFB costruito su OA ed OB come lati.

3. Il teorema del parallelogramma delle forze ha il carattere di ciò, che è stato scoperto indirettamente, quando vi si giunge col metodo di Stevino. Esso si presenta come conseguenza e conclusione di fatti noti; si vede solo che esso *sussiste*, ma non si vede il *perchè* esso sussista, cioè non si può (come in dinamica) ridurlo a proposizioni ancora più semplici. Nella statica fu Varignon il primo a dare a questo teorema il suo vero significato, dopo che la dinamica, che conduce direttamente ad essa, ebbe fatto sufficienti progressi da poterla ammettere senza difficoltà. Il principio del parallelogramma delle forze per la prima volta fu chiaramente annunciato da Newton nei suoi: “ *Principia Philosophiae naturalis* „. Lo stesso anno, ed indipendentemente da Newton, pure Varignon l'aveva enunciato in una Memoria, presentata all'Accademia di Parigi, ma fu pubblicata solo dopo la morte dell'autore. In questa Memoria Varignon aveva fatto molte applicazioni pratiche, fondandosi sul teorema geometrico seguente (1): Quando da un punto (fig. 29) m del piano di un parallelogramma (in questo caso è fuori del parallelogramma) si conducono le perpendicolari u, v e w rispettivamente sui lati p, q e sulla sua diagonale r di esso, si ha:

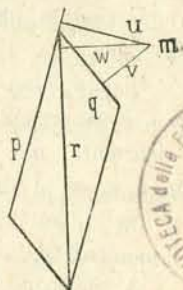



Fig. 29.

$$p \cdot u + q \cdot v = r \cdot w.$$

La dimostrazione di questo teorema è semplicissima. Si congiunga m alle estremità della diagonale e dei lati; si hanno così dei triangoli, le cui superficie sono i semi-prodotti $p.\ u$, $p.\ v$ ed

(1) Nello stesso anno 1687 il padre Bernardo Lami pubblicò una piccola appendice al suo *Traité de Méchanique*, sviluppando lo stesso principio.

$r.w$. Quando il punto m (fig. 30) è dentro il parallelogramma il teorema si significa mediante l'eguaglianza:

$$p.u - q.v = r.w.$$

Infine se il punto m è sulla diagonale, la lunghezza della perpendicolare w è nulla e si ha:

$$p.u - q.v = o \quad \text{ossia} \quad p.u = q.v$$

L'osservazione, che le forze siano proporzionali ai moti che esse producono in tempi eguali, fornì il mezzo a Varignon di dedurre senza difficoltà la composizione delle forze dalla composizione dei moti. Le forze, che agiscono sopra un punto e rappresentate in grandezza e direzione dai lati di un parallelogramma, possono essere sostituite da una forza unica che viene rappresentata nello stesso modo dalla diagonale del parallelogramma.

Si supponga ora che nei parallelogrammi delle fig. 29 e 30 p e q rappresentino le forze simultanee (componenti) e r la forza (risultante) che può essere sostituita; quindi i prodotti $p.u$, $q.v$, $r.w$ si dicono i momenti delle forze p, q, r rispetto al punto m. Se il punto m giace sulla direzione della risultante, i momenti $p.u$ e q,v delle componenti sono eguali.

4. Mediante questo teorema Varignon è ora in grado di dare

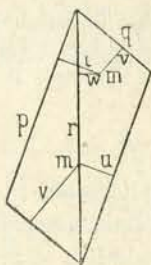
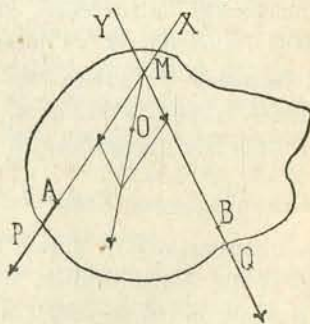



Fig. 30. *Fig. 31.*

la teoria delle macchine assai più semplicemente dei suoi predecessori. Infatti si prenda per esempio un solido (fig. 31) mobile intorno ad un asse passante per O. Si conduca per questo punto

il piano perpendicolare all'asse e si applichino nei due punti A e B di questo asse due forze P e Q, che giacciono nel piano condotto. Si ammetta come Varignon che l'effetto delle forze non cambi, quando si sposta il loro punto di applicazione nella loro direzione, poichè tutti i punti del corpo sono invariabilmente connessi fra loro e si trasmettono scambievolmente le pressioni o le trazioni. Dunque si possono applicare le forze P e Q in punti qualunque delle rette AX e BY e quindi nel loro punto d'intersezione M. Si costruisca un parallelogramma colle due forze trasportate in M e sostituiamo ad esse la loro risultante, la cui azione è la sola necessaria da considerare. Se questa forza è applicata ad un punto che può muoversi, non havvi equilibrio; ma se essa coincide coll'asse o passa pel punto O, che è fisso, non si può avere alcun movimento, quindi esiste l'equilibrio. In quest'ultimo caso il punto O è un punto della risultante; e se si abbassa da questo punto le perpendicolari u e v sopra le direzioni delle forze p e q, il teorema or ora esposto dà:

$$p \cdot u = q \cdot v .$$

Così si è ottenuta la legge della leva dal teorema del parallelogramma delle forze.

Varignon spiega nello stesso modo altri casi di equilibrio coll'annullare l'effetto della risultante dovuta ad ostacoli qualunque. Così ad esempio esiste l'equilibrio nel piano inclinato, quando la risultante è perpendicolare al piano. Varignon fonda effettivamente tutta la statica su una base dinamica; per lui la statica è un caso particolare della dinamica. Nella sua mente primeggia sempre il problema generale dinamico e volontariamente egli limita la sua ricerca al caso dell'equilibrio. Dunque qui siamo dinanzi ad una statica dinamica, la cui creazioue era possibile solo in seguito alle ricerche di Galileo.

Si può ancora aggiungere che si debbono a Varignon gran parte dei teoremi e delle considerazioni, che si trovano nei trattati moderni di meccanica elementare.

5. Come si è già veduto, considerazioni anche puramente statiche, possono condurre al principio del parallelogramma delle

forze. Nei casi speciali infatti la verificazione di questo principio è semplicissima. Si vede subito, ad esempio, che un numero qualunque di forze eguali e d'intensità qualunque (trazioni o pressioni) applicate nello stesso punto, che agiscono in un medesimo piano e formano fra loro angoli uguali, sono in equilibrio. Supponiamo per esempio (fig. 32) tre forze uguali OA, OB, OC, che facciano tra loro angoli uguali di 120°, e siano applicate nel punto O; una qualunque di tali forze fa equilibrio alle altre due. La risultante di OA ed OB è quindi eguale ed opposta (in direzione) ad OC; perciò essa è rappresentata da OD che è la diagonale del parallelogramma costituito con OA ed OB, come si vede dalla fig. 32.

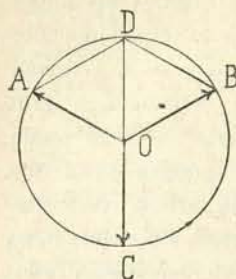



Fig. 32.

6. Due forze, che agiscono nella stessa direzione o in direzione opposta, hanno una risultante uguale alla loro somma od alla loro differenza. Queste due proposizioni non sono altro che casi particolari del parallelogramma delle forze.

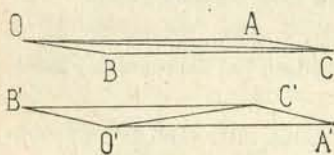



Fig. 33.

Infatti facciamo nella fig. 33 tendere a zero l'angolo AOB e l'angolo A′O′B′ a 180°; si hà:

$$\lim OC = O'A' + AC = OA + OB,$$
$$\text{e} \lim O'C' = O'A' - A'C' = O'A' - O'B'.$$

Il principio del parallelogramma delle forze comprende dunque anche questi due teoremi, che generalmente si espongono in precedenza come casi distinti.

7. Il carattere sperimentale del principio del parallelogramma emerge chiaramente dalla forma che gli hanno dato Newton e Varignon. La costruzione della risultante è allora basata sul fatto, che due forze applicate ad un punto gli comunicano due moti diversi, le cui accelerazioni sono ad esse proporzionali; precisa-

mente su questo fatto è basata la costruzione del parallelogramma delle forze.

Daniele Bernoulli opinava che il principio del parallelogramma fosse una verità *geometrica* (indipendentemente da ogni esperienza fisica); così tentò dimostrarlo colla geometria; ora noi studieremo questa dimostrazione nelle sue linee principali, poichè il modo di vedere di Bernoulli non è ancora intieramente tramontato.

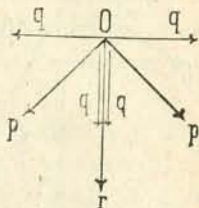



Fig. 34.

Bernoulli considera innanzi tutto due forze eguali e perpendicolari fra loro, applicate ad uno stesso punto; per il principio di simmetria la loro risultante è diretta secondo la bisettrice dell'angolo che esse fanno; quindi ora rimane da determinare la sua grandezza geometrica r. A tal uopo si decomponga ciascuna delle forze (fig. 34) eguali p in due forze q, l'una parallela, l'altra perpendicolare ad r. Il rapporto delle intensità di p e q è allora eguale a quello delle intensità di r e p; si ha dunque:

$$p = \mu . q \quad , \quad r = \mu . p \,;$$

e quindi:

$$r = \mu^2 . q \,.$$

Ma le due forze perpendicolari ad r si distruggono; quindi le sole due forze parallele ad r compongono la risultante e si ha:

$$r = 2\, q \,;$$

e perciò:

$$\mu = \sqrt{2} \quad , \quad r = p\sqrt{2} \,.$$

Quindi la grandezza della risultante è rappresentata dalla diagonale del quadrato costituita col lato p.

Con un procedimento analogo si determinava la grandezza della risultante di due forze disuguali perpendicolari fra loro; ma in questo caso non havvi più nulla che determini a *priori* la

direzione di essa. Se decomponiamo le componenti (fig. 35) p e q secondo u e v e v, t rispettivamente parallele e perpendicolari alla direzione ignota della risultante r, le nuove forze u ed s, t e v fanno colle componenti p e q gli stessi angoli che formano p e q con r; d'onde abbiamo i rapporti delle grandezze:

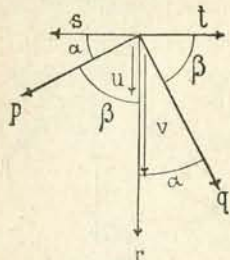



Fig. 35.

$$\frac{r}{p} = \frac{p}{u} \quad \text{e} \quad \frac{r}{q} = \frac{q}{v},$$

$$\frac{r}{q} = \frac{p}{s} \quad , \quad \frac{r}{p} = \frac{q}{t};$$

dalle due ultime proporzioni abbiamo:

$$s = t = \frac{pq}{r}.$$

Ma d'altra parte si ha:

$$r = u + v = \frac{p^2}{r} + \frac{q^2}{r},$$

ossia:

$$r^2 = p^2 + q^2.$$

Quindi la diagonale del rettangolo costruito su p e q dà la grandezza della risultante.

Perciò si è fin qui determinato: per un rombo la *direzione* della risultante, per un rettangolo la *grandezza* di essa, e per un quadrato la direzione e la grandezza di essa. Bernoulli allora risolve il problema di sostituire due forze eguali, che agiscano sotto un dato angolo, con due altre forze eguali, che agiscano sotto un angolo differente; ed infine giunge al teorema generale mediante considerazioni assai intricate, che non sono intieramente esenti da obbiezioni dal punto di vista matematico e che in seguito Poisson ha migliorate.

8. Ora consideriamo la questione dal punto di vista fisico. Bernoulli conosceva antecedentemente come un fatto sperimentale il teorema che egli voleva stabilire. Il suo procedimento consiste nel supporre d'*ignorare completamente* ciò che si voleva dimostrare e di cercare di dedurlo logicamente dal minor numero possibile di ipotesi. Tutto ciò è ben lungi dall'essere inutile e privo

di significato; invece con questo processo si constata quanto siano minime ed impercettibili le *esperienze* che già conducono al teorema. Solo è importante di non indurre se stesso in errore, come fece Bernoulli; innanzi tutto dobbiamo tenere davanti alla mente *tutte* le ipotesi, e di non lasciarsi sfuggire nessuna delle esperienze, delle quali si potrebbe aver fatto involontariamente uso. Ora esaminiamo quali siano le ipotesi tacitamente ammesse nella dimostrazione di Bernoulli.

9. La statica conosce, sul principio, la forza solo come pressione o come trazione, che sempre ed in ogni circostanza può essere sostituita dalla pressione o dalla trazione prodotta da un peso. Tutte le forze possono essere considerate come grandezze della *stessa specie*, misurabili con pesi. L'esperienza c'insegna inoltre che l'azione determinante l'equilibrio od il moto di una forza non dipende solo dalla sua *grandezza*, ma anche dalla sua *direzione*, e che questa direzione è data da quella del moto iniziale o da quella di un filo teso o da altra circostanza analoga. Di altre cose forniteci dalla esperienza fisica, come la temperatura ed il potenziale, possiamo assegnare la grandezza, ma non la direzione. Il sapere che le circostanze determinanti una forza applicata in un punto sono la sua grandezza e la sua direzione, è un'esperienza impercettibile, ma già importantissima. Pel fatto che l'intensità e la direzione di una forza applicata ad un punto sono le sue *sole* determinanti, ne consegue che due forze uguali e direttamente opposte si fanno equilibrio, poichè esse non possono fornire che una determinazione *unica* di moto. Per la stessa ragione è impossibile che una forza determini *in una sola maniera* un moto in una direzione perpendicolare alla sua direzione. Quando la forza è obliqua (fig. 36) alla retta ss', essa potrà determinare un moto secondo quest'ultima; ma l'*esperienza* soltanto può renderci edotti che il moto è determinato secondo $s's$ e non secondo ss', cioè secondo il lato

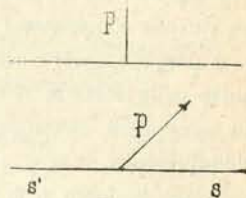



Fig. 36.

dell'angolo *acuto* o nella direzione della *proiezione* della forza sulla retta.

Bernoulli fa uso di quest'ultima esperienza. Essa è indispensabile per la determinazione del *senso* della risultante delle due forze eguali e perpendicolari fra loro. Il principio di simmetria richiede che la risultante sia nel *piano* delle forze e diretta secondo la *bisettrice* del loro angolo, ma non secondo la bisettrice dell'angolo *acuto*. Ora se non si tien conto di quest'ultima determinazione, tutta intiera la dimostrazione diviene impossibile.

10. Noi in questo modo abbiamo acquistato la convinzione che *solo* l'esperienza ci fa conoscere l'effetto della *direzione* di una forza; onde siamo meno inclinati a credere che possiamo conoscere il *modo* di questa influenza per altra *via*. È impossibile indovinare che una forza p, che fa con una retta s un angolo a, agisca secondo questa retta come una forza $p \, . \cos a$ nella direzione della s; questa proposizione è equivalente al parallelogramma delle forze; ed il Bernoulli non poteva mai più immaginarla; egli peraltro si serve, invero, in un modo assai recondito, di esperienze, che contengono già questa proposizione matematica.

È necessario che la composizione e la scomposizione delle forze siano già divenute *familiari*, affinchè si sappia che sotto *ogni* rapporto ed in *ogni* direzione più forze, applicate nello stesso punto, possono essere sempre sostituite, rispetto al loro effetto, da una *sola* forza. La dimostrazione di Bernoulli si fonda su questa conoscenza: in essa si suppone, infatti, che le forze p e q possano essere assolutamente e rispetto al loro effetto sostituite colle forze s, u e t, v, tanto nella direzione di r, quanto in ogni altra direzione. Similmente in essa si considera r come l'equivalente di p e q; e vi si ammette che è lo stesso: 1° di valutare le forze s, t, u, v secondo le direzioni p e q, e quindi p e q secondo la direzione r, ovvero: 2° di valutare direttamente le forze s, t, u, v secondo la direzione r. Ora queste conoscenze richieggono già un'esperienza grandissima rispetto alla composizione ed alla scomposizione delle forze; il mezzo più facile per

acquistarle e per sapere che l'effetto di una forza p, secondo una retta facente un angolo a colla sua direzione, è dato da $p \cos a$; e *precisamente* è in questo modo che si acquista questa conoscenza.

Si considerino le forze complanari concorrenti P, P′, P″...., le quali facciano gli angoli a, a', a''..... colla direzione X.

Queste forze sono equivalenti ad un'unica forza H, che fa un angolo μ colla forza X; supponendo conosciuto il principio di proiezione si ha:

$$\Sigma P \cos a = H \cos \mu .$$

Nella ipotesi che H rimanga l'equivalente del sistema di forze, qualunque sia la direzione di X, facendo ruotare la forza H di un angolo δ, si ottiene:

$$\Sigma P \cos (a + \delta) = H \cos (\mu + \delta),$$

ossia:

$$(\Sigma P \cos a - H \cos \mu) \cos \delta - (\Sigma P \operatorname{sen} a - H \operatorname{sen} \mu) \operatorname{sen} \delta = 0;$$

facciamo:

$$\Sigma P \cos a - H \cos \mu = A$$

$$(- \Sigma P \operatorname{sen} a - H \operatorname{sen} \mu) = B,$$

$$\operatorname{tau} \tau = \frac{B}{A},$$

si ha:

$$A \cos \delta + B \operatorname{sen} \delta = \sqrt{A^2 + B^2} \, . \operatorname{sen} (\delta + \tau) = 0;$$

affinchè questa equazione sussista *qualunque sia* δ, basta che si abbia:

$$A = \Sigma P \cos a - H \cos \mu = 0, \quad - B = \Sigma P \operatorname{sen} a - H \operatorname{sen} \mu = 0;$$

da cui risultano per H e μ i valori ben determinati:

$$H = \sqrt{(\Sigma P \cos a)^2 + (\Sigma P \operatorname{sen} a)^2},$$

$$\tan \mu = \frac{\Sigma P \operatorname{sen} a}{\Sigma P \cos a}.$$

Perciò se ammettiamo che l'azione di una forza secondo una data direzione sia misurata dalla sua *proiezione* su questa, allora si può con tutto rigore sostituire ad un sistema qualunque di

forze, applicate in uno stesso punto, una forza *unica* di intensità e di direzione *determinate*. Però la dimostrazione precedente non è più possibile, allorchè si sostituisca a cos a una funzione qualunque $\varphi(a)$ dell'angolo a. Se si sostituisce a cos a una funzione incognita $\varphi(a)$ e si ammette l'*unica determinazione* della risultante, si può dimostrare, come ha fatto Poisson, che la funzione φ è la funzione *coseno*.

L'esperienza che più forze concorrenti possano sempre e sotto ogni rapporto essere sostituite con una forza unica è perciò, dal *punto di vista matematico, equivalente* al principio del parallelogramma delle forze od al principio di proiezione. Ma è assai più facile di acquistare mediante l'osservazione il principio del parallelogramma o di proiezione di quello che non sarebbe di acquistare, per mezzo di osservazioni statiche, l'esperienza più generale, di cui abbiamo or ora parlato. Infatti il principio del parallelogramma è quello, cui siamo giunti prima. Bisognerebbe possedere una sagacità quasi sovrannaturale per poter dedurre matematicamente, senza la scorta di qualunque ulteriore conoscenza delle reali condizioni della questione, il principio del parallelogramma delle forze dalla possibilità generale di sostituire più forze note con una forza *sola*. Onde si può fare alla dimostrazione di Bernoulli la critica, che essa trasgredisce all'economia della scienza deducendo ciò, che si può più facilmente osservare, da quello che è più difficile di osservare. Inoltre Bernoulli erra quando ritiene che il suo punto di partenza non presupponga alcuna osservazione.

Inoltre bisogna osservare che l'*indipendenza reciproca* delle forze è una verità sperimentale, contenuta nel principio della loro composizione, della quale Bernoulli fa uso continuo, ma tacitamente. Nell'ipotesi di una dipendenza reciproca tale, che permetta di considerare solo sistemi regolari o simmetrici di forze eguali, ciascuna di esse può essere influenzata dalle altre solo nello stesso modo. Ma ad esempio lo studio di un sistema di tre forze, di cui le due prime siano simmetriche rispetto alla terza, già presenta grandi difficoltà.

11. Una volta che si è arrivati, direttamente od indirettamente, al principio del parallelogramma delle forze, una volta che esso è stato *scoperto,* questo principio si presenta come un'osservazione altrettanto giusta quanto qualunque altra; ma avendo il difetto di esser nuova, non ispira evidentemente la stessa sicurezza delle osservazioni antiche, ripetutamente verificate. Allora si cerca di convalidarla mediante le antiche osservazioni, dimostrando il loro accordo. Così a poco a poco questa osservazione diviene uguale ad esse, nè sarà più necessario d'ora in poi ridurla continuamente alle altre. Una deduzione di questa specie è utile solo quando le osservazioni, che difficilmente si acquistano direttamente, si possono ridurre ad altre, che si ottengono più facilmente e più semplicemente, come avviene ad esempio in dinamica nello stabilire il principio del parallelogramma delle forze.

12. Sono stati costruiti diversi apparecchi per verificare sperimentalmente il teorema del parallelogramma delle forze.

Ricorderemo l'apparecchio di Varignon, che è veramente pratico (figura 37); esso consta di un disco circolare orizzontale, il cui centro è segnato con una punta, e sul cui bordo graduato si possono fissare in punti qualunque tre piccole pulegge r, r', r'', per le quali passano tre fili $f, f' f''$, che partono da uno stesso nodo, e possono essere tesi da tre pesi p, p', p''.

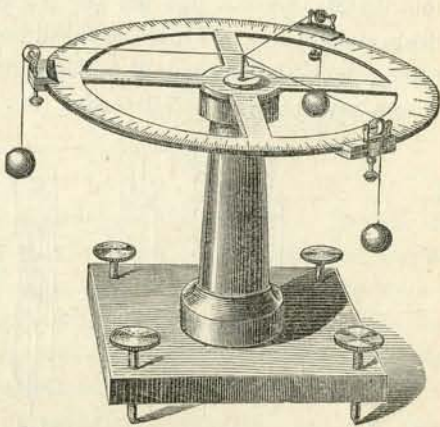



Fig. 37.

Ad esempio si osserva, che se i pesi sospesi ai fili sono eguali; e se le pulegge sono poste nelle divisioni 0°, 120°, 240°, il nodo comune dei fili è nel centro del disco. Onde tre forze,

che facciano fra loro un angolo di 120°, sono in equilibrio. Per verificare un tal principio in casi meno particolari, si può procedere così: immaginiamo due forze qualunque p e q (fig. 38), che

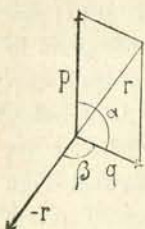



Fig. 38.

facciano un angolo qualunque α, e rappresentiamole con segmenti rettilinei. Su essi costruiamo il parallelogramma, e tracciamo unaforza eguale e contraria ($-r$) alla risultante r. Le tre forze $p, q, -r$, agendo secondo gli angoli forniti dalla costruzione, si faranno adunque equilibrio. Ora collochiamo le pulegge del cerchio graduato nei punti di divisione o, α ed $\alpha + \beta$, ed attacchiamo ai fili appositi i pesi p, q, r; allora si osserva che il nodo va a collocarsi nel centro del cerchio.

IV. *Principio delle velocità virtuali.*

1. Ora passiamo a parlare del principio degli spostamenti virtuali (possibili). La verità di questo principio fu dapprima notata da *Stevino* alla fine del XVI° secolo nelle ricerche sull'equilibrio delle pulegge e dei sistemi di pulegge. Stevino incomincia collo studio dei sistemi di pulegge col metodo che si segue ancora presentemente. Nel caso a (fig. 39) esiste l'equilibrio per

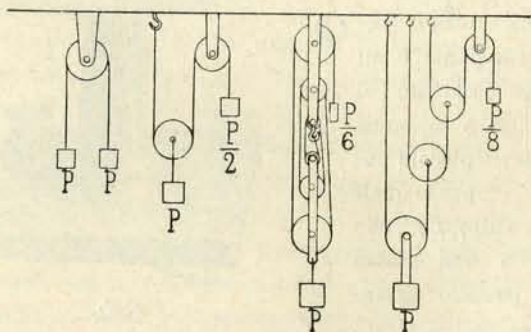



Fig. 39.

la ragione già nota, quando pesi eguali P agiscono dalle du parti. Nel sistema b il peso P agisce su due fili paralleli, ciascuno

de' quali regge quindi un peso eguale a $\frac{1}{2}$ P; onde per l'equilibrio occorre che un peso $\frac{1}{2}$. P sia sospeso all'estremità libera del filo. Nel sistema *c* il peso P è sospeso a sei fili; quindi per l'equilibrio bisogna sospendere il peso $\frac{1}{6}$. P all'estremità del filo. Il sistema *d* è la taglia di Archimede; P agisce su due fili, ciascuno de' quali regge un peso $\frac{1}{2}$. P; ma uno di questi fili agisce nello stesso modo sopra altre due e così via, talchè l'equilibrio viene mantenuto da un peso eguale ad $\frac{1}{8}$. P. Ora se a ciascuno di questi sistemi di pulegge si dà uno spostamento tale che il peso P discenda di un'altezza *h*, si vede subito che mediante la disposizione delle corde:

in *a*,	il contrappeso	P	sale all'altezza	*h*
„ *b*	„	$\frac{1}{2}$. P	„ „	2 . *h*
„ *c*	„	$\frac{1}{6}$. P	„ „	6 . *h*
„ *d*	„	$\frac{1}{8}$. P	„ „	8 . *h*.

Perciò in un sistema di pulegge in equilibrio i prodotti di ciascuno dei pesi per le grandezze dei loro spostamenti rispettivi sono eguali (" Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic potentia patientis ad potentiam agentis „. Stevino, *Hypomnemata*, t. IV, lib. 3, p. 172). Questa osservazione contiene il germe del principio degli spostamenti virtuali.

2. Galileo riconobbe la validità del principio in un altro caso, a proposito di ricerche fatte sopra il piano inclinato, ma ne trova già una forma un po' più generale. Sopra un piano inclinato (fig. 40), la cui lunghezza AB è uguale al doppio dell'altezza BC, è posto un peso Q; questo peso è mantenuto in equilibrio da un altro

peso $P = \frac{1}{2} . Q$, che agisce secondo l'altezza BC. Se si mette l'apparecchio in movimento, il peso $P = \frac{1}{2} . Q$ discende dell'altezza h, mentre Q percorre la stessa distanza h lungo il piano inclinato. Da questo esperimento Galileo concluse che l'equilibrio non è determinato solo dai pesi, ma anche dai loro *possibili avvicinamenti ed allontanamenti dal centro della terra*. Nel nostro caso, quando $P = \frac{1}{2} . Q$ discende di h, il peso Q sale di h lungo il piano inclinato, ma la sua salita verticale non è che di $\frac{1}{2} h$; e si trova che i prodotti $\frac{1}{2} Q . h$ e $Q . \frac{1}{2} h$ sono eguali da ambo le parti. Assai difficilmente si riuscirebbe a comprendere come l'osservazione di Galileo possa apportare luce sulla questione; essa è così naturale e spontanea che ognuno l'accetta senza difficoltà alcuna. Nulla può sembrare più semplice del non vedere alcun movimento prodursi in un sistema di corpi pesanti, quando non possa cadere, in ultima analisi, nessuna massa pesante. Questa proposizione sembra istintivamente accettabile.

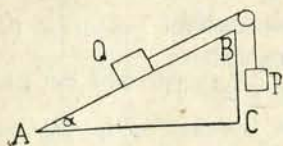



Fig. 40.

La concezione galileana del problema del piano inclinato sembra molto meno ingegnosa di quella di Stevino, ma essa in realtà è più naturale e più profonda. In ciò Galileo diede prova di possedere vera grandezza scientifica, poichè egli ebbe il *coraggio intellettuale* di vedere di più di quello che non abbiano veduto i suoi predecessori in un soggetto studiato molto tempo prima e di aver fiducia nell'osservazione propria. Si può aggiungere ancora che egli espone al lettore con la sincerità che gli è propria, ad un tempo la sua nuova concezione e la successione delle idee, che ve lo hanno guidato.

3. L'uso della notazione “del centro di gravità„ fornì il modo a Torricelli di porre il principio di Galileo sotto una forma più prossima ancora al nostro sentimento istintivo, forma che per

altro Galileo aveva anch'egli talvolta utilizzata. Secondo Torricelli una macchina è in equilibrio quando il centro di gravità dei pesi ad essa attaccati non può abbassarsi per qualunque spostamento che si dia ad essi. Così, ad esempio, in un piano inclinato il peso P discendendo per un'altezza h, fa salire verticalmente il peso Q di h sen a; ed affinchè il centro di gravità rimanga alla stessa altezza si deve avere:

$$\frac{P \,.\, h - Q \,.\, h \,.\, \text{sen}\, a}{P + Q} = 0,$$

ossia:

$$P \,.\, h - Q \,.\, h \,.\, \text{sen}\, a = 0;$$

da cui si ricava:

$$P = Q \,.\, \text{sen}\, a = Q \,.\, \frac{BC}{AB}.$$

Se il rapporto de' pesi fosse diverso, questo spostamento all'opposto abbasserebbe il centro di gravità, e quindi non vi sarebbe equilibrio. Noi ci ripromettiamo *istintivamente* l'equilibrio, quando in un sistema di corpi pesanti il centro di gravità non possa discendere; ma l'enunciato di Torricelli non contiene assolutamente niente di più di quello di Galileo.

4. È così facile dimostrare la validità del principio degli spostamenti virtuali per le altre macchine, come la leva, il verricello, ecc., che per i sistemi di pulegge e per il piano inclinato. Ad esempio consideriamo il verricello; si sa che esso è in equilibrio, quando fra i raggi P ed r ed i pesi P e Q havvi la relazione $P \,.\, R = Q \,.\, r$. Se il verricello ruota dell'angolo a, P discenderà circa $R \,.\, a$ e Q salirà circa $r \,.\, a$. Secondo la concezione di Stevino e Galileo, quando si ha l'equilibrio è $P . (Q . a) = Q . (r . a)$; la quale equazione esprime identicamente la stessa cosa della precedente.

5. Allorchè confrontiamo un sistema di corpi pesanti, che si pongono in movimento insieme ad un sistema in cui esiste l'equilibrio, si è condotti a chiedersi in che cosa consiste la differenza di questi due casi. Qual'è la causa determinante il

movimento o l'alterazione dell'equilibrio, che esiste nel primo caso e non nel secondo? Essendosi da se stesso posta una tale questione, Galileo riconobbe che i fattori che determinarono l'equilibrio non erano solo i pesi, ma anche le loro *altezze di caduta*, cioè le grandezze dei loro spostamenti misurati secondo la verticale.

Indichiamo con P, P′, P″..... i pesi di un sistema di corpi materiali, ed h, h', h''..... le altezze verticali corrispondenti di un sistema di spostamenti possibili simultaneamente, considerati positivamente verso il basso, negativamente verso l'alto; Galileo trovò che il criterio o la caratteristica dello stato di equilibrio è che sia verificata la condizione:

$$P \, . \, h + P' \, . \, h' + P'' \, . \, h'' + \ldots\ldots = 0.$$

La somma $P \, . \, h + P' \, . \, h' \, . + P'' \, . \, h'' + \ldots\ldots$ è la circostanza determinante l'alterazione dell'equilibrio, il fattore che determina il moto. Più tardi a questa somma fu dato il nome di *lavoro*, poichè la sua importanza richiedeva assolutamente una speciale denominazione.

6. Mentre nel confronto dei casi di equilibrio e di movimento gli antichi investigatori avevano diretto la loro attenzione sui pesi e sulle loro distanze dall'asse di rotazione e così avevano riconosciuto il *momento statico* come fattore determinante, Galileo fissò la sua attenzione sui pesi e sulle loro *altezze di caduta;* e riconobbe, che il *lavoro* è il fattore determinante il movimento o l'equilibrio. È evidente che non si può *imporre* all'investigatore *quel* criterio caratteristico di condizione di equilibrio, di cui si deve tener conto, allorchè se ne presentano parecchi alla sua scelta. Lo svolgimento scientifico ulteriore solo può decidere se egli abbia scelto giudiziosamente. Ma nella stessa guisa che non si può, come si è visto, riguardare il significato del momento statico come, una cosa indipendente dai dati sperimentali e suscettibile di una dimostrazione logica, così rispetto al lavoro non si può arrivare a qualsiasi deduzione di questa specie. Pascal cade in un errore, cui molti investigatori moderni

partecipano con lui quando, applicando il principio degli spostamenti virtuali alla teoria dei fluidi, dicono: “ Essendo evidente che è la stessa cosa far fare un pollice di cammino a cento libbre di acqua, che di far fare cento pollici di cammino ad una libbra di acqua..... „, poichè questa proposizione non è giustificata che quando il lavoro sia stato prima di tutto riconosciuto come *fattore determinante* il movimento o l'equilibrio; e questo ce lo può far conoscere solo l'esperienza.

In una leva a braccia eguali, caricata egualmente dalle due parti, l'equilibrio è il solo effetto ben determinato, sia che si considerino come fattori determinanti i pesi e le distanze, sia che si riguardino come tali i pesi e le altezze di caduta. Ma queste conoscenze sperimentali o altre analoghe devono necessariamente esistere prima di qualunque giudizio riguardo al fenomeno in questione. È ancora meno possibile giungere con una deduzione logica ad una *formula*, secondo la quale l'alterazione dell'equilibrio possa dipendere da circostanze date, cioè dal significato del momento statico P. L o del lavoro P. h, che stabilire a *priori* il semplice fatto di questa dipendenza.

7. Quando due forze eguali, i cui spostamenti possibili sono eguali ed opposti, agiscono l'una sull'altra, si riconosce subito l'esistenza dell'equilibrio. Possiamo proporci ora di ricondurre a questo caso semplice il caso generale dei pesi P e P′, capaci di spostamenti h ed h' tali, che sia P . h = P′. h'. Supponiamo ad esempio di avere i pesi (fig. 41) 3 . P e 4 . P, sospesi ad un verricello, i cui raggi siano 4 e 3. Dividiamo i pesi in parti eguali P, che indicheremo con a, b, c, d, e, f, g. Trasportiamo a, b, c al livello + 3 e d, e, f al livello — 3. I pesi per se stessi non produrranno questo spostamento, ma altresì non vi si opporranno. Indi portiamo simultaneamente al livello + 4 il peso a, già portato al livello 3, ed al livello — 1 il peso g, che

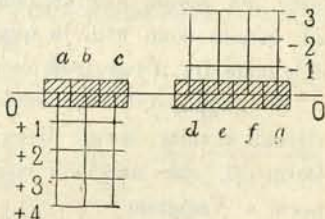



Fig. 41.

era rimasto al livello zero; poi portiamo parimenti b al livello $+4$ e g al livello -2; indi e al livello $+4$ e g al livello -3. In tutti questi spostamenti i pesi non intervengono nè come forze motrici, nè come resistenze. Alla fine a, b, c (o 3P) sono portate al livello $+4$, e d, c, f, g (o 4P) al livello -3. Perciò i pesi non contribuiscono o non si oppongono in tutto a questo trasporto; ciò equivale a dire che i pesi sono in equilibrio, quando i loro spostamenti sono in ragione inversa della loro intensità. L'equazione:

$$4 \,.\, 3P - 3 \,.\, 4P = 0$$

è perciò la caratteristica dell'equilibrio. La generalizzazione:

$$P \,.\, h - P' \,.\, h' = 0$$

è evidente.

Un esame più accurato però della discussione di questo caso mostra che questa conclusione non è possibile, se non si suppone l'*equivalenza dell'ordine* delle operazioni e quella delle vie di spostamento, cioè quando non si sa prima che il *lavoro* è il fattore determinante che si cerca; onde commettiamo, accettando la conclusione, lo stesso errore che ha commesso Archimede nella sua dimostrazione delle leggi della leva. Sarebbe evidentemente superfluo riprendere qui l'analisi particolareggiata che si è fatta più sopra. Aggiungiamo inoltre che le considerazioni di tal genere sono utili in quanto che esse mettono in evidenza il legame fra il caso semplice ed i casi generali.

8. L'applicabilità *generale* del principio degli spostamenti virtuali a tutti i casi di equilibrio fu riconosciuta da Giovanni Bernoulli, che nel 1717 comunicò con una lettera la sua scoperta a Varignon.

Abbiansi le forze P, P', P''..... applicate ai punti A, A', A''..... (fig. 42), cui si fanno subire gli spostamenti infinitamente piccoli qualunque v, v', v''....., compatibili coi legami fra loro dei punti (vale a dire virtuali); siano p, p', p''..... le proiezioni degli spostamenti sopra le direzioni delle forze, affette dal segno $+$ o dal segno $-$, secondo che esse hanno o no la stessa direzione

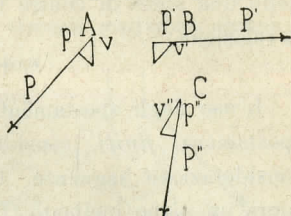
di queste forze. Sotto la sua forma più generale il principio degli spostamenti virtuali dice che si ha equilibrio quando:

$$P.p + P'.p' + P''.p'' + ... = 0,$$

o più brevemente:

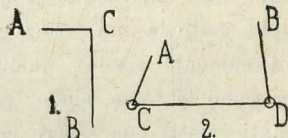
$$\Sigma P p = 0.$$

Fig. 42.

I prodotti $P.p$, $P'.p'$, $P''.p''$....., si dicono momenti o lavori virtuali delle forze; sono positivi o negativi secondo che l'angolo della forza e dello spostamento è acuto od ottuso.

9. Ora esaminiamo alcuni punti particolareggiatamente. Prima di Newton una forza era generalmente concepita come una trazione od una pressione prodotta da un peso, e tutte le ricerche di meccanica di quest'epoca non si occupano che dei corpi pesanti. Quando ai tempi di Newton si incominciò a generalizzare l'idea di forza, si potè subito ridurre al caso di forza qualunque tutti i principii meccanici stabiliti pei gravi. Si potè sostituire ad una forza qualunque la trazione esercitata da un peso sospeso ad un filo. In questo senso fu possibile applicare al caso generale di forze qualunque il principio degli spostamenti virtuali, che erano stati scoperti dapprima nel caso della gravità.

Si dicono spostamenti *virtuali* quegli spostamenti, che sono compatibili colla natura dei legami del sistema e fra di loro. Ad esempio si consideri un sistema di due punti A e B (fig. 43, 1) cui sono applicate due forze, ed essi sono collegati mediante una leva a braccio rettangolare mobile

Fig. 43.

intorno a C e tale che sia CB = 2 CA; gli spostamenti virtuali di B ed A saranno degli archi elementari di cerchio di centro C; gli spostamenti di B saranno sempre doppi di quelli di A e perpendicolari fra loro; se i punti A e B sono collegati da un filo di lunghezza (fig. 43,2) l, i quali passano attraverso due anelli fissi C

e D; allora si diranno virtuali tutti quegli spostamenti dei punti A e B, che lasceranno questi due punti dentro o sulla superficie delle due sfere di centro C e D, i cui raggi r_1 ed r_2 soddisfanno la relazione:

$$r_1 + r_2 + \text{CD} = l.$$

L'uso degli spostamenti *infinitamente piccoli,* invece degli spostamenti *finiti*, considerati da Galileo, è giustificato dalla considerazione seguente. Quando due pesi si fanno equilibrio sopra un piano inclinato (fig. 44), questo equilibrio non sarà disturbato, se si trasforma il piano inclinato in una superficie qualunque colà, ove non è in immediato contatto con i corpi considerati, che giacciono sopra di esso. La condizione essenziale consiste quindi nella possibilità istantanea di spostamento, nella conformazione istantanea del sistema. Per giudicare dell'equilibrio occorre in generale considerare solo gli spostamenti evanescenti; poichè altrimenti la conformazione del sistema si trasformerebbe spesso in una conformazione prossima intieramente differente, per la quale forse l'equilibrio non esisterebbe più.

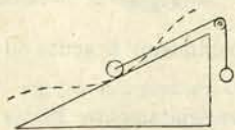



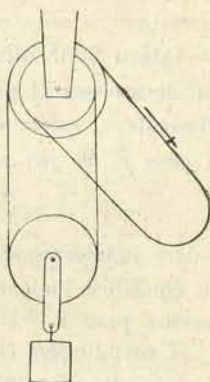
Fig. 44.

Galileo aveva già riconosciuto chiaramente, nel caso del piano inclinato, che gli spostamenti in generale non sono fattori determinanti che in quanto essi sono diretti *nel senso* delle forze, e che per conseguenza occorre considerare solo le loro *proiezioni* sulle direzioni di queste forze. Rispetto all'enunciato del principio, sotto la sua forma generale, si osserva che il problema è intieramente risolto, quando tutti i punti del sistema, su cui agiscono le forze, siano fra loro indipendenti. Ciascuno dei suoi punti infatti può essere in equilibrio solo nel caso, in cui esso sia mobile *nel senso* della forza. Il momento virtuale di ciascuno di tali punti in particolare deve perciò annullarsi. Se alcuni dei punti sono indipendenti fra loro, mentre altri hanno una certa dipendenza mediante i loro legami, la stessa osservazione si può fare pei primi punti; e per i secondi sussiste il teorema fondamentale trovato da Galileo, per cui la somma dei momenti

virtuali è nulla. Dunque la somma totale dei momenti virtuali di tutti i punti del sistema è ancora eguale a zero.

10. Ora cercheremo di far comprendere chiaramente il significato del principio degli spostamenti virtuali mediante alcuni esempi semplici, che non possono essere trattati coll'ordinario metodo della leva, del piano inclinato e di altri consimili.

Fig. 45.

La puleggia differenziale di Weston (fig. 45) consiste di due carrucole cilindriche coassiali, invariabilmente connesse fra loro, di raggi poco differenti r_1 e $r_2 < r_1$. Sopra queste carrucole passa una corda od una catena, come si vede nella figura. Si supponga che la forza P, che agisce nel senso indicato dalla freccia, faccia girare l'apparecchio di un angolo φ; il peso sospeso Q verrà così alquanto innalzato. Nel caso dell'equilibrio esisterà fra i due momenti virtuali l'equazione:

$$Q \, . \, \frac{r_1 - r_2}{2} \, . \, \varphi = P \, . \, r_1 \, . \, \varphi \, ,$$

da cui:

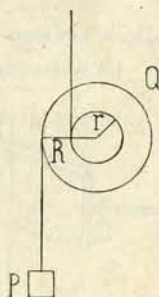
$$P \, . = Q \, . \, \frac{r_1 - r_2}{2 \, r_1} \, .$$

Ora consideriamo un verricello di peso Q (fig. 46); quando il peso V discende con lo svolgersi della corda, cui è attaccato, e che passa attorno la ruota, l'albero del verricello si avvolge alla corda verticale ed il verricello s'innalza. Nel caso dell'equilibrio i momenti virtuali soddisfanno l'equazione:

$$P \, (R - r) \, . \, \varphi = Q \, r \, \varphi \, ;$$

Fig. 46.

da cui:

$$P = \frac{Q \, r}{R - r} \, .$$

Nel caso particolare di $R - r = 0$, per l'equilibrio si richiede:

$$Q \cdot r = 0,$$

ossia per valori finiti di r è:

$$Q = 0.$$

Infatti il filo allora si comporta come se avesse un nodo, in cui si trovasse il peso Q, che, se è diverso da zero, può sempre discendere, spostando semplicemente il nodo, senza far muovere il peso P. Se per altro è $R = r$ e $Q = o$, allora abbiamo:

$$P = \frac{o}{o},$$

valore indeterminato; infatti non importa quale peso P tenga in equilibrio l'apparecchio, poichè per $R = r$, non può discendere nessun peso P.

Una puleggia (fig. 47) doppia di raggi r ed R giace sopra una tavola orizzontale; si tien conto dell'attrito; sul filo agiscono le forze P e Q. Rappresentiamo con P' l'attrito del piano, così si ha l'equilibrio, quando è:

Fig. 47.

$$P' = \frac{2R}{R - r} \cdot P,$$

Ma quando è:

$$P' < \frac{R + r}{R - r} \cdot P,$$

allora avviene che il filo si avvolge intorno alla puleggia.

La bilancia di Roberval consiste (fig. 48) di un parallelogramma mobile, due lati opposti del quale possono ruotare intorno ai punti di mezzo A e B; agli altri due lati, che son sempre verticali, son congiunte due verghe orizzontali; se sospendiamo a queste verghe pesi eguali, vi sarà equilibrio qualunque sia il punto di sospensione, poichè la discesa di uno dei pesi è uguale all'ascensione dell'altro per ogni spostamento del sistema.

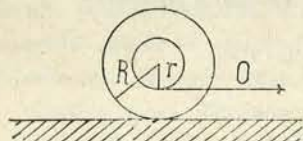
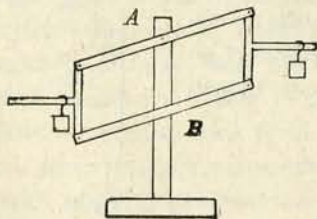



Fig. 48.

Tre fili, attaccati allo stesso punto O (fig. 49) e caricati di pesi eguali, passano per tre pulegge fisse A, B, C. Si vuol sapere per quale disposizione di fili si avrà equilibrio. Siano $OA = s_1$, $BO = s_2$, $CO = s_3$ le lunghezze dei fili. Per ottenere l'equazione di equilibrio diamo al punto O, secondo le direzioni s_2 ed s_3, gli spostamenti elementari (infinitesimi) δs_2 e δs_3; e poichè questi spostamenti sono arbitrari, così possiamo eseguire

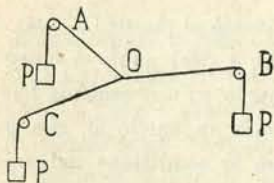
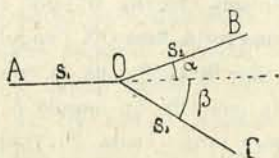



Fig. 49. *Fig. 50.*

qualsiasi spostamento del punto O nel piano ABC (fig. 50). La somma dei momenti virtuali è:

$$\left.\begin{array}{l} P\,\delta s_2 - P\,\delta s_2 \cos\alpha + P\,\delta s_2 . \cos(\alpha+\beta) \\ + P\,\delta_3 - P\,\delta s_3 \cos\beta + P\,\delta s_3 \cos(\alpha+\beta) \end{array}\right\} = 0,$$

ossia

$$[1 - \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)]\,\delta s_2 + [1 - \cos\beta + \cos(\alpha+\beta)]\,\delta s_3 = 0\,.$$

Gli spostamenti δs_1 e δs_2 essendo indipendenti fra loro, si possono fare successivamente eguali a zero; ciò che dà:

$$1 - \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0\,,\quad 1 - \cos\beta + \cos(\alpha+\beta) = 0\,,$$

da cui

$$\cos\alpha = \cos\beta\,;$$

a ciascuna di queste equazioni possiamo sostituire la seguente:

$$1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha = 0\,;$$

da cui

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\,;$$

e quindi:

$$\alpha + \beta = 120^{\circ}.$$

Onde nel caso di equilibrio ciascuno dei fili fa cogli altri un angolo di 120°. Per altro si vede *a priori* che le tre forze eguali si possono fare equilibrio solo in questa disposizione.

Ora rimane a determinare il punto O nel triangolo **ABC**; ma questo è un semplice problema di geometria, che si può risolvere facilmente in più modi. Si potranno, ad esempio, costruire su AB, BC ed AC i triangoli equilateri esternamente e descrivere i loro circoncerchi. Queste tre circonferenze hanno un punto comune d'intersezione, che sarà il punto O; ciò si dimostra subito mediante le ben note relazioni fra gli angoli al centro e gli archi dei centri corrispondenti.

Un'asta OA (fig. 51) può ruotare intorno al punto O; essa fa con una retta fissa OX l'angolo variabile α. Nel punto A è applicata una forza P, che fa con OX l'angolo γ; una seconda forza, che fa con OX un angolo β agisce sopra un anello Q, che può scorrere lungo l'asta. Si vuol conoscere la condizione dell'equilibrio. Si faccia ruotare l'asta di un angolo infinitamente piccolo; siano δs e δs_1 gli spostamenti elementari dei punti A e B perpendicolarmente ad OA, e sia δr lo spostamento elementare

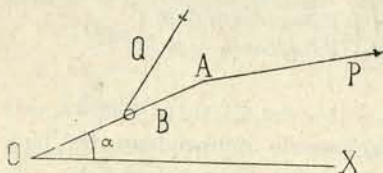
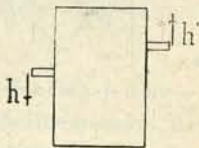



Fig. 51. *Fig. 52.*

dell'anello lungo l'asta. La distanza variabile OB indichiamola con r e sia OA $= a$. Nel caso di equilibrio avremo allora:

$$\mathrm{Q}\,\delta s \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + \mathrm{Q}\,\delta r \cos(\beta - \alpha) + \mathrm{P}\,\delta s_1 \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) = 0\,.$$

Lo spostamento δr non producendo alcun effetto sugli altri spostamenti, il momento virtuale, che gli corrisponde, deve essere nullo; e poichè la sua grandezza è arbitraria, si deve avere:

$$\mathrm{Q} \cos(\beta - \alpha) = 0\,;$$

e poichè è $\mathrm{Q} \neq 0$, sarà:

$$\beta - \alpha = 90^{\circ}.$$

La forza Q deve quindi essere normale all'asta. Onde si ha, osservando che è $\delta s_1 = \frac{a}{r} \delta s$:

$$r . Q \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + a P \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) = 0;$$

ed essendo: sen $(\beta - \alpha) = 1$, si ha:

$$r . Q + a . P \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) = 0 .$$

Quest'ultima equazione dà il rapporto delle due forze.

11. Un vantaggio che non bisogna perdere di vista, che è comune a tutti i principî generali, e quindi anche al principio degli spostamenti virtuali, consiste in ciò, che ci risparmia in gran parte la fatica di riflettere sopra ciascun caso particolare nuovo, che si può presentare. Possedendo questo ultimo principio possiamo ad esempio trascurare intieramente i particolari di una macchina. Supponiamo che una macchina, che per noi è nuova, sia racchiusa in una scatola (fig. 52), da cui non escano che due sporgenze, che servono di punti di applicazione alla potenza P ed al peso P'. Osservando gli spostamenti simultanei h ed h' di queste due braccia, se ne dedurrà immediatamente la condizione di equilibrio

$$P h - P h' = 0 ,$$

qualunque siano gli spostamenti del meccanismo. Un principio generale come questo possiede perciò un valore incontestabile di *economia*.

12. Ritorniamo ancora sull'enunciato generale del principio degli spostamenti virtuali, che occorre analizzare più a fondo. Si considerino le forze P, P', P''... applicate ai punti A, B, C,... e p, p', p''... siano le proiezioni degli spostamenti elementari dei punti di applicazione sulle direzioni delle forze; essendo questi spostamenti infinitesimi compatibili coi legami e fra loro, la condizione di equilibrio è:

$$P . p + P' . p' + P'' . p'' + . . . = 0 .$$

Se si sostituisce alle forze de' fili, passanti sulle pulegge ed aventi le direzioni di esse, cui si attaccano sin d'ora dei pesi convenienti, l'enunciato precedente esprimerà semplicemente che il *centro di gravità* del sistema formato da tutti questi pesi non può discendere. Se però per certi spostamenti dei punti di applicazione il centro di gravità potesse *salire,* il sistema ancora sarebbe in equilibrio, poichè i pesi, abbandonati a sè stessi, non prenderebbero questo movimento. In questo caso la somma data più sopra sarebbe allora negativa o minore di zero.

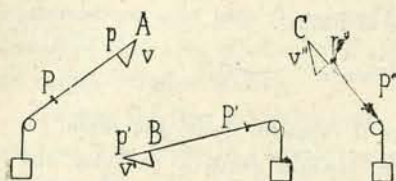



Fig. 53.

L'espressione generale della condizione di equilibrio è perciò:

$$P.p + P'.p' + P''.p'' + \ldots \overline{\leq} 0.$$

Quando ad ogni spostamento virtuale ne corrisponde un altro *eguale* ed *opposto* ad esso, come avviene ad esempio per le macchine semplici, allora bisogna prendere solo il segno superiore (=); dobbiamo limitarci al caso dell'eguaglianza. Perchè, se per certi spostamenti virtuali il centro di gravità potesse salire, la ipotesi della loro riversibilità richiederebbe che esso potesse anche discendere. Quindi ne consegue che l'innalzamento possibile del centro di gravità è in questo caso incompatibile coll'equilibrio.

La questione assume un aspetto diverso per altro quando gli spostamenti non sono tutti *riversibili.* Due corpi congiunti insieme mediante un filo flessibile possono avvicinarsi fra loro, ma non possono allontanarsi ad una distanza maggiore della lunghezza del filo. Un corpo può essere costretto a scorrere oppure a rotare sulla superficie di un altro corpo in modo che si possa allontanare, ma non possa penetrarlo. In questi casi quindi esistono spostamenti che non possono essere riversibili. Onde per certi spostamenti si può produrre un *innalzamento* del centro di gravità, senza che gli spostamenti opposti, che fa-

rebbero *abbassare* il centro di gravità, siano possibili. Perciò bisogna conservare la condizione generale di equilibrio e dire che la somma dei momenti virtuali deve essere *eguale* o *minore di zero*.

13. Lagrange nella sua *Mécanique analytique* ha dato una dimostrazione ingegnosa del principio degli spostamenti virtuali, che ora noi considereremo.

Abbiansi le forze P, P′, P″... applicate ai punti A, B, C.... (fig. 54); immaginiamo delle pulegge fissate nei punti A′, B′, C′... nella direzione delle forze in modo da formare una taglia su ciascuna linea d'azione. Ora supponiamo che le forze abbiano una comune misura $\frac{Q}{2}$, e che si possa fare;

$$2n.\frac{Q}{2}=P,$$

$$2n'.\frac{Q}{2}=P',$$

$$2n''.\frac{Q}{2}=P'', \text{ ecc.}$$

ove n, n', n''... sono numeri intieri. Inoltre si fissi l'estremità del filo alla puleggia A′; la si faccia passare n volte fra A′ ed A, poi da A′ a B′, indi n' volte fra B′ e B, poi da B′ a b',

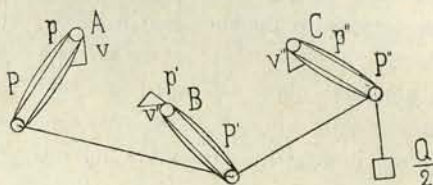



Fig. 54.

indi n'' volte fra b' e b, terminando in b'; infine si sospenda alla sua estremità rimasta libera il peso $\frac{Q}{2}$. Siccome il filo ha così in tutte le sue parti la tensione $\frac{Q}{2}$, si può sostituire, me-

diante questo sistema ideale, a tutte le forze date di un sistema un peso $\frac{Q}{2}$. Se ora per una conformazione data del sistema gli spostamenti virtuali (possibili) sono tali, che essi possono dar luogo ad una caduta del peso $\frac{Q}{2}$, il peso $\frac{Q}{2}$ cadrà realmente, provocando precisamente gli spostamenti che corrispondono a questa caduta e non vi sarà equilibrio. D'altra parte nessun movimento non incomincerà se tutti gli spostamenti lasciano il peso $\frac{Q}{2}$ immobile ovvero lo fanno salire. Si ottiene per l'espressione di questa condizione, dando il segno + alle proiezioni degli spostamenti virtuali nel senso delle forze, e tenendo conto del numero dei giri del filo in ciascuna singola taglia, la seguente:

$$2np + 2n'p' + 2n'p'' + \ldots \leqq 0 .$$

Ora questa condizione è equivalente alla:

$$2n . \frac{Q}{2} p + 2n' . \frac{Q}{2} p' + 2n'' \frac{Q}{2} p'' + \ldots \leqq 0 ,$$

ed infine:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots \leqq 0 .$$

14. Quantunque la supposizione (ideale) del sistema di pulegge sia alquanto estranea all'argomento, la dimostrazione di Lagrange ha veramente qualche cosa in sè che convince, poichè il movimento di un peso unico si *accosta più* alla nostra esperienza ed è più facile tener dietro al suo insieme che ai movimenti di un numero qualunque di pesi. Essa pertanto non *mostra* che il *lavoro* sia il fattor determinante dell'alterazione dell'equilibrio, invece l'applicazione del sistema di pulegge *presuppone* questa conoscenza.

Invero ciascuna delle taglie contiene già il fatto che è espresso e riconosciuto mediante il principio degli spostamenti virtuali. La sostituzione a tutte le forze del sistema *di un peso unico*, che fa lo stesso lavoro, presuppone che si conosca il significato del lavoro e non è ammissibile che in questa ipotesi. Il fatto,

che certi casi sono a noi più famiiiari e più immediati alla nostra esperienza, ci costringe ad accettarli senza analizzarli ed a prenderli come base di una dimostrazione senza renderci chiaramente conto del loro contenuto.

Spesso avviene nel corso dello svolgimento della scienza che un nuovo principio, che qualche investigatore scopre in un fenomeno, non sia immediatamente riconosciuto in tutta la sua generalità e non si renda subito familiare. Allora s'impiegano come ragionevoli e naturali tutti i mezzi, che possono aiutarlo a fargli acquistare il suo compiuto valore. Si ricorre per sostenere la nuova nozione ai fatti più disparati, nei quali l'investigatore ancora non ha ravvisato chiaramente il nuovo principio, benchè esso in realtà vi sia già contenuto, ma che gli sono familiari mediante altri punti di vista. La scienza giunta al *suo stato di maturità* non deve lasciarsi indurre in errore mediante tali processi. Quando in tutti i fatti osservati noi riscontriamo per tutto *in un modo perfettamente chiaro e sicuro* un principio, che non è *dimostrato*, ma di cui possiamo *constatare la esistenza*, approfondiamo assai più la concezione logica della natura, riconoscendo l'esistenza di questo principio, che lasciandoci imporre da una dimostrazione simile. Se la consideriamo da questo punto di vista, la dimostrazione di Lagrange si presenta sotto una luce tutta diversa, ma essa tuttavia si accaparrerà la nostra attenzione ed il nostro interessamento, e ci soddisferà rendendo sensibile la connessione fra i casi semplici e quelli complicati.

15. Maupertuis ha trovato un teorema interessante sull'equilibrio, che egli comunicò all'Accademia delle scienze di Parigi nel 1740 sotto il nome di: *Legge di riposo* (*Loi de repos*). Questo teorema fu studiato ulteriormente da Eulero nel 1751 nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino*. Quando si dànno ai punti di un sistema spostamenti virtuali infinitamente piccoli, allora corrisponde ad essi una somma di momenti virtuali:

$$P . p + P' . p' + P'' . p'' + ...$$

che si annulla nel caso di equilibrio.

Questa somma è il lavoro corrispondente agli spostamenti o piuttosto il lavoro elementare, poichè esso è infinitamente piccolo contemporaneamente a questi ultimi. Allorquando questi spostamenti si continuano fino a divenire finiti, allora s'aggiungono i lavori elementari e la loro somma dà il lavoro finito. Ad ogni passaggio di un sistema da una conformazione iniziale ad una finale qualunque corrisponde un certo lavoro fatto. Ora Maupertuis ha osservato semplicemente che questo lavoro effettuato è in generale un massimo od un minimo; allorchè la conformazione finale è una configurazione di equilibrio, cioè in altre parole, quando il sistema passa da una configurazione di equilibrio, il lavoro eseguito sarà minore o maggiore, prima e dopo l'equilibrio, che per la configurazione dell'equilibrio stesso. Per la configurazione di equilibrio si ha infatti:

$$\mathrm{P}p + \mathrm{P}'p' + \mathrm{P}''p'' + \ldots\ldots = o,$$

cioè che l'elemento del lavoro od il differenziale (più esattamente la variazione) del lavoro è uguale a zero. Si sa che una funzione ammette un massimo od un minimo generalmente quando il suo differenziale si annulla.

16. Mediante la fig. 55 ci possiamo fare un'idea chiarissima del significato del teorema di Maupertuis. Immaginiamo un sistema di forze sostituito da un sistema di pulegge di Lagrange col peso $\frac{\mathrm{Q}}{2}$. Dapprima supponiamo che ciascun punto del sistema si possa muovere solamente sopra una curva determinata, e che la posizione di uno di essi sulla traiettoria determini le posizioni degli altri punti. Le macchine semplici in generale costituiscono sistemi che soddisfanno a queste condizioni. Ora attacchiamo al peso $\frac{\mathrm{Q}}{2}$ una matita; mentre il sistema si sposta, il peso $\frac{\mathrm{Q}}{2}$ sale e scende; e se si fa scorrere mediante un moto orizzontale un foglio di carta davanti alla punta della matita, la combinazione del moto verticale della matita e del moto orizzontale della carta darà una curva come (fig. 55) *a b c d* ..... Quando la punta della

matita è in una dei punti *a, b, c* della curva si vede che ci sono posizioni vicine del sistema di punti, per le quali il peso $\frac{Q}{2}$ si trova più in basso o più in alto della configurazione data. Se

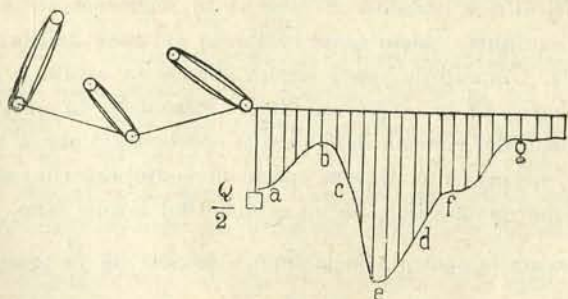



Fig. 55.

dunque il sistema è abbandonato a sè stesso, il peso discenderà ed il sistema si porrà in movimento. In questo caso perciò non vi sarà equilibrio. Se la punta della matita è in *e* il peso $\frac{Q}{2}$ si trova più in basso che per tutte le configurazioni vicine, ed il sistema abbandonato a sè stesso non cambierà la sua conformazione. Al contrario sarà invertito ogni spostamento in questa direzione a causa della tendenza del peso a muoversi verso il basso. *Un'altezza minima del peso ovvero un massimo del lavoro fatto nel sistema corrisponde dunque all'equilibrio stabile.* Se la matita si trova in *b*, ogni spostamento finito fa abbassare il peso $\frac{Q}{2}$, che allora continua da se stesso questo spostamento. Ma se lo spostamento è infinitamente piccolo, la matita si muove sulla tangente in *b*, che è orizzontale ed il peso non discende. Onde *un'altezza massima del peso* $\frac{Q}{2}$, *cioè un minimo del lavoro eseguito nel sistema, corrisponde all'equilibrio instabile.* Per altro si osserva che la reciproca non è vera, e che ogni posizione di equilibrio non corrisponde ad un massimo od un minimo del lavoro fatto. Ad esempio, se la matita si trova in *f*,

punto in cui la tangente è orizzontale e d'inflessione, uno spostamento infinitesimo non fa più discendere il peso. Vi è equilibrio, benchè il lavoro eseguito non sia nè massimo, nè minimo. Allora l'equilibrio dicesi *misto;* per certi spostamenti è stabile, per certi altri è instabile. Si può senza inconveniente considerare l'equilibrio misto come compreso nel caso dell'equilibrio instabile. L'equilibrio esiste ancora quando la matita è in g, in cui la curva ha un segmento finito orizzontale. In questa configurazione del sistema ogni piccolo spostamento non è nè continuato, nè invertito. Questa specie di equilibrio, cui non corrisponde nè un massimo, nè un minimo del lavoro fatto, si dice *indifferente* (o neutro). Se la curva descritta da $\frac{Q}{2}$ presenta un punto cuspidale o un punto di regresso verso l'alto, la configurazione che corrisponde a questo punto dà un minimo di lavoro fatto, ma non gli corrisponde nessuno equilibrio, nemmeno l'equilibrio instabile. Un punto analogo rivolto verso il basso dà un massimo di lavoro eseguito e l'equilibrio stabile; in questo ultimo caso la somma dei momenti virtuali non è uguale a zero, ma è negativa.

17. In ciò, che precede, si è supposto che il moto di un punto sopra la sua traiettoria determinasse il movimento degli altri punti sulle loro rispettive traiettorie. La mobilità del sistema sarà maggiore se, ad esempio, ciascuno dei punti si muove sopra una superficie data, ma in modo, che la posizione di un punto sulla sua superficie determini unicamente la posizione di tutti gli altri punti sulla loro superficie. In questo caso dunque bisognerà considerare la superficie invece della *curva* descritta da $\frac{Q}{2}$. Se ciascun punto può in modo analogo muoversi in uno spazio corrispondente, allora è impossibile rappresentare in un modo puramente geometrico il movimento di $\frac{Q}{2}$. Questa impossibilità è ancora maggiore quando la posizione di uno dei punti del sistema non determina in un sol modo la posizione

degli altri e che il grado di mobilità è ancora maggiore. In tutti questi casi la curva descritta (fig. 55) da $\frac{Q}{2}$ può servire come simbolo dei fenomeni da studiare, e in questi casi ritroveremo il teorema di Maupertuis.

Si è fin qui anche supposto che le forze agenti siano costanti (invariabili), indipendenti dalle posizioni dei punti del sistema. Ora facciamo l'ipotesi che le forze dipendano dalla posizione dei punti, ma non dal tempo; allora non si potrà più operare con semplici sistemi di pulegge, ma bisognerà immaginare apparecchi, che faranno variare con lo spostamento gli sforzi esercitati da $\frac{Q}{2}$; tuttavia il teorema sussiste. L'altezza della discesa del peso $\frac{Q}{2}$ misura sempre il lavoro fatto, che è sempre il medesimo per la stessa configurazione del sistema ed è indipendente dalla traiettoria di passaggio da uno stato ad un altro. Un apparecchio, per cui un peso costante potrebbe esercitare sforzi, che variano con lo spostamento, sarebbe, per esempio, costituito da un verricello, la cui ruota (fig. 56) non sia circolare. Tuttavia è inutile entrare nei particolari della dimostrazione, poichè sivede subito che sarebbe possibile di farlo.

Fig. 56.

18. Se si conosce la relazione che esiste fra il lavoro eseguito e la forza viva di un sistema, relazione stabilita dalla dinamica, si giunge facilmente a questo teorema, comunicato nel 1749 da Courtivron all'Accademia delle scienze di Parigi: " La forza viva di un sistema passa per un massimo (minimo), quando il sistema passa per una configurazione di equilibrio stabile (instabile), per cui il lavoro eseguito è massimo (minimo) „.

19. Il caso di un elissoide omogeneo, pesante, coi tre assi disuguali e che giace sopra un piano orizzontale, illustra assai bene le diverse specie di equilibrio. Quando l'elissoide si appoggia sulla estremità dell'asse minore, allora esso è in equi-

librio stabile, perchè qualunque spostamento fa innalzare il centro di gravità. Se si appoggia sull'estremità dell'asse maggiore l'equilibrio è instabile; ma se si appoggia sull'estremità dell'asse medio l'equilibrio è misto. Un esempio di equilibrio indifferente ci è dato da una sfera omogenea o da un cilindro omogeneo di rivoluzione, che giace in un piano orizzontale. La figura 57 rappresenta la traiettoria del centro di gravità di un cubo, che ruota in un piano orizzontale intorno ad uno dei suoi spigoli; la posizione *a* del centro di gravità corrisponde all'equilibrio stabile, e la posizione *b* all'equilibrio instabile.

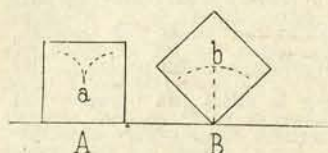



Fig. 57.

20. Ora consideriamo un esempio che a prima vista sembrerebbe assai complicato, ma il cui principio degli spostamenti virtuali dà una spiegazione immediata.

Giovanni e Giacomo Bernoulli passeggiando un dì a Basilea e discutendo su argomenti di matematica si posero la questione seguente: " Quale sia la forma che prende una catena sospesa liberamente per le sue due estremità „. Essi subito e facilmente videro che la forma di equilibrio della catena è quella, per cui il suo centro di gravità si trova nella posizione più bassa possibile. Infatti si comprende che sussiste l'equilibrio quando gli anelli della catena siano scesi nella posizione più bassa possibile, quando nessuno di essi non possa più discendere senza provocare, a causa dei legami, l'ascesa di una massa corrispondente ad un'altezza eguale o superiore. Allorchè il centro di gravità è disceso così basso quanto è possibile, quando tutto ciò, che poteva effettuarsi si è verificato, l'equilibrio stabile sussiste. Qui termina la parte *fisica* del problema. La determinazione della curva di lunghezza data fra i due punti A e B, ed il cui centro di gravità è ad una altezza minima, non è che una questione puramente *matematica* (fig. 58).

21. Uno sguardo al complesso della questione mostra che nel principio dei lavori virtuali si riscontra solo il riconoscimento di

un fatto, che ci era istintivamente familiare da tempo; ma che noi non intendevamo in un modo nè preciso, nè chiaro. Il fatto è questo: i corpi pesanti si muovono da sè stessi unicamente verso il basso. Se parecchi corpi pesanti sono legati fra loro in modo, che non possano spostarsi indipendentemente gli uni dagli altri, essi non si muoveranno che quando la massa pesante *nel suo insieme* sia capace di discendere, o ciò che il principio esprime con più precisione, adottando in modo più perfetto il pensiero ai fatti, col dire che havvi movimento sol quando può essere eseguito *un lavoro.* Se, estendendo la nozione di forza, si trasporta il principio alle forze oltre che a quelle dovute alla gravità, esso contiene ancora il riconoscimento del fatto, che i fenomeni naturali, di cui si tratta, procedono da se stessi unicamente *in un senso determinato* e non nel senso oppostoad essi. Precisamente

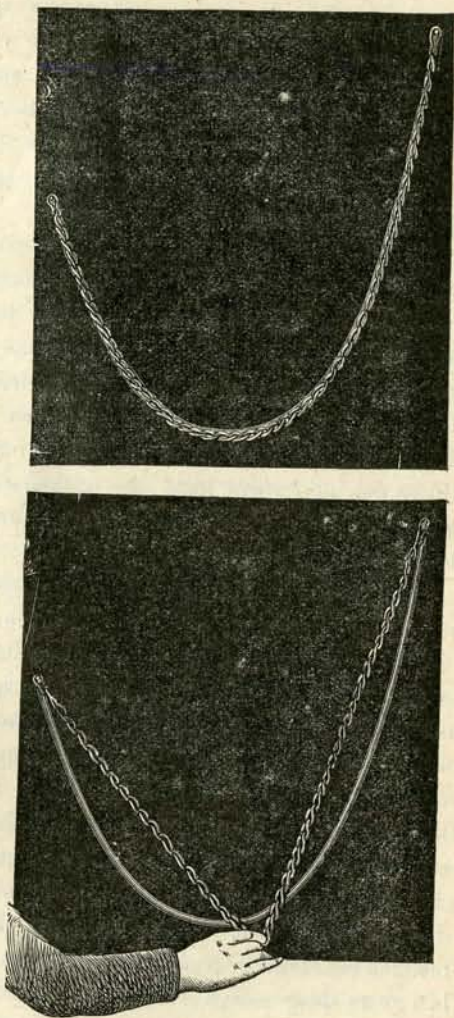



Fig. 58.

come i corpi pesanti cadono, così le differenze di temperatura e le differenze di stato elettrico non aumentano spontaneamente, ma al contrario *diminuiscono*, ecc. Se questi fenomeni sono legati fra loro in modo che non possono variare solo in opposti sensi, il principio allora stabilisce, con maggior precisione, che non può farlo la concezione istintiva, che il *lavoro* determina e provoca la direzione dei fenomeni. La equazione di equilibrio dataci dal principio può volgarmente esprimersi così: *Nulla accade quando nulla può avvenire.*

22. È importante rendersi chiaramente conto che trattasi semplicemente nel principio, di cui ci occupiamo, di constatare e stabilire un *fatto*. Se noi trascuriamo questo, sentiamo sempre una deficienza di rigore e cerchiamo una base che è impossibile trovare. Jacobi riporta nelle sue *Vorlesungen über Dynamik* (Lezioni sulla dinamica), che Gauss una volta aveva osservato che Lagrange non aveva dimostrato le sue equazioni di equilibrio, ma non aveva fatto che enunciarle storicamente. Questa opinione ci sembra vera in ciò, che riguarda anche il principio degli spostamenti virtuali.

Il compito dei primi investigatori, gettando le basi di una scienza, è intieramente diverso da quello dei loro successori. Il loro assunto consiste nel ricercare e nel constatare i fatti più importanti, e la storia ci insegna che questa bisogna richiede assai più intelligenza che ordinariamente non si creda. Quando siano dati una volta questi fatti più importanti, essi si possono mettere in effetto mediante i processi logici e deduttivi della fisica matematica, coordinarli, e far vedere che l'ammettere un *sol* fatto implica l'ammissione di una intiera serie di altri fatti, che non sono tutti visibili immediatamente nei primi. Queste due specie di compiti sono di una eguale importanza; ma non bisogna confonderli. Non si può dimostrare matematicamente che la natura deve essere, ciò che essa è; ma si può dimostrare che le proprietà osservate ne determinano una serie di altri, che spesso non sono direttamente manifesti.

Infine osserviamo che il principio degli spostamenti virtuali,

come ogni principio generale, trae seco, mediante la concezione che fornisce, alla sua volta la *disillusione* e la *chiarezza:* la prima in quanto che noi riconosciamo in essa solo fatti conosciuti da molto tempo e scoperti istintivamente; la seconda, perchè ci permette di ritrovare per tutto questi stessi fatti semplici attraverso relazioni più complicate.

V. *Esame complessivo dello svolgimento della statica.*

1. Ora che abbiamo successivamente passato in rivista ciascuno dei princìpî della statica in particolare, siamo in grado di fare un breve esame supplementare del complessivo sviluppo dei princìpî di questa scienza. La statica, che appartiene a quel periodo più antico della meccanica, il quale incomincia dall'antichità greca e termina coi tempi di Galileo e dei suoi più giovani contemporanei, ci porge un esempio illustrativo assai interessante del processo di formazione della scienza in generale. Tutti i metodi e le concezioni vi si incontrano sotto la loro forma più semplice e per così dire d'infanzia. Questi princìpî indicano chiaramente l'impronta della loro origine nelle esperienze delle arti manuali. La scienza deve la sua origine alla necessità di mettere queste esperienze sotto forma *comunicabile* e di estenderle al di là dei limiti del mestiere e della pratica professionale. Colui che raccoglie queste esperienze per conservarle negli scritti, si trova davanti un gran numero di fatti distinti o per lo meno considerati come tali. Il punto di vista, in cui si è posto, gli permette di esaminarli di nuovo più spesso, in ordini diversi e con un numero minore di idee preconcette. Nel suo pensiero e nei suoi scritti i fatti e le loro leggi si mettono in strette relazioni di tempo e di spazio, e così possono fare di nuovo emergere la loro connessione, il loro accordo e la loro graduale e reciproca trasformazione. Il desiderio di abbreviare e di semplificare la comunicazione agisce nello stesso senso; ed è così che per ragioni di economia un gran numero di fatti con le loro leggi si giunge a raccogliere e ad esprimere in un enunciato *unico.*

2. D'altra parte chi raccoglie così le esperienze si trova in circostanze favorevoli per notare nuovi aspetti delle cose, sui quali non era stata richiamata l'attenzione degli osservatori precedenti. È impossibile che una legge acquistata, mediante l'osservazione diretta, comprenda l'*insieme* del fatto nella sua infinita ricchezza, nella sua inesauribile complessività. Essa piuttosto fornisce un *abbozzo* del fatto, lo fa uscir di nuovo da uno dei suoi aspetti, ciò che è, d'altra parte, importante per lo scopo tecnico o scientifico che si ha in vista. Questi aspetti particolari, che si considerano in un fatto, dipendono tanto da circostanze accidentali, quanto dalla tendenza dello spirito dell'osservatore. Quindi sarà sempre possibile di scoprire nuovi aspetti del fatto, che condurranno a stabilire una nuova legge, equivalente o superiore all'antica. Così, ad esempio, nel caso della leva si sono date successivamente leggi diverse di equilibrio, secondo le circostanze che si consideravano come determinanti, e che furono in primo luogo i pesi e le lunghezze dei bracci della leva (*Archimede*); poi i pesi e le distanze delle linee di azione delle forze dall'asse (*Leonardo da Vinci* ed *Ubaldi*); indi i pesi e le grandezze dei loro spostamenti (*Galileo*); ed infine i pesi e le linee di trazione rispetto all'asse (*Varignon*).

3. Chi fa una nuova osservazione della specie di quelle, di cui si è parlato, e che stabilisce una nuova legge, sa generalmente che si può sbagliare, quando si cerca di costruire la *rappresentazione* di un fatto mentalmente a scopo di possedere questa immagine rappresentativa, come modello sempre a nostra disposizione per potercene servire, quando il fatto per se stesso è in tutto od in parte inaccessibile. Le circostanze, su cui si deve richiamare l'attenzione, sono accompagnate da tante circostanze accessorie, che spesso è difficile scegliere e considerare quali siano essenziali allo scopo che si prefigge; tali sono, per esempio, nelle macchine l'attrito, la rigidità delle corde, ecc., che turbano e cancellano la relazione esatta delle circostanze, che si studiano. Dunque è naturale che colui che scopre o vuole verificare una legge nuova dubiti di se stesso e cerchi una *dimo-*

strazione della legge, di cui egli aveva osservata la validità. Chi scopre o verifica una legge non confida subito intieramente in essa od almeno ne accetta solo una parte. Archimede, ad esempio, mette in dubbio il fatto che i pesi agiscano *proporzionalmente* ai bracci di leva; ma egli ammette senza esitazione il fatto di una *certa* influenza del braccio di leva; Daniele Bernoulli non mette in dubbio il fatto di una influenza qualunque della direzione della forza, ma solo la forma della sua influenza, ecc. Infatti è assai più facile osservare che una circostanza ha una *certa* influenza in un caso dato, che determinare *quale* è questa influenza. In questa ultima ricerca le probabilità di errore sono molto più grandi. Perciò la tattica dell'investigatore è ben fondata e perfettamente naturale.

La prova del rigore di una legge nuova si può fare mediante verificazione, constatando che la sua applicazione continua, sotto circostanze più disparate, la *mostri in armonia* con la esperienza. Questo processo si giustifica per se stesso nel *corso del tempo*. Ma chi ha fatto la scoperta vuol raggiungere più presto il suo scopo. Egli confronta le conseguenze della sua legge con tutte le esperienze che gli sono familiari; la paragona con tutte le leggi più antiche, spesso dimostrate, ed esamina se conduce ad alcuna contraddizione. In questo modo egli ripone la più grande autorità nelle esperienze più antiche e familiari, nelle leggi più spesso dimostrate. Fra queste esperienze le conoscenze *istintive*, generate senza personale partecipazione, unicamente dalla potenza dei fatti ed il loro cumulo che forzano l'opinione degli uomini, godono una autorità tutta speciale; e riconosceremo ancora che deve così avvenire, poichè qui cercasi precisamente di eliminare la tendenza soggettiva e l'errore personale dell'osservatore.

In questo modo Archimede *dimostra* la sua legge della leva, Stevino la sua legge del piano inclinato, Daniele Bernoulli il parallelogramma delle forze, Lagrange il principio degli spostamenti virtuali. Solo Galileo, in ciò che riguarda quest'ultimo principio, vede chiaramente che la sua nuova osservazione e la sua nuova percezione sono equivalenti ad ognuna delle *antiche*

— che esse derivano dalla *stessa* sorgente sperimentale di queste — e non tenta alcuna dimostrazione. Nella sua dimostrazione della legge della leva Archimede fa uso delle nozioni sul centro di gravità, che aveva potuto acquistare mediante l'ausilio del teorema stesso, che voleva dimostrare; ma che d'altra parte, probabilmente gli erano così familiari come vecchie esperienze, che egli non le metteva più in dubbio, e che è possibile che non si accorgesse in alcun modo dell'uso che egli ne faceva nella sua dimostrazione. Ma si è già parlato particolareggiatamente, nel capitolo precedente, degli elementi istintivi compresi nella dimostrazione di Archimede e di Stevino.

4. È generalmente di regola che quando si fa una nuova scoperta, uno si serva di tutti i mezzi che possono contribuire a dimostrare una legge nuova. Per altro quando, dopo un tempo più o meno lungo, questa legge è stata verificata direttamente un numero di volte abbastanza grande, è conforme allo spirito della scienza di riconoscere che un'altra prova è affatto inutile; che non vi è alcuna ragione per considerare una legge per meglio stabilita, poichè si fonda sopra altre leggi, che sono state ottenute identicamente con lo stesso metodo sperimentale, ma solamente un po' prima, e che due osservazioni fatte con la stessa circospezione ed anche entrambe sovente verificate, hanno lo stesso grado di validità. Oggi possiamo considerare il principio della leva, quello dei momenti statici, quello del piano inclinato, il parallelogramma delle forze, il principio degli spostamenti virtuali come scoperti mediante osservazioni *equivalenti*. *Presentemente* è di nessuna importanza che alcune di queste scoperte siano state fatte direttamente, altre seguendo vie indirette od anche in occasione di altre osservazioni. È meglio per l'economia del pensiero e per l'estetica della scienza *riconoscere* un principio — ad esempio il principio dei momenti statici — direttamente come la chiave per la comprensione di *tutti* i fatti di una stessa categoria e vedere chiaramente che *li comprende tutti*, che trovare necessaria una dimostrazione anticipata, zoppicante, rattoppata e fondata su proposizioni oscure, in cui sia già con-

tenuto il principio che si vuol dimostrare; ma che ci sono *per caso* precedentemente familiari. La scienza e l'individuo (in uno studio storico) possono impiegare *una volta* questo processo; ma dopo entrambi debbono porsi da un punto di vista più conveniente.

5. Infatti questa manìa di dimostrazione introduce nella scienza una specie di rigore *falso* ed *assurdo*. Alcune proposizioni sono ritenute per più che certe; esse sono considerate come la base necessaria ed incrollabile di altre proposizioni, quando in realtà non si annette ad esse che un grado di certezza al più eguale se non minore, e che non si consegue nemmeno il grado di certezza che la scienza *rigorosamente* esige. Si trovano spesso nei libri di testo esempî di questo falso rigore. Le dimostrazioni di Archimede hanno questo difetto, fatta astrazione del loro valore storico, ma l'esempio più notevole ci è dato da Daniele Bernoulli nella sua dimostrazione del parallelogramma delle forze (*Comment.*, Acad. Petrop. T. I).

6. Come si è già veduto, le conoscenze istintive posseggono una confidenza tutta speciale. Non sapendo più *come* esse siansi ottenute, non si può più criticare il modo col quale sono state acquistate. Non si è per nulla contribuito alla loro formazione. Esse ci si presentano con una potenza che non hanno mai i risultati delle nostre esperienze riflettive, volontarie, in cui si sente sempre il nostro intervento. Esse ci sembrano come cose libere di soggettività, estranee a noi, che abbiamo non ostante ciò sotto mano, e che in questo modo ci sono più vicine dei fatti isolati della natura.

A causa di ciò si attribuisce talvolta alle conoscenze di questa specie un'origine totalmente diversa, ed esse si considerano come esistenti *a priori* assolutamente in noi, prima di ogni esperienza. Si è particolareggiatamente spiegato nella discussione dei lavori di Stevino, che questa opinione non è sostenibile. Inoltre qualunque possa essere la loro importanza nel processo di svolgimento della scienza, l'autorità delle conoscenze istintive deve sempre dar posto finalmente a quella dei principî chiaramente

posti e deliberatamente osservati. Le conoscenze istintive, come tutte le altre, sono conoscenze sperimentali, e possono, come si è già detto, mostrarsi da se stesse assolutamente insufficienti e senza valore, se una nuova categoria di fenomeni sperimentali non viene ad essere messa in evidenza.

7. La *vera* relazione e connessione che esistono fra i diversi principî è di ordine *storico*. L'uno di essi va più lungi in un ordine d'idee, ma l'altro condurrà più in là in altre questioni. Non ostante che qualche principio, come quello degli spostamenti virtuali, fornisca facilmente la chiave di un maggior numero di casi che gli altri principî, tuttavia non si è autorizzati ad affermare, che questa superiorità gli sarà sempre conservata e non sarà un giorno ecclissata da un principio nuovo. Tutti i principî mettono più o meno arbitrariamente in evidenza ora un aspetto, ora un altro degli stessi fatti, e tutti contengono una legge di rappresentazione generale del fatto nel pensiero. Nessuno può pretendere che questo processo sia definitivamente completato, e chiunque sostenesse questa opinione, non impedirebbe per ciò il progresso della scienza.

8. Finalmente gettiamo un rapido sguardo sul concetto di forza in statica. La forza è qualunque circostanza che ha per conseguenza il moto. Parecchie circostanze di questa specie, che, ciascuna separatamente, determinano un moto, possono agire *insieme* in modo, che non ne risulti alcun moto. Affinchè ciò avvenga è necessario che queste circostanze abbiano fra loro una certa dipendenza. La statica ha per oggetto la ricerca di questa dipendenza, e non si preoccupa maggiormente del carattere particolare del moto prodotto da una forza. Le circostanze determinanti il moto, che ci sono più note, sono i nostri propri atti volontari, dipendenti dal nostro sistema nervoso. Nei movimenti che noi stessi determiniamo, così come in quelli, cui le circostanze esterne ci costringono, noi proviamo sempre una certa pressione. Quindi sorge in noi l'abitudine di rappresentare ogni circostanza determinata del movimento come analoga ad un atto di volontà, come una *pressione*. Invano si è tentato di non ac-

cettare questa concezione come soggettiva, animistica e non scientifica; ma non ci può servire sicuramente a far violenza al modo naturale di pensare, che ci è proprio ed a condannarci così ad una volontaria povertà intellettuale. Inoltre osserviamo che troveremo di nuovo questa concezione della forza nel fondamento della dinamica.

In molti casi possiamo sostituire alle circostanze determinanti il moto, che si presentano nella natura, le nostre innervazioni; così acquistiamo l'idea di una gradazione nelle intensità delle forze; ma nella valutazione di queste ultime, non possiamo servirci che della memoria; e siamo anche incapaci di comunicare le nostre sensazioni. Indi si vede che è possibile rappresentare con un peso *ogni* circostanza determinante il moto, e così si giunge all'idea che tutte le circostanze determinanti il moto, cioè tutte le forze, sono grandezze della stessa specie, che possono essere sostituite e misurate con pesi. Il peso misurabile ci fornisce un indice comodo, comunicabile e più sicuro, e nella serie dei fenomeni meccanici ci rende esattamente lo stesso servizio che ci offre il termometro nella serie dei fenomeni calorifici, sostituendosi alle nostre sensazioni di caldo e di freddo. Come si è già fatto osservare, la statica non può liberarsi intieramente di ogni conoscenza dei fenomeni del moto. Particolarmente lo vediamo nella determinazione della direzione di una forza mediante la direzione del movimento che produrrebbe se agisse da sola. In quanto al punto di applicazione di una forza, si chiama così il punto del corpo, di cui la forza determinerebbe il movimento, se esso fosse reso libero dai suoi legami con le altre parti di esso.

La forza è dunque una circostanza determinante il moto, che possiede gli attributi seguenti: 1° *la direzione*, che è la direzione del moto determinato dalla forza data, che agisce da sola; 2° *il punto di applicazione*, che è il punto del corpo il cui moto è determinato indipendentemente dai suoi legami con esso; 3° l'*intensità*, che è data dal peso che agendo mediante un filo, applicato allo stesso punto secondo la direzione data, determina

lo stesso movimento e mantiene lo stesso equilibrio. Le altre circostanze, che modificano la determinazione di un moto, ma che, da sole, non possono determinarne alcuno, si possono chiamare circostanze accessorie determinanti il moto o l'equilibrio, come ad esempio i bracci della leva, gli spostamenti virtuali, ecc.

VI. *I principî della statica nella loro applicazione ai liquidi.*

1. Lo studio delle proprietà dei liquidi non ha fornito alla statica molti punti di vista sostanzialmente nuovi, ma esso ha permesso un gran numero di applicazioni e di conferme dei principî già noti; e le ricerche fatte in questo campo hanno di molto arricchito l'esperienza fisica. Perciò dedichiamo alcune pagine a questo soggetto.

2. Pure ad Archimede spetta l'onore di aver gettato le basi della statica dei liquidi; è a lui che dobbiamo il ben noto teorema sulla pressione o perdita di peso che subiscono i corpi immersi; di questa scoperta Vitruvio (de Architectura libro 9) dà il seguente ragguaglio (1):

" Archimedis vero cum multa miranda inventa et varia fuerint, ex omnibus etiam infinita solertia, id quod exponam, videtur esse expressum nimium. Hiero enim Siracusis auctus regia potestate, rebus bene gestis, cum auream coronam votivam dijs immortalibus in quodam fano constituisset ponendam, immani pretio locavit faciendam et aurum ad sacoma appendit redemptori. Is ad tempus opus manufactum subtiliter regi approbavit et ad sacoma pondus coronae visus est praestitisse. Posteaquam indicium est factum, dempto auro tantundem argenti in id coronarum opus admixtum esse, indignatus Hiero se contemptum; neque inveniens qua ratione id furtum reprehenderet, rogavit

---

(1) Vedi M. Vitruvi *De Architectura.* Liber nonus, cap. III. pagina 150. - Stampato a Firenze per gli eredi di Filippo Giunti anno 1552.

(*N. d. t.*)

Archimedem, uti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is cum haberet eius rei curam, casu venit in balneum; ibique cum in solium descenderet, animadvertit quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquae extra solium effluere. Itaque cum eius rei rationem explicationis offendisset, non est moratus, sed exilivit gaudio motus de solio, et nudus vadens domum versus significabat clara voce invenisse quod quaereret. Nam currens identitem graece clamabat *εὕρηκα, εὕρηκα* „. Eccone la traduzione:

“ D'Archimede poi, sebbene molte e varie sieno state le mirabili invenzioni, fra tutte però quella che mostra maggior sottigliezza, è questa che dirò. Erone innalzato alla potestà regale in Siracusa, avendo per il felice esito delle sue cose destinato di porre in un certo tempio una corona d'oro in voto agli dei immortali, la diede a fare di grossa valuta e consegnò egual peso di oro all'appaltatore. Questi al tempo stabilito presenta al re il prescritto lavoro fatto con delicatezza, ed il peso della corona parve che corrispondesse al dato; ma essendo stata fatta una denuncia che n'era stato tolto dell'oro e mescolatovi altrettanto argento, n'andò in collera Erone per essere stato burlato; nè sapendo come appurare il furto, ne richiese Archimede, perchè se ne addossasse egli il pensiero. Stando egli con questa cura, andò per caso al bagno; ed ivi, mentre calava nella fossa, s'accorse che quanta era la massa del suo corpo che vi entrava, altrettanta acqua ne usciva; quindi avendo incontrato il metodo della dimostrazione di una tal cosa, non si fermò; ma spinto dall'allegrezza saltò fuori del bagno, e nudo correndo verso casa, andava ad alta voce dicendo d'aver trovato quel che cercava, mentre correndo ogni poco gridava in greco: *εὕρηκα, εὕρηκα* (ho trovato, ho trovato!) „.

3. Archimede fu perciò condotto al suo teorema dall'osservazione che un corpo deve, per immergersi, innalzare una quantità d'acqua equivalente; esattamente come se il corpo fosse sopra uno dei piatti della bilancia e l'acqua nell'altro piatto. Questa concezione, che oggi ancora è la più naturale e la più diretta, s'incontra nell'opera di Archimede: *Sui corpi galleggianti*, che

disgraziatamente non è stata completamente conservata, ma è stata in parte restituita da F. Comandino.

L'ipotesi da cui parte Archimede è la seguente: “ Si suppone come proprietà essenziale di un liquido che se tutte le sue parti si succedono uniformemente ed in modo continuo, le parti che soffrono minori pressioni sono spinte in alto da quelle che subiscono pressioni maggiori. Ogni parte del liquido inoltre soffre una pressione dalla porzione che si trova perpendicolarmente sopra di essa, quando questa tende a cadere o subisce una pressione da qualche altra porzione „.

Riassumendo diremo che Archimede immagina la costituzione dell'intiero globo terrestre come fluida e lo divide in piramidi, che hanno per vertice il centro della sfera (fig. 59). L'equilibrio richiede che tutte queste piramidi abbiano pesi eguali, e quelle delle loro parti, che sono similmente poste, subiscano pressioni eguali. Se s'immerge in una di queste piramidi un corpo *a* dello stesso peso specifico dell'acqua, questo corpo si immergerà esattamente; e nel caso di equilibrio, esso sostituirà alla pressione dell'acqua spostata la pressione che produce esso stesso. Un corpo *b* di peso specifico minore di quello dell'acqua non può, senza alterare l'equilibrio, immergersi nella massa fluida, che sino al punto, in cui il suo proprio peso faccia subire al liquido posto sotto di esso una pressione precisamente uguale a quella, che esso subirebbe se, dopo avere innalzato il corpo, si sostituisca con acqua la parte immersa. Un corpo *c* di peso specifico maggiore di quello dell'acqua cadrà tanto in basso, quanto è possibile. Si vede facilmente che, nell'acqua, il peso di questo corpo diminuisce del peso dell'acqua spostata, immaginando questo corpo legato ad un altro corpo di peso specifico minore, così che il loro insieme costituisca un terzo corpo dello stesso peso specifico dell'acqua, e questo sarà esattamente immerso.

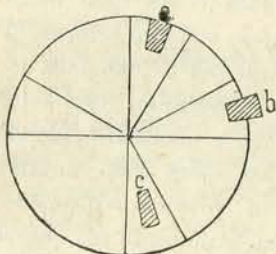



Fig. 59.

4. Quando nel XVI secolo fu ripreso lo studio delle opere di Archimede, i principii che aveva enunciati furono appena compresi; allora era impossibile comprendere appieno le sue dimostrazioni.

Stevino riscoprì con un metodo suo proprio i principii più importanti della idrostatica e le loro conseguenze. Egli fonda le sue deduzioni sopra due idee fondamentali. La prima è del tutto analoga a quella relativa alla catena chiusa. La seconda consiste nella ipotesi che si possono solidificare i liquidi in equilibrio senza distruggere questo equilibrio.

Stevino per primo diede il principio seguente: una massa qualunque data A (fig. 60) di acqua, immersa nell'acqua, è in equilibrio in tutte le sue parti. Poichè se A non fosse sostenuta dall'acqua circostante, ma se al contrario essa cadesse, si sarebbe costretti ad ammettere che l'acqua, che verrebbe a prendere il suo posto A, cadrebbe ugualmente; ciò condurrebbe al *moto perpetuo*, conclusione contraddittoria con la nostra esperienza e con la nostra conoscenza istintiva delle cose.

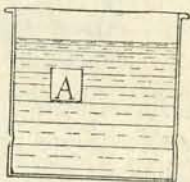



Fig. 60.

L'acqua immersa nell'acqua perde dunque tutto il suo peso. Immaginiamo ora che la superficie di quest'acqua sia solidificata; il vaso formato da questa superficie (*vas superficiarium*), come lo chiama Stevino, subirà esattamente le stesse circostanze di pressione. Questo vaso superficiale *vuoto* proverà dunque nell'acqua una pressione eguale al peso dell'acqua spostata. Sostituiamo ad esso un corpo di peso specifico qualunque, e si vedrà che questo corpo immerso prova una diminuzione di peso eguale al peso dell'acqua, di cui egli occupa il posto.

In un parallelepipedo rettangolo, posto verticalmente e pieno d'acqua, la pressione sulla base orizzontale è uguale al peso del liquido. Questa pressione è anche la stessa per due parti equivalenti di questa base. Allora Stevino toglie col pensiero certe parti di liquido e ad esse sostituisce de' solidi dello stesso peso specifico, in altre parole solidifica col pensiero una parte del li-

quido, ciò che non cambia affatto le relazioni di pressione nel vaso. Così è facile scorgere dapprima che la pressione sul fondo di un vaso è indipendente dalla forma del vaso, poi è facile ottenere la legge delle pressioni nei vasi comunicanti ecc.

5. Galileo tratta il problema dell'equilibrio nei vasi comunicanti e le questioni ad esso connesse mediante il principio degli spostamenti virtuali. Sia M N (fig. 61) il livello comune di un liquido nei due vasi comunicanti; Galileo spiega che havvi allora equilibrio pel fatto che, per qualunque perturbazione, gli spostamenti delle colonne liquide sono in ragione inversa delle sezioni e dei pesi di queste colonne, come nelle macchine in equilibrio. Questo ragionamento è tutt'altro che esatto. Questo problema non corrisponde rigorosamente ai casi di equilibrio nelle macchine, studiati da Galileo, ove l'equilibrio è indifferente. Pei liquidi nei vasi comunicanti, qualunque disturbo del livello comune provoca un innalzamento del centro di gravità. Nella figura 61 il centro di gravità S del liquido, che occupava lo spazio tratteggiato in A, è salito in S′, potendo il resto del liquido essere riguardato come non si fosse mosso. Il caso dell'equilibrio corrisponde dunque qui ad un'altezza minima del centro di gravità.

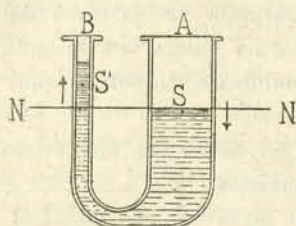



Fig. 61.

6. Pascal impiega parimente il principio degli spostamenti virtuali, ma in un modo rigoroso, facendo astrazione dal peso del liquido e considerando solo le pressioni sulla superficie. Consideriamo due vasi comunicanti chiusi mediante stantuffi (fig. 62) caricati di pesi proporzionali alle loro supeficie; l'equilibrio esiste, perchè l'invariabilità del volume liquido fa sì che ogni disturbo del livello comune dà agli stantuffi spostamenti, che sono in ragione inversa dei pesi, che essi sopportano. Per Pascal *risulta* perciò necessariamente dal principio degli spo-

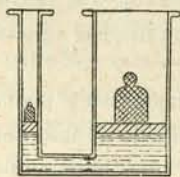



Fig. 62.

stamenti virtuali che, nei liquidi in equilibrio, ogni pressione esercitata sopra una parte della superficie si trasmette integralmente a ciascuna parte eguale di superficie, ovunque e qualunque sia la sua posizione. Non si può negare che in questo modo il principio sia *scoperto,* ma vedremo però più avanti, concezione più naturale e più soddisfacente, è quella di riguardarlo come ottenuto direttamente.

7. Ora che abbiamo fatto l'abbozzo storico della questione, riprendiamo l'esame del caso più importante dell'equilibrio dei liquidi, ponendoci da punti di vista differenti, i più convenienti secondo i casi.

La proprietà fondamentale dei liquidi, data dall'esperienza, è la mobilità delle loro particelle sotto le più piccole pressioni. Si consideri un elemento di volume di liquido, per esempio un cubo piccolissimo, e si faccia astrazione dal suo peso. Per la minima pressione esercitata su una delle facce, il liquido scorre e scappa in tutte le direzioni a traverso le cinque altre facce. Un cubo solido può provare sulle facce superiore ed inferiore una pressione differente da quelle che si esercitano sulle facce laterali; un cubo liquido al contrario potrà sussistere sol quando la stessa pressione s'esercita normalmente sopra tutte le sue facce. Considerazioni analoghe si applicano a tutti i poliedri. Questa concezione, esposta geometricamente, contiene unicamente la cruda esperienza, che c'insegna che le particelle liquide cedono alla minima pressione, e che esse conservano questa proprietà anche quando sono nell'interno del liquido, e che questo è sottoposto ad una forte pressione, poichè si osserva pure allora la discesa di corpi che vi siano immersi.

Alla mobilità delle particelle dei liquidi va congiunta un'altra proprietà che ora considereremo. Il volume dei liquidi compressi diminuisce proporzionalmente alla pressione esercitata sulla unità di superficie. Ogni cambiamento di pressione trae seco un cambiamento proporzionale di volume e di densità del liquido. Se si sopprime la pressione, il volume riprende il suo valore iniziale maggiore e la densità il suo valore iniziale minore. L'incremento

di pressione fa diminuire il volume del liquido sino a che queste forze elastiche, poste in azione, facciano ad esso equilibrio.

8. Gli antichi sperimentatori, ad esempio gli Accademici (1) di Firenze, credevano alla incompressibilità dei liquidi. Nel 1763 Giovanni Canton descrisse un esperimento, che dimostrava per la prima volta la compressibilità dell'acqua. Un tubo termometrico è ripieno di acqua; si fa bollire, poi si chiude il tubo alla lampada (fig. 63). Sia *a* il livello del tubo; siccome lo spazio al di sopra di *a* è vuoto di aria, il liquido non sopporta la pressione atmosferica. Se si rompe l'estremità superiore, il livello del liquido discende in *b*; ma questo abbassamento non è intieramente dovuto alla compressione dell'acqua, a causa della pressione atmosferica; poichè, se prima di rompere l'estremità del tubo, lo si mette sotto la campana pneumatica, si vede, quando si fa il vuoto, che il liquido scende in *c*; ciò che doveva verificarsi, poichè la pressione, che si esercitava sul tubo e che non ne diminuiva la capacità, è tolta. Quando si rompe l'estremità, la pressione esterna risulta dalla pressione interna eguale e ne consegue lo stesso aumento di capacità come nel caso del vuoto. La parte *c b* dunque rappresenta la compressione propria del liquido sotto l'effetto della pressione atmosferica.

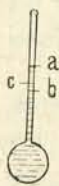



Fig. 63.

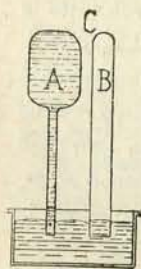



Fig. 64.

Le prime esperienze un po' più esatte sulla compressibilità dell'acqua sono dovute ad Oersted; il suo metodo è assai ingegnoso. Un tubo termometrico A (fig. 64) pieno di acqua bollente pesca con la sua estremità capillare aperta in un bagno di mercurio; un secondo tubo pieno di aria, che forma il manometro ad aria compressa, è immerso egualmente nel mercurio con la sua estremità inferiore. L'intiero apparecchio

(1) Gli Accademici dell'Accademia del Cimento, che fu fondata nel giugno del 1657, e cessò di vivere nel 1667.

(*N. d. t.*)

è allora messo in un vaso pieno di acqua, che si comprime mediante una pompa. Questa pressione si comunica all'acqua in A, ed il filo sottile di mercurio che sale nel tubo capillare ne indica il grado. Il cambiamento di capacità che prova il recipiente A è puramente quella, che potrebbero produrre forze eguali, che comprimessero le sue pareti in tutti i sensi.

Gli esperimenti più esatti sul soggetto sono quelli di Grassi, che si servì di un apparecchio costruito da Regnault ed impiegò pei suoi calcoli le tavole di correzione di Lamé. Si può avere una idea del grado di compressibilità dell'acqua distillata mediante i numeri seguenti dati dal Grassi: un aumento di pressione di un'atmosfera fa diminuire il valore iniziale di circa $\frac{5}{10^5}$ del suo valore. Dunque, se noi supponiamo che la capacità di A sia di 1 litro (1000 centimetri cubi) e che la sezione del tubo capillare sia di 1 millimetro, si vede che un aumento di pressione di un'atmosfera fa salire il mercurio ad un'altezza di circa 5 centimetri nel tubo capillare.

9. La pressione esercitata sul liquido produce quindi un cambiamento nella sua costituzione fisica (una variazione di densità), che si può constatare con processi abbastanza delicati (ad esempio con mezzi ottici). Perciò bisogna sempre immaginare le parti più compresse di un liquido come più dense delle parti meno compresse, quantunque questa differenza di densità sia piccolissima.

Consideriamo in un liquido, nel cui interno non agisca nessuna forza e che per conseguenza supponiamo senza peso, due parti contigue sottoposte a diverse pressioni. Quella che è più compressa e più densa tenderà a crescere di volume, comprimendo la seconda sottoposta alla minima pressione sino all'istante, in cui le forze elastiche, aumentate da una parte della superficie di separazione e diminuite dall'altra, ristabiliranno l'equilibrio, ed in cui le pressioni saranno eguali da entrambe le parti.

Se ora noi cerchiamo di costruire quantitativamente la nostra rappresentazione dei due fatti, che abbiamo constatato — cioè

la gran mobilità e la compressibilità delle parti liquide — in modo che essa si possa adattare alle esperienze più disparate, si giungerà a questa proposizione: in un liquido in equilibrio, nel cui interno non agisca alcuna forza, e supposto senza peso, due elementi eguali qualunque di superficie sono sottoposti alla stessa pressione, qualunque siano le loro orientazioni e le loro posizioni. La pressione è perciò la stessa in ciascun punto ed è indipendente dalla direzione.

Non si è forse mai istituita la verificazione sperimentale di questo principio con tutta la voluta precisione; ma la proposizione per noi è divenuta familiarissima con tutte le nostre esperienze sui liquidi, di cui ci dà una spiegazioue immediata.

10. Si consideri un liquido contenuto in un recipiente chiuso, munito di due stantuffi A e B (fig. 65), di cui il primo A ha una sezione eguale all'unità di superficie. Carichiamo lo stantuffo A di un peso p e teniam fisso lo stantuffo B. Se si trascura il peso del liquido, tutti i punti della sua massa sono sottoposti alla stessa pressione p; lo stantuffo A si affonda e le pareti si deformano sino al momento in cui le forze elastiche del liquido e del solido non si facciano equilibrio in ciascun punto.

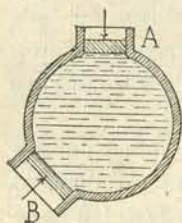



Fig. 65.

Immaginiamo lo stantuffo B mobile e sia f la sua sezione; si vede che è necessaria una forza $f.p$ per mantenerlo in equilibrio.

Quando Pascal dedusse questo principio da quello degli spostamenti virtuali, bisogna osservare che per lui la relazione tra gli spostamenti era determinata unicamente dalla perfetta mobilità delle particelle del liquido e dall'eguaglianza delle pressioni in tutte le sue parti. Il rapporto degli spostamenti sarebbe alterato, se le due parti del liquido potessero subire pressioni disuguali, e la conclusione di Pascal non sarebbe più ammissibile. Non si può negare che l'eguaglianza delle pressioni è una proprietà fornita dalla esperienza; e si scorge facilmente che è impossibile di considerarla in modo diverso, poichè questa proprietà,

che Pascal dimostra per i liquidi, è posseduta anche dai gas, pel caso dei quali non vi è più questione di un volume anche approssimativamente costante. Secondo il nostro modo di vedere, questo fatto non costituisce una difficoltà; ma avviene diversamente in quello di Pascal. Si può qui osservare incidentalmente, che nel caso della leva il rapporto degli spostamenti virtuali è nello stesso modo assicurato mediante le forze elastiche della materia, le quali non permettono forti deviazioni da esso.

11. Ora esaminiamo come i liquidi si comportano sotto l'azione della gravità. La superficie del liquido in equilibrio è orizzontale MN (fig. 66); ciò si comprende subito osservando, che ogni cambiamento di questa superficie innalza il centro di gravità del liquido, trasportando la parte del liquido, posto nello spazio tratteggiato sotto MN, il cui centro di gravità è S, nello spazio tratteggiato al di sopra di MN, di cui il centro di gravità è S'. La gravità dunque agisce immediatamente per ristabilire lo stato primitivo.

Si prenda dentro un liquido pesante in equilibrio (fig. 67) un piccolo parallelepipedo rettangolare di base orizzontale a e di

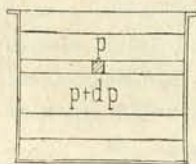



Fig. 66. Fig. 67.

altezza dh; il suo peso è $a \,.\, dh \,.\, s$, essendo s il peso specifico del liquido. Questo parallelepippedo non cade; ciò richiede che la faccia inferiore subisca una pressione maggiore della faccia superiore. Siano $a \,.\, p$ e $a \,.\, (p + dp)$ le pressioni esercitate sulle facce superiore ed inferiore. Per l'equilibrio si deve avere, h essendo misurato positivamente verso il basso:

$$a \,.\, dh \,.\, s = a \,.\, dp\,;$$

da cui:

$$\frac{dp}{dh} = s.$$

Quindi ad incrementi eguali di h corrispondono incrementi eguali di pressione, e si ha:

$$p = hs + q,$$

equazione in cui q rappresenta la pressione sulla superficie libera (in generale la pressione atmosferica). Se si fa $q = o$, allora si ha più semplicemente:

$$p = hs,$$

equazione che esprime che la pressione è proporzionale alla profondità. Se si versa un liquido in un vaso e lo si considera nel momento in cui questa ripartizione delle pressioni non sia ancora attuata, si vedranno le particelle del liquido discendere fino a che le forze elastiche sviluppate dalla compressione nelle parti poste al di sotto controbbilancino il peso delle parti poste al di sopra.

Inoltre da questa esposizione ne consegue di nuovo che le pressioni in un liquido aumentano solo nella direzione della gravità. Unicamente alla base inferiore del parallelepippedo si deve produrre un aumento nella forza elastica del liquido per controbilanciare il suo peso. Lungo le due bande delle facce verticali di questo solido elementare il liquido è sottoposto a pressioni eguali, dappoichè nessuna forza agisce su queste facce per determinare una pressione maggiore da una banda piuttosto che dall'altra.

L'insieme dei punti, che subiscono la stessa pressione p forma una superficie, che chiamasi *superficie di livello.* Ogni particella, spostata nella direzione della gravità, subisce un cambiamento di pressione, mentre, spostata in una direzione normale alla gravità, essa non ne subisce alcuna. In quest'ultimo caso la particella rimane dunque sulla superficie di livello. Ne consegue quindi che l'elemento della superficie di livello è perpendicolare alla direzione della gravità. Se la Terra fosse una sfera liquida, le superficie di livello sarebbero sfere concentriche, e le direzioni delle forze generate dalla gravità sarebbero i raggi, perpendicolari agli elementi della sfera. Osservazioni

analoghe si possono fare per i liquidi sottoposti ad altre forze, come per esempio alle forze magnetiche.

Le superficie di livello costituiscono un'eccellente rappresentazione delle relazioni delle forze, cui è sottoposto un liquido; il loro studio è svolto ulteriormente nella idrostatica analitica.

12. Alcune esperienze, dovute in gran parte a Pascal, mettono chiaramente in evidenza l'aumento della pressione con l'aumentare la profondità dei liquidi pesanti. Questi sperimenti dimostrano ancora che la pressione è indipendente dalla direzione. Un tubo di vetro levigato è chiuso alla sua estremità inferiore con un disco di metallo, trattenuto da un filo (fig. 68, 1). Se s'immerge l'apparecchio nell'acqua ad una profondità sufficiente, allora si può allentare il filo ed il disco metallico viene sostenuto dalla pressione dell'acqua e non cade. Nella esperienza 2 il disco metallico è sostituito da una sottile colonna di mercurio. La figura 3 rappresenta un tubo ricurvo contenente mercurio; immergendolo nell'acqua si vede salire il mercurio nel ramo maggiore del tubo mediante l'aumento della pressione. Nell'esperimento 4 si attacca all'orifizio inferiore di un tubo un piccolo sacco di cuojo pieno di mercurio; immergendo sempre più il tubo, si vede in esso sempre più salire il mercurio. Nella figura 5 la pressione dell'acqua fa aderire un pezzo di legno h al ramo minore di un sifone vuoto. La figura 6 fa vedere un pezzo di legno H premuto fortemente contro il fondo di un vaso contenente mercurio, e che rimane fermo finchè il mercurio non sia penetrato sotto di esso.

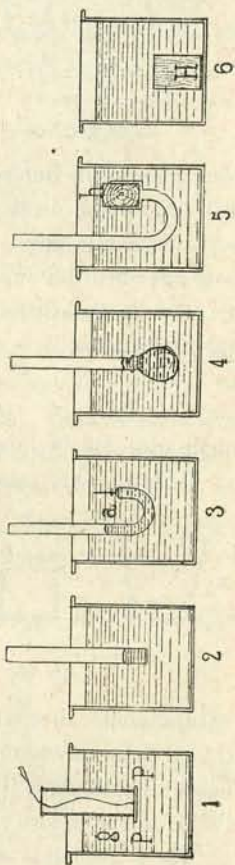



Fig. 68.

13. Avendo mostrato che nei liquidi pesanti la pressione aumenta in ragione diretta della profondità, si comprende facilmente che le pressioni sui fondi dei vasi sono indipendenti dalle loro forme. Infatti l'aumento della pressione con la profondità si produce nello stesso modo tanto se la forma del vaso è (fig. 69) *abcd*, quanto se è *ebcf*. In entrambi i casi le pareti del vaso si deformano nei punti, in cui esse sono a contatto col liquido sino a che la forza elastica faccia equilibrio alla pressione, e che esse sostituiscano per conseguenza il fluido vicino per quanto riguarda la pressione. Tal fatto è una diretta giustificazione del processo di Stevino, che sostituisce alle pareti un liquido solidificato. Chiamando con s il peso specifico del liquido, con A la superficie del fondo del vaso e con h la sua distanza dalla superficie di livello, la pressione sul fondo sarà:

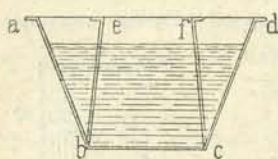



Fig. 69.

$$p = A . h . s,$$

qualunque sia la forma del recipiente.

Il fatto che, trascurando i loro propri pesi, i vasi 1, 2, 3 della figura 70, che hanno i fondi di egual superficie e la colonna di acqua della stessa altezza, accusano ai piatti di una bilancia pesi differenti, non contraddice naturalmente in nulla alle leggi delle pressioni. Bisogna tener conto delle pressioni laterali; si vede che in 1 dà una componente diretta verso il basso, ed in 3 una componente diretta verso l'alto; talchè la loro risultante è sempre eguale al peso del liquido.

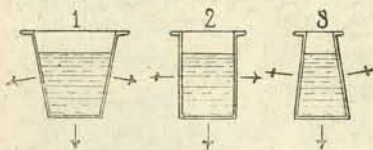



Fig. 70.

14. Il principio degli spostamenti virtuali si applica benissimo alla risoluzione dei problemi di questo genere; quindi ora ne faremo uso. Ma prima dobbiamo fare alcune osservazioni. Se il peso q (fig. 71) discende dalla posizione 1 alla posizione 2,

provocando la caduta dalla posizione 2 alla 3, il lavoro compiuto è:

$$q \cdot h_1 + q \cdot h_2 = q \cdot (h_1 + h_2).$$

Questo lavoro è uguale a quello che sarebbe stato fatto, se il peso q (in 1) fosse direttamente caduto da 1 in 3 ed il peso q (in 2) fosse rimasto immobile. Si può facilmente generalizzare questa osservazione.

Si consideri un parallelepippedo rettangolo, omogeneo, pesante, di base orizzontale A (fig. 72), di altezza h, e di peso spe-

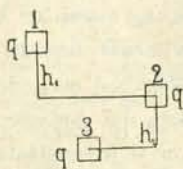
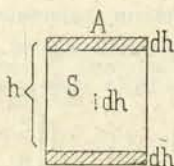
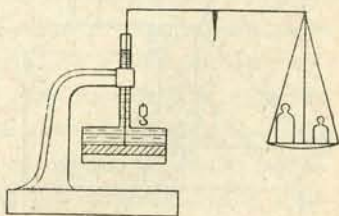



Fig. 71. *Fig. 72.*

cifico s. Questo parallelepippedo, o il suo centro di gravità, discende di $\overline{dh}$. Il lavoro fatto è $A.h.s.\overline{dh}$ o $A.\overline{dh}.s.h$. Nella prima espressione si concepisce il fenomeno come uno spostamento totale del parallelepippedo (una caduta di $\overline{dh}$), nella seconda lo si concepisce come una caduta dall'altezza h della parte tratteggiata A, che, dopo la caduta, occupa la parte ombreggiata inferiore della figura, non essendosi d'altra parte mosso il rimanente del corpo. Questi due modi di vedere sono ammissibili ed equivalenti.

15. Mediante questa osservazione otterremo una chiara spiegazione del paradosso di Pascal, che è il seguente: Un vaso g (fig. 73), sospeso mediante un sostegno indipendente dal resto dell'apparecchio, è formato da un tubo sottile, fissato sul fondo superiore di un cilindro di grandissimo diametro; il fondo in-

Fig. 73.

feriore di questo vaso è un cilindro mobile, sospeso con un filo teso secondo l'asse del cilindro ad una delle estremità del braccio

di una bilancia. Quando il vaso g è pieno di acqua, si debbono, per fare equilibrio, porre nel piatto della bilancia pesi considerevoli, ad onta della piccola quantità di acqua impiegata. La somma di questi pesi è $A.h.s$, ove A è la superficie dello stantuffo, h l'altezza del liquido, ed s il suo peso specifico. Se si fa congelare il liquido e la sua massa cessa di far pressione sulle pareti del vaso, allora basta solo un piccolo peso per mantenere l'equilibrio.

Consideriamo gli spostamenti virtuali in entrambi i casi (fig. 74). Nel primo caso, quando lo stantuffo è innalzato ad un'altezza $\overline{dh}$, si ha un momento virtuale $A.\ \overline{dh}.\ s.h$ ossia $A.\ h.\ s.\ \overline{dh}$, eguale a quello che si otterrebbe, se la massa liquida spostata dello stantuffo fosse stata innalzata di $\overline{dh}$. Nel secondo caso la massa spostata dal movimento dello stantuffo non si è innalzata sino al livello superiore, ma ad un'altezza assai minore (che è l'altezza del cilindro, essendo un'assai piccola parte solamente, innalzata al livello superiore). Siano A ed a le sezioni del cilindro e del tubo, K ed l le loro rispettive altezze, la somma dei momenti virtuali è:

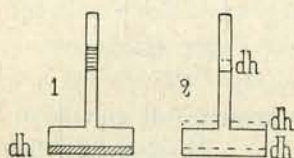



Fig. 74.

$$A.\overline{dh}.s.K + a.\overline{dh}.s.l = (A.K + a.l).s.\overline{dh},$$

e corrisponde all'innalzamento di un peso $(A.K + a.l).s$, assai minore, alla stessa altezza $\overline{dh}$.

16. Le leggi riguardanti le pressioni laterali dei liquidi non sono altro che leggerissime modificazioni delle pressioni sui fondi dei vasi. Abbiasi, ad esempio, un vaso cubico di un decimetro di spigolo, pieno compiutamente di acqua. Un elemento della parete verticale BCD (figura 75) subisce una pressione, che si può determinare assai facilmente, e che è tanto più grande, quanto l'elemento si trova più in basso al disotto della superficie

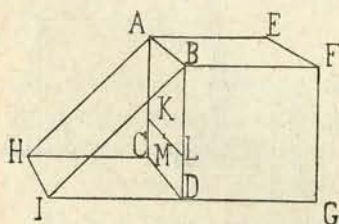



Fig. 75.

di livello. È facile vedere che la pressione è la stessa di quella che si avrebbe, se si facesse gravitare sulla parete, posta orizzontalmente, un prisma d'acqua ABCDHI, la cui sezione retta è il triangolo rettangolo isoscele IDB. La pressione sopra una delle facce laterali del cubo è quindi di $\frac{1}{2}$ chilogramma.

Per determinare il punto di applicazione della risultante delle pressioni immaginiamo la faccia ABCD orizzontale col prisma di acqua che gravita su essa. Si conduca la retta KL in modo che sia $AK = BL = \frac{2}{3} . AC$, e sia M il suo centro; M è il punto di applicazione cercato, poichè questo punto si trova sulla verticale passante pel centro di gravità del prisma.

Se una parete di un vaso pieno di liquido è una superficie piana inclinata, la si scomponga in elementi a, a', a''..... le cui distanze, dalla superficie di livello del liquido siano h, h', h''..... allora la pressione in questa parete è:

$$(a . h + a' h' + a'' h''' .....) . s .$$

Sia A la superficie totale di questa parete ed H la distanza del suo centro di gravità dalla superficie del liquido, si ha:

$$\frac{a . h + a'. h' + ...}{a + a' + a'' + ...} = \frac{a . h + a' . h' + ...}{A} = H;$$

quindi si vede che il valore della pressione sulla base è A. H. s.

17. Il principio di Archimede si può ricavare in molti modi diversi. Secondo il metodo di Stevino si supponga che una parte della massa liquida sia solidificata entro di essa; questa parte ora come prima sarà sorretta dal liquido circostante. La risultante delle pressioni, che agiscono sulla superficie di un solido immerso, passa perciò pel centro di gravità del liquido, di cui esso occupa il posto, ed è uguale ed opposta al peso di questo. Ma queste pressioni sulla superficie non cambiano, se si sostituisce al liquido solidificato un corpo solido qualunque della stessa forma, ma di peso specifico differente. Allora agiscono su questo corpo solido due forze: il suo peso applicato al suo

centro di gravità e la spinta del liquido, cioè la risultante delle pressioni applicata al centro di gravità del liquido spostato. Nei corpi solidi omogenei i due centri di gravità coincidono.

Immaginiamo un parallelepipedo rettangolo di altezza h (fig. 76) e di base a, immerso verticalmente in un liquido di peso specifico s; sia K la distanza della base superiore dal livello del liquido; la pressione su questa base sarà $a \,.\, K \,.\, s$, e la pressione sulla base inferiore sarà $a \,.\, (K + h) \,.\, s$. Siccome le pressioni sulle pareti laterali si distruggono, la risultante dellepressioni è una forza diretta verso l'alto, eguale a $v \,.\, s$, essendo v il volume del parallelepipedo.

Fig. 76.

Il principio degli spostamenti virtuali conduce per quanto è possibile alla concezione, da cui Archimede stesso è partito. Supponiamo che un parallelepipedo di base a, di altezza h e di peso specifico σ s'immerga di una profondità $\overline{dh}$. Il momento virtuale risultante dal trasporto della parte tratteggiata superiore della figura nella parte tratteggiata inferiore è: $a \,.\, \overline{dh} \,.\, \sigma \,.\, h$; ma allora il liquido posto nello spazio tratteggiato inferiore sale nello spazio tratteggiato superiore, e ciò dà un momento virtuale $a \,.\, \overline{dh} \,.\, s \,.\, h$. La somma dei momenti virtuali è perciò:

$$a \,.\, h \,.\, (\sigma - s)\, \overline{dh} = (p - q) \,.\, \overline{dh},$$

essendo p il peso del corpo e q quello del liquido spostato.

18. Si può domandare se la spinta che riceve un corpo immerso in un liquido sia cambiata dall' immersione di quest' ultimo in un altro liquido; e talvolta infatti è stata posta innanzi tale questione singolare. Abbiasi un corpo K immerso in un liquido A (fig. 77); ora immergiamo il corpo ed il vaso che lo contiene in un altro liquido B. Se, nel calcolo della perdita di peso in A, occorresse tener conto della perdita del peso che subisce A in B, la perdita di peso che subisce A sarebbe nulla nel caso, in cui B fosse lo stesso liquido di A.

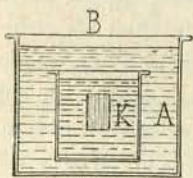



Fig. 77.

Da una parte K immerso in A subirebbe una perdita di peso, dall'altra non la subirebbe. Una tal regola sarebbe perciò assurda.

Il principio degli spostamenti virtuali spiega facilmente i casi più complicati di questa specie. Si consideri un corpo che gradatamente venga immerso prima in B, poi parzialmente in B, e parzialmente in A, ed infine in A. Nel secondo caso, si deve, nella determinazione dei momenti virtuali, tener conto dei due liquidi nella proporzione dei volumi immersi in ciascuno di essi; ma appena il corpo è totalmente immerso in A, uno spostamento ulteriore non innalza più il suo livello, e l'influenza del liquido B d'ora innanzi non si deve più considerare.

19. Il principio di Archimede si può verificare mediante una esperienza graziosissima. Un cubo pieno M (fig. 78) è sospeso ad un cubo vuoto H, attaccato a sua volta ad uno dei piatti di una bilancia. Il cubo pieno M riempie esattamente il vuoto del cubo H. L'apparecchio è equilibrato mediante pesi messi nell'altro piatto. Questo equilibrio è disturbato, se s'immerge M in un vaso d'acqua posto sotto di esso, ma si ristabilisce immediatamente, se si riempie di acqua il cubo H.

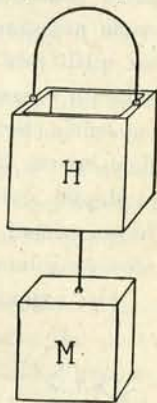



Fig. 78.

Si può fare come segue la contro-esperienza: si lascia solo il cubo H, sospeso mediante un filo ad un sostegno indipendente. Si stabilisce l'equilibrio dei piatti della bilancia. Se s'immerge il cubo M nel vaso posto nella bilancia, l'equilibrio non vi è più, ma per ristabilirlo basta riempire di acqua il cubo H.

A prima vista questa esperienza sembra alquanto paradossale; ma subito instintivamente si comprende che non si può immergere M senza esercitare una certa pressione, che la bilancia deve indicare; se poi si rammenta che M fa equilibrio alle pressioni esercitate sulla sua superficie dall'acqua circostante, cioè che M rappresenta e tiene il posto di un egual volume di acqua, l'esperimento perde tutto il carattere paradossale.

20. Si è pervenuti ai principii più importanti della statica mediante la considerazione dell'equilibrio dei corpi solidi. Può darsi che questo cammino sia quello che è stato *storicamente* seguito, ma esso non è in alcun modo il solo possibile e *necessario.* I differenti metodi, che Archimede, Stevino, Galileo ed altri hanno impiegato, lo provano a sufficienza. I principii generali della statica si sarebbero potuti scoprire mediante osservazioni sui liquidi, fondandosi solo sopra alcune proposizioni assai semplici della statica dei solidi. Stevino certamente rasenta questa scoperta. Ci tratterremo alquanto a esaminare questa questione.

Immaginiamo un liquido senza peso, posto in un vaso e sottoposto ad una data pressione; una porzione di esso si può supporre solidificata. Sulla superficie chiusa di questo solido agiscono pressioni normali, proporzionali agli elementi di superficie sui quali esse si esercitano; si vede facilmente che la loro risultante è sempre eguale a zero. Limitiamo una parte di questa superficie chiusa con una curva chiusa; così otteniamo una superficie aperta. Tutte le superficie limitate da questa stessa curva (a doppia curvatura), e sulle quali agiscono nello stesso senso forze normali, proporzionali agli elementi di superficie, dànno la stessa risultante.

Ora supponiamo che il volume liquido contenuto in un cilindro retto, la cui direttrice è una curva chiusa qualunque, sia solidificato; si può fare astrazione delle due basi normali alla direzione delle generatrici e considerare solo la curva direttrice chiusa invece di considerare il cilindro stesso. Si otterranno così proposizioni del tutto analoghe per forze normali, proporzionali agli elementi della curva piana.

Fig. 79.

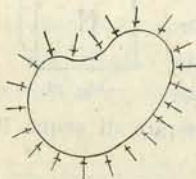
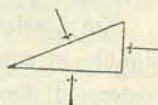
Se la curva chiusa si trasforma in un triangolo, queste proporzioni si semplificano, e si presentano le stesse considerazioni nel modo seguente: si rappresentino in grandezze, direzioni e sensi le risultanti delle forze normali, i cui punti di applicazione siano nei centri dei lati del triangolo con segmenti rettilinei

(fig. 80). Questi tre segmenti prolungati s'incontrano in uno stesso punto, che è il centro del cerchio circoscritto al triangolo. Inoltre si osserva che, spostandoli parallelamente a sè stessi, si può formare un triangolo direttamente simile al triangolo dato.

Fig. 80.

Si ottiene così il teorema seguente:

Tre forze applicate in uno stesso punto sono in equilibrio, quando sono parallele e proporzionali ai lati di un triangolo, e si può formare con esse, mediante semplice spostamento parallelo, un triangolo direttamente simile al primo. Si vede subitoche questa proposizione è semplicemente una forma diversa del teorema del parallelogramma delle forze.

Sostituendo al triangolo un poligono, si ottiene il teorema ben noto del poligono delle forze.

Ora immaginiamo che una parte della massa di un liquido pesante di peso specifico x sia solidificata; sia a un elemento della superficie chiusa di questa parte solidificata e z la distanza di questo elemento dalla superficie del liquido. Sappiamo da ciò che precede che la forza normale, che agisce sopra questo elemento, è $a.\ x.\ z$.

Se alcune forze normali, che sono determinate da $a.\ x.\ z$, ove a denota un elemento di area e z la sua distanza da un dato piano E, agiscono sopra una superficie chiusa verso l'interno di essa, la loro risultante è $V.\ x$, ove V indica il volume limitato dalla superficie. La risultante agisce nel centro di gravità del volume V, è perpendicolare al piano E ed è diretta verso questo piano.

Si consideri una superficie rigida qualunque, limitata da una curva piana chiusa che determina una superficie di area A, sottoposta alle stesse forze: la risultante R delle forze normali alla superficie qualunque è, chiamando Z la distanza del centro di gravità della superficie A dal piano E e γ l'angolo dei piani E ed A, data dall'equazione:

$$R^2 = (A.Z.x)^2 + (V.x)^2 - 2\,A.Z.V.x^2 \cos\gamma.$$

Il lettore, che conosce la matematica, avrà già riconosciuto, nel penultimo teorema, un caso particolare del teorema di Green, che come si sa, consiste essenzialmente in una riduzione d'integrali di superficie ad integrali di volumi od inversamente.

Noi possiamo dunque *distinguere* nel sistema di forze di un liquido in equilibrio, o, se si vuole, *trarre* da questo sistema sistemi di forze più o meno complicati, ed ottenere così, con un mezzo speditivo, teoremi *a posteriori*. È per un mero accidente che Stevino non li abbia scoperti. Il metodo che abbiamo qui seguito è identico al suo: con questo processo si possono sempre fare nuove scoperte.

21. I risultati paradossali, che si ottennero nello studio dei liquidi, costituirono uno stimolo per ulteriori ricerche. Non si può fare a meno di ricordare che fu precisamente in occasione dello studio dei liquidi che si è formata per la prima volta la concezione di un *continuo fisico meccanico*; ciò che servì a sviluppare le idee matematiche assai più libere e più feconde di quello che non fosse possibile anche per lo studio dei sistemi di parecchi corpi solidi. Qui bisogna cercare l'origine delle più importanti teorie moderne della meccanica, ad esempio della teoria del potenziale.

VII. *I principii della statica nella loro applicazione ai gas.*

1. Le stesse considerazioni che sono state fatte pei i liquidi, si possono con lievi modificazioni applicare ai corpi gassosi. Perciò le ricerche sui gaz non hanno grandemente arricchito la meccanica. Tuttavia i primi passi, che furono fatti in questo campo, hanno un gran significato dal punto di vista della storia del progresso della civiltà e della scienza in generale.

Quantunque l'uomo comune, colle sue esperienze sulla resistenza dell'aria, coll'azione del vento, coll'imprigionamento dell'aria nei recipienti, abbia abbastanza opportunità di riconoscere la materialità di questo fluido, tuttavia non è men vero che questa si manifesta ben più raramente di quella dei solidi e

dei liquidi, e mai in un modo così evidente nè così immediato. Questo fatto è in realtà noto, ma non è molto popolare, nè molto familiare da essere considerato come importante. Nella vita ordinaria assai raramente si pensa alla presenza dell'aria.

Qui le antiche idee rasentano quelle moderne. Anassagora dimostra la materialità dell'aria mediante la resistenza che essa oppone alla pressione in otri di cuoio chiusi, e mediante il raccogliere (in forma di bolle?) l'aria compressa nell'acqua (Aristotile, *Phis.*, IV, 9). Empedocle osserva che se s'immagina un vaso, la cui apertura sia rivolta in basso, l'aria impedisce all'acqua di entrarvi (Gomperz, *Griechische Denker*, I, p. 191). Filone di Bisanzio adopera un vaso, il cui fondo, rivolto in alto, ha un orifizio chiuso colla cera; e solo quando si toglie la cera, l'acqua penetra nel vaso immerso, mentre l'aria esce a bolle. Una serie di esperienze consimili vi si trovano descritte in forma analoga a quella in cui oggi spesso si eseguiscono nelle dimostrazioni dei corsi di fisica delle nostre scuole (Philonis, *Liber de ingeniis spiritualibus*, in V. Rose, *Anecdota graeca et latina*). Nella sua pneumatica Erone descrive molte esperienze dei suoi predecessori; ne aggiunge alcune sue proprie; per la *teoria* di esse segue quella di Stratone, che occupa una posizione intermedia tra Aristotile e Democrito. Egli ammette che un *vuoto assoluto e continuo* si può produrre unicamente con mezzi artificiali, quantunque innumerevoli piccoli spazi vuoti siano ripartiti fra le particelle dei corpi, compresa l'aria, precisamente come l'aria fra i granellini di sabbia. Questa teoria è dedotta dalla possibilità di rarefare e condensare i corpi come l'aria (fòntana di Erone), precisamente nello stesso modo semplice seguìto dai nostri odierni trattati elementari. Erone adduce, come argomento in favore della sua ipotesi dell'esistenza dei vuoti (pori) fra le molecole dei corpi, il fatto che i raggi della luce attraversano l'acqua. Secondo Erone ed i suoi predecessori risulta sempre dall'*aumento* artificiale del vuoto un'attrazione delle parti dei corpi che si trovano vicino. Un vaso leggero con una stretta apertura rimane sospeso alle labbra, quando siasi aspirata l'aria.

Allora si può chiuderne l'orifizio col dito ed immergere il vaso nell'acqua. " Se si leva allora il dito, l'acqua sale nel vuoto così formato, benchè il movimento dei liquidi verso l'alto non sia secondo natura. Il fenomeno delle coppette è affatto analogo; non solamente la ventosa non cade, ma essa inoltre attira le molecole vicine attraverso i pori del corpo, su cui è posta ". Erone dà una spiegazione assai particolareggiata del sifone. " Il riempimento del sifone mediante l' aspirazione è dovuto al fatto, che il liquido segue l'aria aspirata, poichè è inconcepibile un vuoto continuo ". Se le due braccia del sifone sono eguali, il liquido non esce: " l'acqua rimane in equilibrio come una bilancia ". Quindi Erone immagina il flusso del liquido analogo al movimento di una catena, la quale, essendo posta sopra una puleggia, è da una parte più lunga che dall'altra.

La continuità della colonna d'acqua, che per noi è dovuta alla pressione dell'aria, è per lui una conseguenza " dell'inconcepibilità del vuoto continuo ". Ora si è perfettamente dimostrato che la più grande massa di acqua non trascina seco la più piccola, e che non è per causa di questo principio che l'acqua può *innalzarsi*; ma piuttosto questo fenomeno può spiegarsi con il principio dei vasi comunicanti. I numerosi apparecchi, alcuni dei quali assai ingegnosi, descritti da Erone nella " *Pneumatica* " e negli " *Automata* ", il cui scopo era di divertire o di provocare lo stupore, richiamano vieppiù la nostra attenzione per il grazioso quadro dello stadio di sviluppo della civiltà che ci presentano, che per l'interessamento scientifico che essi possono avere. Il rimbombo automatico delle trombe, lo spalancamento spontaneo della porta del tempio, accompagnato dal rumore del tuono, non sono invenzioni di ordine scientifico. Tuttavia gli scritti e le idee di Erone hanno molto contribuito alla diffusione delle scienze fisiche (V. N. Schmidt, *Hero's Werke*, Lipsia, 1899, e Diels, *System des Straton*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1893).

Quantunque gli antichi, come si può rilevare dalle descrizioni di Vitruvio, possedessero istrumenti basati sulla compressione dell'aria, come i così detti organi idraulici, quantunque si possa

far risalire a Ctesibio l'invenzione del fucile a vento e che questo istromento sia stato conosciuto da Ottone Guericke, tuttavia nel secolo XVII le idee sulla natura dell'aria erano assai bizzarre ed oscure. Quindi non è da stupirsi, se i primi ed i più importanti esperimenti, fatti secondo questo indirizzo, abbiano provocato un gran movimento intellettuale. Riportandoci a quest'epoca, si comprenderà facilmente l'entusiasmo di Pascal nel descrivere l'esperimento della pompa ad aria di Boyle. Che cosa invero di più meraviglioso che la scoperta istantanea di ciò che noi non vediamo, che noi appena sentiamo e per così dire non osserviamo, che costantemente ci circonda da ogni parte, tutto pervade, che è la condizione più essenziale della vita, della combustione e di giganteschi fenomeni meccanici! Forse fu in occasione di questa scoperta che si comprese per la prima volta chiaramente che la scienza della natura non si limita al solo studio dei fenomeni palpabili e grossolanamente sensibili.

2. All'epoca di Galileo i filosofi spiegavano i fenomeni di assorbimento, l'azione delle siringhe e delle pompe mediante l'*horror vacui*, l'orrore della natura per il vuoto. Si attribuiva alla natura la proprietà d'impedire la formazione di uno spazio vuoto, e di spingere per riempirlo subito le cose immediatamente vicine a mano a mano che esso si produceva. Se si fa astrazione dell'elemento speculativo, impossibile a giustificarsi, che contiene questa concezione, si ammetterà che essa rappresenta sino ad un certo punto i fenomeni. Chi la formulò per la prima volta doveva senza dubbio avere intuìto un principio in questi fenomeni. Questo principio per altro non si verifica in tutti i casi. Si racconta che Galileo fosse assai meravigliato, quando seppe che una pompa costruita di nuovo, ed il cui corpo d'aspirazione era per caso lunghissimo, non poteva innalzare l'acqua a più di 18 braccia italiane. Dapprima egli pensò che l'*horror vacui* (o la *resistenza del vacuo*) possedesse solo una determinata potenza, e chiamò *altezza* limitatissima l'altezza massima, alla quale una pompa poteva elevare l'acqua. Inoltre egli cercò di determinare direttamente il peso necessario

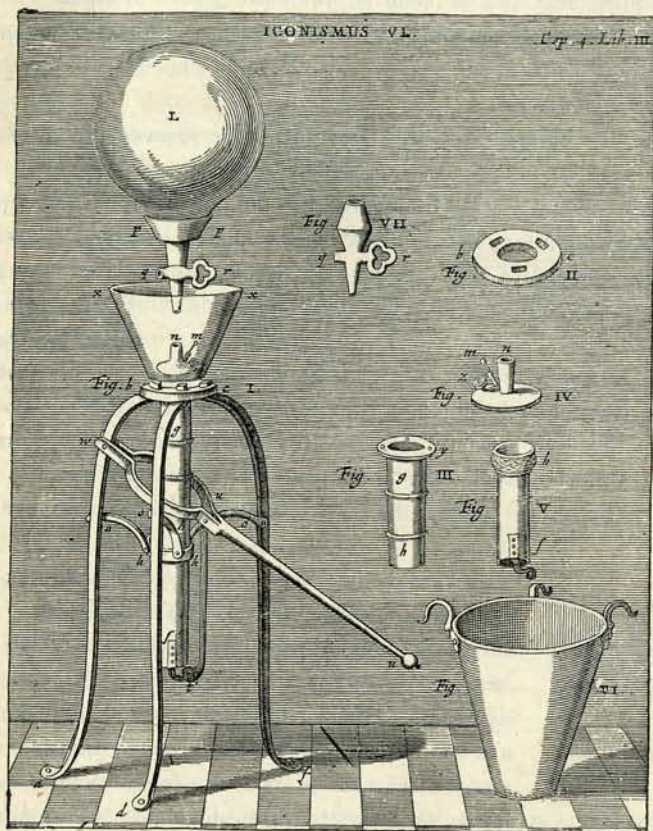
per tirar fuori da un corpo di pompa chiuso uno stantuffo perfettamente adattato riposante sul fondo.

3. Torricelli ebbe l'idea di misurare la resistenza del vuoto con una colonna di mercurio invece che con una colonna d'acqua; e si riprometteva di trovare una colonna di mercurio alta circa $\frac{1}{14}$ dell'altezza di quella di acqua. La sua previsione fu confermata dall'esperienza che fece Viviani nel 1643 nel modo ben noto, e che presentemente porta il nome di esperimento di Torricelli. Un tubo di vetro di quasi un metro di lunghezza, chiuso ad una estremità, è pieno di mercurio; lo si rovescia, dopo aver chiuso col dito l'estremità aperta, che s'immerge in un bagno di mercurio, e poi si tiene il tubo verticalmente. Appena si toglie il dito la colonna di mercurio discende, oscilla e quindi si arresta ad un'altezza di circa 76 centimetri. In seguito a questo esperimento diveniva assai probabile che ciò che spingeva il liquido nello spazio vuoto fosse una determinata pressione. Torricelli indovinò subito qual'era questa pressione.

Galileo aveva tentato già prima di quest'epoca di determinare il peso dell'aria, pesando prima un pallone già riempito di aria, poi pesandolo una seconda volta, dopo avere, mediante il calore, fatto da esso uscire l'aria. Dunque era noto che l'aria era pesante. Ma per la maggior parte degli uomini l'*orrore del vuoto* e la gravità dell'aria eran nozioni ben disparate. È probabile che per Torricelli queste due idee fossero assai prossime fra loro da condurlo all'idea che tutti i fenomeni attribuiti all'*orrore del vuoto* potessero spiegarsi in modo più semplice e più logico colla pressione dovuta al peso di una colonna fluida, cioè della colonna di aria. Torricelli in questo modo scoprì la pressione atmosferica; fu anche il primo ad osservare i cambiamenti di questa pressione per mezzo della colonna di mercurio.

4. Il nuovo esperimento di Torricelli fu reso noto in Francia dal padre Mersenne, e conosciuto da Pascal nel 1644. Il ragguaglio che venne dato a quest'ultimo della teoria di questo

esperimento, fu probabilmente così incompleto, che fu costretto a ristudiarlo indipendentemente (*Pesanteur de l'air*, Paris, 1663).

Egli ripetè l'esperimento col mercurio e poi coll'acqua, o piuttosto col vino rosso, servendosi di un tubo lungo 40 piedi.

Pompa ad aria di Guericke.

Inclinando il tubo, subito ebbe la certezza che lo spazio al di sopra della colonna liquida era vuoto; e fu costretto di dovere difendere quest'opinione contro i violenti attacchi dei suoi concittadini. Pascal produceva facilmente il vuoto, di cui negavasi la possibilità, mediante una siringa di vetro, la cui apertura veniva

chiusa col dito e tenuta immersa nell'acqua; ed allora lo stantuffo di essa si poteva tirar su senza grande sforzo. Inoltre Pascal dimostrò che in un sifone curvo, alto 40 piedi, pieno di acqua, essa non iscorre se il tubo si tiene verticalmente, ma invece scorre, quando lo si inclina in modo conveniente. Rifece lo stesso sperimento in proporzioni più piccole col mercurio; nello stesso sifone il liquido scorreva o non iscorreva secondo che lo si teneva inclinato o verticale.

In un successivo lavoro Pascal si riferì espressamente al fatto della gravità dell'aria ed alla pressione dovuta al suo peso. Dimostrò che nei fluidi gli animaletti, come per esempio le mosche, possono sopportare senza alcun danno un'alta pressione, purchè essa si eserciti in tutti i sensi; ed applicò questa osservazione ai pesci ed agli animali, che vivono nell'aria. Il merito principale di Pascal consiste nell'avere stabilito la completa analogia fra i fenomeni prodotti dalla pressione dovuta ai liquidi (pressione dell'acqua) e quelli che produce la pressione atmosferica.

5. Con una serie di esperimenti Pascal dimostrò che la pressione atmosferica fa salire il mercurio in uno spazio vuoto di aria nello stesso modo che la pressione dell'acqua fa salire il mercurio in uno spazio vuoto di acqua. Se si immerge in un vaso profondo pieno di acqua (fig. 81) un tubo, alla cui estremità è fissato un sacchetto pieno di mercurio, avendo cura di non immergere l'estremità superiore, la pressione dell'acqua fa salire il mercurio nel tubo a misura che lo s'immerge nel vaso. Lo stesso esperimento si può fare con un tubo a sifone o con un tubo aperto alla sua estremità inferiore. Indubbiamente fu l'attento esame di questo fenomeno che fece nascere nella mente di Pascal l'idea, che l'altezza della colonna barometrica dovesse essere necessariamente minore sulla vetta di un monte che alle sue falde, e quindi poteva servire alle determinazioni delle altitudini. Egli comunicò quest'idea a suo cognato, Périer, che subito

Fig. 81.

compì felicemente l'esperimento sulla vetta del Puy-de-Dôme (19 settembre 1648).

Inoltre Pascal attribuì alla pressione atmosferica il fenomeno dell'adesione delle lastre; ne diede un esempio colla resistenza che si prova quando si vuole sollevare bruscamente un gran cappello posto in piano sopra un tavolo. Il masso di legno, che rimane aderente al fondo del vaso pieno di mercurio, è un fenomeno analogo.

Pascal imitò il fenomeno del flusso nei sifoni mediante la pressione dell'acqua, prodotta dalla pressione atmosferica. Un tubo a tre rami che (fig. 82) ha i due bracci a gomito *a* e *b* disuguali; le loro estremità inferiori sono aperte ed immerse nei vasi *d* ed *e* pieni di mercurio. L'intiero apparecchio è immerso in un vaso pieno di acqua, di una conveniente profondità, in modo che il tubo più lungo *aperto* sovrasti il livello dell'acqua. Allora si vedrà salire il mercurio gradatamente nei rami *a* e *b*, finalmente unirsi le due colonne mercuriali e stabilirsi una corrente di mercurio, che va dal vaso *d* al vaso *e* attraverso il sifone aperto nella sua parte superiore.

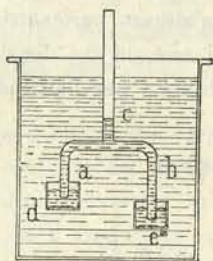



Fig. 82.

Pascal modificò in modo assai ingegnoso l'esperimento di Torricelli. Un tubo della forma *abcd* (fig. 83), di una lunghezza presso a poco doppia di quella dei barometri ordinari, è pieno di mercurio. Le aperture *a* e *b* si chiudono coi diti, ed il tubo si mette in un bagno di mercurio con la estremità *a* in basso. Se si apre quest'ultima, il mercurio che è in *cd*, discende nella parte più larga *c* del tubo, ed il mercurio in *ab* scende fino al livello barometrico ordinario; in *b* si produce un vuoto ed il dito è premuto così forte contro l'orifizio, che si sente un certo dolore. Se ora si apre *b*, la colonna di mercurio *ab* discende intieramente, ed il mercurio rimane in *c*; sottoposto ora alla pressione atmosferica sale nel tubo *cd* sino

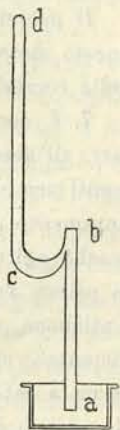



Fig. 83.

all'altezza della colonna barometrica. Senza la macchina pneumatica era assai difficile mettere insieme questo esperimento e il suo contro-esperimento in un modo più semplice e più ingegnoso di quello che abbia fatto Pascal.

6. Con brevi osservazioni completeremo ciò, che abbiamo detto intorno all'esperimento del Puy-de-Dôme. Sia b_o l'altezza barometrica al livello del mare; supponiamo che essa divenga kb_o, ove k è una frazione, quando ci eleviamo di m metri. Per una elevazione di altri m metri, dobbiamo aspettarci di ottenere un'altezza barometrica $k.kb_o$, poichè ora passiamo da uno strato di aria, la cui densità sta a quella del primo strato come $k:1$. Dunque per l'altitudine $h = nm$ metri l'altezza barometrica sarà:

$$b_n = k^n . b_o ;$$

da cui:

$$n = \frac{\log b_n - \log b_o}{\log k} ;$$

e quindi è:

$$h = \frac{m}{\log k} (\log b_n - \log b_o)$$

Il principio del metodo come si vede è semplicissimo; ma questo metodo diviene assai complicato mediante la moltiplicità delle correzioni dovute alle circostanze accessorie.

7. I contributi più originali ed importanti furono apportati all'aereostatica da *Ottone di Guericke*. I suoi esperimenti sembra siano stati provocati da considerazioni d'ordine puramente filosofico; d'altra parte sono del tutto originali, poichè egli solo udì parlare dell'esperimento di Torricelli per la prima volta da Valeriano Magnus nel 1654 alla Dieta di Ratisbona, ove egli dava la dimostrazione delle scoperte sperimentali, che aveva fatto verso il 1650. Questa opinione è confermata dal metodo di costruzione del suo barometro ad acqua, il quale è del tutto differente da quello di Torricelli.

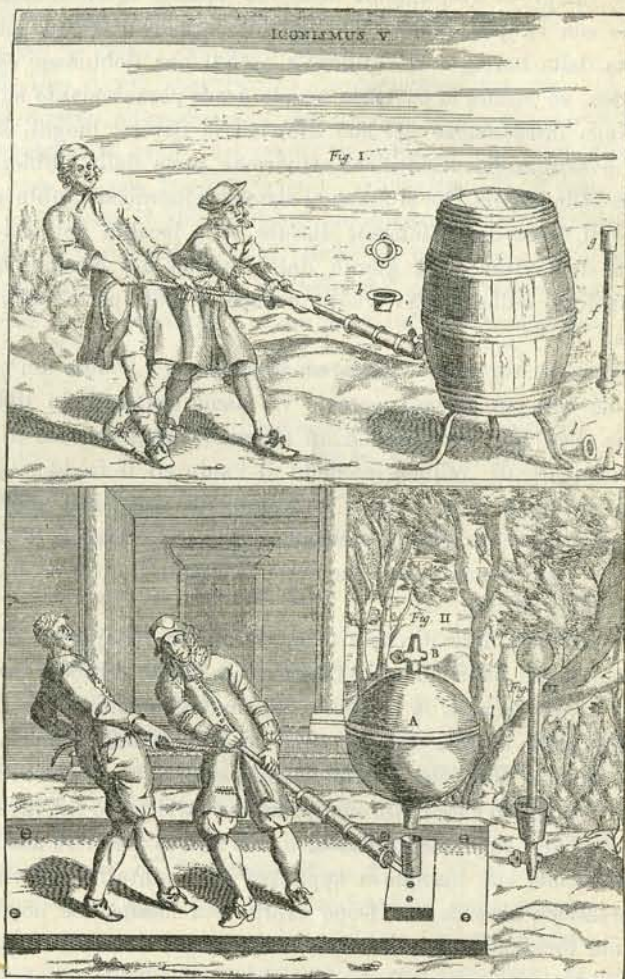
Il libro di Guericke (*Experimenta nova, ut vocantur, Magdeburgica*, Amsterdam, 1672) mostra in maniera attraente la ristrettezza del modo di vedere de' suoi tempi. Il fatto, che egli

abbia potuto gradatamente abbandonare queste vedute e mediante il proprio lavoro acquistarne altre più chiare, costituisce una prova irrefragabile della sua capacità intellettuale. Vediamo con istupore quanto sia breve il periodo di tempo, che ci separa dalla barbarie scientifica; e quindi non dobbiamo essere sorpresi, se ancora la barbarie sociale grava pesantemente su noi.

Nella introduzione del suo libro ed in diversi luoghi, fra le sue investigazioni scientifiche, Guericke parla delle obbiezioni, tratte dalla Bibbia, che si fanno al sistema copernicano (obbiezioni che egli cerca di confutare); discute sulla località del cielo, su quella dell'inferno, sul giorno del Giudizio. Le considerazioni metafisiche sullo spazio vuoto occupano gran parte della sua opera.

Guericke riguarda l'aria come l'esalazione o l'odore dei corpi, che noi non percepiamo, perchè vi siamo abituati fin dall'infanzia. Per lui l'aria non è un elemento. Egli conosce i suoi cambiamenti di volume secondo il caldo ed il freddo, la sua compressibilità dalla fontana di Erone; dà, basandosi sulle sue proprie esperienze, la sua pressione, che è di 20 braccia d'acqua; e parla espressamente del suo peso, mediante il quale le fiamme si dirigono in alto.

8. Per produrre il vuoto Guericke si servì dapprima di una botte di legno, nella cui parte inferiore era fissato il tubo di aspirazione di una pompa da incendio. Seguendo lo stantuffo ed il suo proprio peso, l'acqua doveva cadere nel corpo della pompa ed essere espulsa. Guericke si aspettava in seguito a ciò, che vi rimanesse uno spazio vuoto. Nei suoi primi tentativi trovò che la pompa non era ben solidamente fissata e non poteva resistere alla forza grandissima, che bisognava applicare allo stantuffo per vincere la pressione atmosferica. Dopo averla ben fissata, tre uomini di grande forza muscolare poterono incominciare a fare il vuoto; ma tosto l'aria penetrò strepitosamente da tutte le fessure della botte, e non si ottenne alcun vuoto. In un successivo esperimento mise in una gran botte piena una botte più piccola, riempita pur essa di acqua. Si propose di trarre l'acqua dalla botte più piccola; ma

l'acqua della più grande vi penetrò a poco a poco; avendo così constatato che il legno non gli permetteva di conseguire il risul-

Il primo esperimento di Guericke.

tato voluto, ed avendo, nel suo ultimo esperimento, osservato alcuni segnali di riuscita, Guericke prese una grande sfera

cava di rame, e si propose di estrarne direttamente l'aria. Infine l'estrazione dell'aria andò bene, e fu fatta senza troppa fatica; ma dopo alcuni colpi di stantuffo la estrazione divenne così difficile, che gli sforzi uniti di due uomini robusti (*viri quadrati*) potevano a fatica muovere lo stantuffo. Poi essendo stata l'estrazione spinta un po' più innanzi, la sfera si schiacciò istantaneamente con una violenta detonazione. Infine impiegando un recipiente di rame di forma perfettamente sferica, riuscì a produrre il vuoto. Guericke descrive la violenza con cui l'aria si precipitò nel recipiente, appena fu aperto il rubinetto.

9. Dopo questi esperimenti Guericke costruì una pompa speciale ad aria. Il recipiente, in cui si faceva il vuoto, era formato di una grande sfera di vetro chiusa da una ghiera, munita di un gran rubinetto staccabile, il quale permetteva di introdurre nella sfera gli oggetti, su cui si voleva sperimentare. Per assicurarsi che la sfera era chiusa ermeticamente, si immergeva il rubinetto in un vaso d'acqua, posto sopra un treppiedi, su cui si trovava la pompa propriamente detta. In seguito Guericke si servì nelle esperienze anche di altri recipienti separati, che metteva in comunicazione con la sfera pneumatica.

Per mezzo del suo apparecchio Guericke potè già osservare un gran numero di fenomeni. Osservò subito il rumore dell'urto dell'acqua contro le pareti del recipiente vuoto di aria, l' irrompere violento dell'acqua e dell'aria nel recipiente, quando il rubinetto veniva bruscamente aperto, lo sprigionamento dei gas sciolti nei liquidi, o, come lo chiama Guericke, la messa in libertà dell'esalazione. Osservò che un lume acceso si spegne nel vuoto, perchè, dice egli, esso trae il suo nutrimento dall'aria. Nella sua opera osserva formalmente, che la combustione non è un'annullamento dell'aria, ma bensì una trasformazione. La campana non suona nel vuoto. Gli uccelli vi muoiono; molti pesci si gonfiano e poi scoppiano. Un grappolo di uva posta nel vuoto conserva la sua freschezza più di dieci mesi.

Egli costrusse un barometro ad acqua, facendo comunicare un lungo tubo immerso nell'acqua con un cilindro vuoto d'aria;

trovò che l'altezza della colonna d'acqua è di 19-20 braccia; spiegò mediante la pressione atmosferica tutti gli effetti attribuiti fino allora all'orrore del vuoto.

Uno dei suoi esperimenti più importanti consisteva nella pesata di un recipiente prima pieno e poi vuoto di aria. Il peso dell'aria cambia secondo le circostanze (temperatura e pressione atmosferica). Secondo Guericke non esiste un rapporto *determinato* fra il peso dell'aria e quello dell'acqua.

Gli esperimenti, che fecero maggiore impressione sui suoi contemporanei, furono quelli riguardanti la pressione atmosferica. Fece il vuoto in una sfera cava formata di due emisferi sovrapposti; per distaccarli occorse lo sforzo di ben 16 cavalli; la separazione fu accompagnata da una violenta detonazione. La stessa sfera fu anche sospesa ad una trave, ed un piatto da bilancia pesantemente caricato fu attaccato all'emisfero inferiore. Un altro dei suoi esperimenti è il seguente: un corpo di pompa di grosso diametro è chiuso da uno stantuffo, cui è attaccata una robusta corda, che passa in una puleggia e si divide in seguito in numerose diramazioni, per poter attaccare ad esse un gran numero di persone. Appena si fece comunicare il corpo della pompa con un recipiente vuoto di aria, tutte le persone furono stramazzate al suolo. Si arrivò, mediante lo stesso processo, ad innalzare un peso grandissimo.

Guericke parla del fucile ad aria compressa come di una cosa già nota; costrusse egli stesso un istromento, che si potrebbe chiamare fucile ad aria rarefatta. Una palla è lanciata dalla pressione atmosferica esterna in un tubo, in cui il vuoto è fatto rapidamente; giunta all'estremità, essa respinge una leggera valvola, che chiude il tubo; e quindi ne esce con grande velocità.

I vasi chiusi, trasportati sulla cima di un monte e solo allora aperti, lasciano sfuggire l'aria; poi chiusi, e quindi riportati alle falde del monte, essi aspirano l'aria. Da questi e da altri esperimenti Guericke riconobbe anche che l'aria è elastica; e lo constatò pure mediante altri esperimenti.

10. Le ricerche di Guericke furono continuate in Inghilterra da Roberto Boyle (1), il quale non aggiunse che un piccolo numero di nuovi sperimenti. Osservò la propagazione della luce nel vuoto e notò che l'azione della calamita vi continuava egualmente; incendiò l'esca mediante una lente ustoria; mise il barometro nel corpo della pompa ad aria e fu il primo a costruire un manometro. Osservò per primo l'ebollizione dei liquidi caldi ed il raffreddamento dell'acqua nell'aria rarefatta.

Bisogna anche ricordare, fra gli esperimenti fatti in quest'epoca mediante la pompa ad aria, l'esperienza della caduta dei corpi nel vuoto, che conferma in modo assai semplice l'opinione di Galileo, che tutti i corpi pesanti o leggeri cadrebbero con la stessa velocità, se non vi fosse la resistenza dell'aria. Perciò si mette in un lungo tubo un pezzettino di carta ed una pallina di piombo; poi si fa il vuoto; si pone il tubo verticalmente, poi lo si fa ruotare bruscamente di 180° intorno ad un asse orizzontale: i due corpi giungono insieme in fondo.

Fra i dati quantitativi accenneremo ai seguenti: Il peso specifico del mercurio è 13,59, e la pressione dell'aria essendo quella di una colonna di mercurio di 76 centimetri di altezza, si trova facilmente che la pressione atmosferica è di kg. 1,0328 per centimetro quadrato. Il peso di 1000 centimetri cubi d'aria a 0° centigradi e 760 millimetri di pressione è di kg. 1,293; il peso specifico dell'aria rispetto all'acqua è dunque 0,001293.

11. Guericke non conosceva che *una specie* di aria. Quindi noi possiamo immaginare quale impressione facesse la scoperta dell'anidride carbonica (aria fissa) compiuta da Black nel 1755, e quella dell'idrogeno (aria infiammabile) fatta da Cavendish nel 1766, scoperte che subito furono seguite da altre analoghe. È facilissimo osservare che questi differenti gas hanno proprietà fisiche diverse. Faraday ha messo in evidenza la loro grande

---

(1) Boyle pubblicò i suoi esperimenti nel 1660, prima che fosse pubblicata l'opera di Von Guericke.

(N. d. t.).

differenza di densità mediante un graziosissimo esperimento da lezione. Se ai bracci di una bilancia si sospendono (fig. 84) due vasi di vetro cilindrici, l'uno di essi A aperto in alto, l'altro B aperto in basso, e si stabilisce l'equilibrio, si può empire allora dall'alto il vaso A di anidride carbonica, più pesante dell'aria, e riempire dal basso il vaso B d'idrogeno, più leggiero dell'aria. Nei due casi la bilancia s'inclina dalla parte e nella direzione della freccia. Presentemente, come è noto, si può con metodi ottici di Foucault e Toeppler rendere direttamente visibile il flusso dei gas.

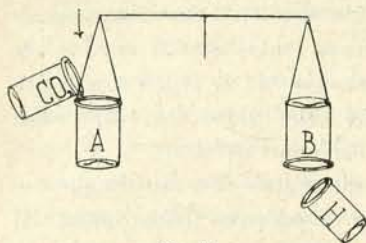



Fig. 84.

12. Subito dopo la scoperta di Torricelli furono fatti dei tentativi per utilizzare il vuoto così prodotto; si cercò di costruire una macchina pneumatica a mercurio; ma solo in questo secolo si è ottenuto un risultato degno di essere ricordato. Le macchine pneumatiche a mercurio, di cui oggi ci serviamo, non sono in sostanza che barometri, la cui estremità superiore è molto larga, e dove il livello del mercurio può facilmente variare. In questa macchina il mercurio fa da stantuffo della macchina pneumatica ordinaria.

13. La forza elastica dell'aria, dapprima osservata da Guericke, fu studiata con più precisione da Boyle ed in seguito da Mariotte. Entrambi trovarono la legge seguente: " Sia V il volume di una quantità *data* di gas e P la pressione esercitata da questo gas sull'unità di superficie del recipiente che lo contiene; il prodotto V . P è costante. Così se il volume del gas si riduce alla metà, la pressione esercitata sulla unità di superficie diviene doppia; se il volume del gas è doppio, la pressione diviene metà, ecc. È giusto — come l'hanno rivendicato in questi ultimi tempi certi autori inglesi — di attribuire a Boyle, e non a Mariotte, la scoperta di questa legge, generalmente conosciuta col nome di legge di Mariotte. Ma inoltre si può aggiungere

che Boyle sapeva già che la legge non era che approssimata, ciò che era sfuggito a Mariotte.

Mariotte stabilì la legge con un metodo semplicissimo. Prese un tubo di Torricelli e lo riempì in parte di mercurio; misurò il volume di aria restante ed eseguì l'esperimento di Torricelli. Ottenne così un nuovo volume per la stessa quantità d'aria, e la nuova pressione gli era data dalla differenza fra la sua colonna di mercurio e quella barometrica. Per comprimere l'aria Mariotte impiegava un tubo ricurvo a rami verticali; l'aria si trovava nel più corto dei due rami, che era chiuso. Il ramopiù lungo rimaneva aperto per potervi versare il mercurio. Il volume dell'aria era indicato dalla graduazione del tubo e, per avere la sua pressione, bastava aggiungere l'altezza barometrica alla differenza dei livelli del mercurio.

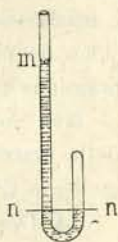



Fig. 85.

Presentemente si fanno questi due esperimenti in modo assai semplice: si prende un tubo di vetro, chiuso nella sua estremità superiore e fissato ad un'asta verticale graduata, lungola quale può scorrere un tubo $r'r'$ (fig. 86), aperto alle due estremità; le estremità inferiori di questi due tubi comunicano per mezzo di un tubo di caoutchouc kk. Riempiendo parte del tubo col mercurio, si può, mediante lo spostamento di $r'r'$, ottenere una differenza qualunque dei livelli del mercurio nei due rami; allora occorre solo leggere sulla scala il volume corrispondente dell'aria contenuta in rr.

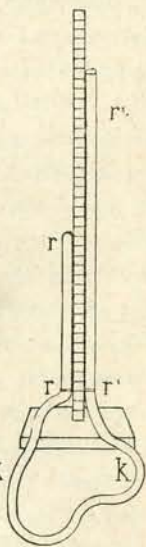



Fig. 86.

Mariotte intraprese queste ricerche in occasione dell'osservazione seguente: egli osservò che una piccola quantità di aria sostiene ancora la colonna barometrica, quando la si separa totalmente dal resto dell'atmosfera, benchè essa non sia più direttamente influenzata dal peso di questa — ciò ad esempio si verifica quando si chiude l'estremità aperta del tubo barometrico.

La spiegazione semplice di questo fenomeno, che naturalmente Mariotte trovò subito, consiste in ciò che, prima della chiusura, la parte di aria ora chiusa è compressa precisamente tanto, quanto è necessario, affinchè la sua tensione faccia equilibrio alla pressione dovuta al peso della atmosfera, cioè per esercitare una pressione elastica equivalente.

Non entreremo nei particolari della disposizione e dell'uso della macchina pneumatica. Essi si possono spiegare mediante la legge di Boyle-Mariotte.

14. Osserveremo ancora soltanto che le scoperte areostatiche parvero così nuove e così meravigliose, che diedero alla scienza un impulso, di cui sarebbe difficile apprezzare il valore.

CAPITOLO SECONDO.

Lo sviluppo dei principî della dinamica

I. *I lavori di Galileo.*

1. Ora passeremo a discutere i principî della dinamica. La dinamica è una scienza tutta moderna. Tutte le speculazioni meccaniche degli antichi, particolarmente dei Greci, riguardano la statica. Il fondatore della dinamica è Galileo. Ce ne possiamo convincere con la semplice considerazione di alcune proposizioni degli aristotelici, che erano sostenute ai tempi di Galileo. Per spiegare la caduta dei corpi pesanti e l'ascesa dei corpi leggeri (ad esempio nei liquidi o nell'aria), si diceva che ciascun corpo cerca il suo *luogo*, e che i più pesanti hanno il loro luogo in basso, i più leggeri stanno in alto. Si distinguevano i movimenti in moti naturali come quello della caduta dei gravi, ed in moti violenti come quello dei proietti. Si deduceva da un piccolissimo numero di osservazioni e di esperienze superficiali la conclusione, che i corpi pesanti cadono più velocemente ed i corpi leggeri più lentamente, o più esattamente che i corpi maggiormente pesanti cadono più velocemente e quelli meno pesanti meno velocemente. Queste poche osservazioni mostrano a sufficienza quanto le cognizioni dinamiche degli antichi, e particolarmente dei Greci, fossero insignificanti; spettò dunque ai tempi moderni di gettar le basi della scienza del moto.

Si è spesso asserito, e da più parti, che le idee di Galileo non avessero alcuna corrispondenza con quelle dei suoi illustri predecessori. Sarebbe semplicemente puerile dissimularlo: ma

Galileo li supera tutti di gran lunga. Il più grande dei predecessori di Galileo è Leonardo da Vinci (1452-1519), di cui si è parlato nel capitolo precedente. Ma i suoi lavori non ebbero alcuna influenza sul progresso scientifico, poichè essi furono pubblicati per la prima volta solamente nel 1797 da Venturi e solo in parte. Leonardo da Vinci conosceva il rapporto dei tempi corrispondenti alle cadute, secondo l'altezza e secondo la lunghezza del piano inclinato. Forse conosceva anche il principio d'inerzia.

È incontestabile che tutti gli uomini hanno una certa conoscenza istintiva di una resistenza all'inizio del moto; ma Leonardo da Vinci sembra essere andato ancora più in là. Essendo data una colonna di dadi, egli sapeva che si può lanciarne *uno* fuori della colonna senza punto disturbare gli altri; sapeva anche che un corpo messo in moto si muove più lungamente, se la resistenza è minore; ma egli credeva che il corpo cercasse di compiere *una lunghezza di percorso* proporzionale all'impulso; Leonardo da Vinci non parla espressamente mai della persistenza al moto, quando gl'impedimenti sono completamente rimossi (Confrontare Wohlwill: *Bibliotheca mathematica;* Stocolma, 1888, p. 19). Benedetti (1530-1590) conosceva l'accelerazione della caduta dei gravi; egli l'attribuiva all'incremento degli impulsi successivi della gravità (*Divers. speculat. math. et phys. liber,* Taurini, 1585). Egli attribuiva la continuazione del moto di un corpo lanciato non affatto, come i peripatetici, all'influenza del mezzo, ma ad una certa *virtus impressa,* senza pertanto pervenire a risolvere compiutamente il problema. I lavori giovanili di Galileo si accostano a quelli di Benedetti, i quali pare che Galileo abbia posto a profitto. Anche Galileo accetta una *virtus impressa,* ma la considera come decrescente in efficacia; e pare, secondo Wohlwill, che solo nel 1604 egli fosse in possesso compiuto delle leggi della caduta dei corpi.

Il prof. Giovanni Vailati, che ha dedicato uno studio speciale ai lavori di Benedetti (*Atti della R. Accademia di Torino;* volume XXXIII, 1898), ha mostrato che Benedetti ha reso

un servigio capitale, esaminando le concezioni aristoteliche da un punto di vista critico e matematico, correggendole e tentando di scoprire le contraddizioni che contengono; così egli preparava la via ad un ulteriore progresso. Gli aristotelici supponevano comunemente che la velocità della caduta fosse in ragione inversa della densità del mezzo ambiente; e Benedetti dimostrò che questa ipotesi è inammissibile, o per lo meno che essa può reggere solo in casi particolari. Egli ammise che la velocità è proporzionale alla differenza $p - q$ fra il peso p del corpo e la spinta q, ch'esso subisce da parte del mezzo. Se in un mezzo di densità doppia il corpo cade con una velocità eguale alla metà della velocità precedente, allora si avrà:

$$p - q = 2\,(p - 2\,q),$$

la quale condizione si verifica solo quando è:

$$p = 3\,q\,.$$

Per Benedetti un corpo *leggero* in sè non esiste; egli attribuiva all'aria un peso ed una spinta; considerò parecchi corpi *identici* cadenti insieme gli uni accanto agli altri, una prima volta liberi, una seconda collegati fra loro; e, siccome questo legame non può cambiare in nulla il fenomeno della caduta, ne dedusse che i corpi ineguali della stessa sostanza cadono con la stessa velocità. Qui dunque egli si avvicina al modo di pensare di Galileo, quantunque questi approfondisca ancor più il problema. I lavori di Benedetti contengono tuttavia ancora non pochi errori; egli crede, per esempio, che le velocità di due corpi dello stesso volume e della stessa forma stiano fra loro come i loro pesi o come le loro densità. Inoltre bisogna segnalare le sue interessanti ricerche sulla fionda ed il suo studio dell'oscillazione di un corpo da una banda e dall'altra del centro della Terra in un canale, che diametralmente attraversa il globo terrestre; in questi lavori havvi ben poco da criticare. I corpi lanciati orizzontalmente gli sembrarono avvicinarsi più lentamente al suolo; e per questa ragione egli crede alla dimi-

nuzione del peso di una trottola, che ruota intorno ad un asse verticale. Benedetti non risolve compiutamente i problemi, che egli si è posti, ma ne prepara la loro soluzione.

2. Nel trattato " *Discorsi e dimostrazioni matematiche* ", pubblicato nel 1638, Galileo espose le sue prime ricerche sulle leggi della caduta dei gravi. Galileo possiede lo spirito moderno: egli non si chiede *perchè* i corpi cadano, ma bensì *come* essi cadano, con qual *legge* si muova un corpo, che cade liberamente? Per determinare queste leggi, egli fa certe ipotesi; ma, al contrario di Aristotile, non si limita a proporle soltanto, ma cerca di provarne l'esattezza mediante l'esperienza.

Siccome la velocità di un corpo che cade evidentemente va crescendo di continuo, gli parve primieramente ragionevole di ammettere che questa velocità è doppia dietro un cammino percorso doppio, tripla al termine di un cammino triplo; brevemente che le velocità acquistate con la caduta crescono proporzionalmente agli spazi percorsi. Prima di verificare questa ipotesi con la esperienza, esaminò se le conseguenze che si possono logicamente dedurne, non la infirmino. Egli ragiona così: se un corpo acquista una certa velocità dopo essere caduto da una certa altezza, una velocità doppia dopo una caduta di altezza doppia e così via; siccome la sua velocità nella seconda caduta è doppia della velocità che ha nella prima, ne consegue che il secondo cammino, che è doppio, è percorso nello stesso tempo del primo, che è semplice. Ora nel caso di un cammino doppio da percorrere, siccome la prima metà deve essere percorsa subito, si vede che non rimarrebbe alcun tempo per percorrere la seconda metà. La caduta dei corpi perciò sarebbe un trasporto istantaneo; ciò sarebbe non solo contradditorio con l'ipotesi, ma ancora con la esperienza oculare. Ritorneremo altresì più tardi su questo ragionamento errato.

3. Galileo credendo di avere dimostrato che la sua prima ipotesi non fosse ammissibile, in seguito suppose che la velocità acquistata fosse proporzionale alla durata della caduta. Onde se un corpo cade due volte di seguito in modo che la seconda ca-

duta duri un tempo due volte maggiore della prima, la velocità acquistata nella seconda caduta sarà doppia della velocità acquistata nella prima. Non avendo scoperto alcuna contraddizione in questa ipotesi, Galileo procedè quindi a verificare sperimentalmente se essa fosse conforme ai fatti. Era assai difficile dimostrare direttamente che le velocità crescono proporzionalmente ai tempi; ma gli parve d'altra parte più facile determinare la legge secondo la quale lo spazio percorso cresce con la durata della caduta. Perciò dedusse dalla sua ipotesi la relazione fra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo, e studiò questa relazione sperimentalmente. La sua deduzione è semplice, chiara e perfettamente esatta. Egli rappresentò i tempi trascorsi con segmenti, presi sopra una retta; innalzò alle loro estremità le perpendicolari (ordinate) per rappresentare le velocità acquistate. Così un segmento qualunque OG della retta OA rappresenta la durata di una caduta e la perpendicolare corrisponpente GH la velocità acquistata.

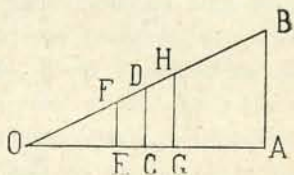



Fig. 87.

Considerando ora il modo, con cui aumenta la velocità, Galileo osservò che all'istante C, in cui è trascorsa la metà della durata OA della caduta, la velocità acquistata CD è la metà della velocità finale AB, e che per due istanti E e G equidistanti dall'istante C, l'uno precedente e l'altro successivo, le velocità (EF e GH) sono egualmente differenti dalla velocità *media* CD, l'una in difetto, l'altra in eccesso. Ora a ciascun istante che precede C ne corrisponde uno equidistante, che lo segue. Dunque se si paragona il moto reale con un moto *uniforme,* la cui velocità sarebbe la semi-velocità finale, si vede che ciò che si è perduto col moto reale sul moto uniforme nella prima metà, si è riguadagnato nella seconda. Indicando con v la velocità acquistata durante il tempo t, si ha, poichè essa è proporzionale a t, $v = gt$, ove g denota la velocità acquistata nell'unità di

tempo, la così detta accelerazione. Allora lo spazio percorso s è dato dalla formula:

$$s = \frac{gt}{2} \cdot t = \frac{1}{2} gt^2 .$$

Si chiama *moto uniformemente accelerato* quel moto, in cui, secondo l'ipotesi, la velocità aumenta di quantità eguali in tempi eguali.

La tavola seguente dà le durate della caduta, le velocità acquistate e gli spazi percorsi corrispondenti:

t	v	s
1	$1 . g$	$1 . 1 . \frac{g}{2}$
2	$2 . g$	$2 . 2 . \frac{g}{2}$
3	$3 . g$	$3 . 3 . \frac{g}{2}$
4	$4 . g$	$4 . 4 . \frac{g}{2}$
. . .	. . .	. . .
t	$t . g$	$t . t . \frac{g}{2}$

4. La relazione fra t ed s si può verificare sperimentalmente; e Galileo fece questa verificazione nel modo già veduto.

Innanzi tutto osserviamo che nessuna delle nozioni e dei dati, che ci sono ora familiari, erano conosciute a quell'epoca; invece spettava a Galileo a scoprirli. Quindi era impossibile per lui procedere come ora noi facciamo; onde era costretto a seguire un metodo diverso. Allo scopo di potere osservare con maggior precisione il moto della caduta dei gravi, Galileo subito cercò di ritardarlo. Prese a considerare il caso di diverse sfere che ruzzolassero nelle scanalature di un piano inclinato, e suppose che questo procedimento rallentasse solamente la velocità del moto senza cambiare la forma della legge della caduta. L'ipotesi che

si tratta di verificare richiede che le scanalature di lunghezze 1, 4, 9, 16. . . . . corrispondano a cadute di durate rispettive 1, 2, 3, 4. . . . .; l'esperienza confermò il risultato teorico. Occorreva l'osservazione dei tempi, che Galileo misurò in modo assai ingegnoso. Allora non esistevano gli odierni cronometri; la loro costruzione fu possibile solo in seguito all'acquisto delle conoscenze dinamiche, di cui Galileo gettò le basi. A quell'epoca si adoperavano orologi meccanici, assai poco precisi, i quali potevano servire a misurare solo approssimativamente i grandi lassi di tempo; i più comuni erano gli orologi ad acqua ed a sabbia, già usati nei tempi antichi. Galileo costruì un orologio ad acqua assai semplice, il quale, cosa poco comune per quell'epoca, fu particolarmente adoperato per misurare tempi di durata brevissima; esso consisteva in un vaso di grandissima sezione, pieno d'acqua, il cui fondo aveva un piccolo pertugio, che si poteva chiudere col dito. Come la sfera incominciava a muoversi sul piano inclinato, Galileo, togliendo il dito, apriva l'orifizio; l'acqua zampillava ed era raccolta in un recipiente, posto sopra una bilancia; ed all'istante, in cui la sfera compiva il determinato cammino, egli richiudeva l'orifizio. A cagione della gran sezione del vaso la pressione non variava in modo sensibile, quindi il peso dell'acqua uscita era proporzionale al tempo. In questo modo Galileo effettivamente dimostrò che se i tempi crescevano come la serie naturale dei numeri intieri, mentre gli spazi percorsi crescevano rispettivamente come i loro quadrati. L'esperienza confermò quindi le conseguenze dell'ipotesi, e perciò l'ipotesi stessa.

Per comprendere appieno il cammino del pensiero nella mente di Galileo, bisogna ricordarsi che prima di ricorrere all'esperienza egli già possedeva le esperienze istintive. L'occhio segue il corpo che cade tanto più difficilmente, quanto più tempo impiega o quanto più spazio ha percorso nella sua caduta; l'urto, che il corpo dà alla mano che lo riceve, diventa nello stesso tempo vieppiù sensibile, e il rumore che fa urtando gli oggetti diviene sempre maggiore. Onde la velocità cresce con la durata della caduta e la lunghezza del cammino percorso; per l'uso scien-

tifico, la rappresentazione mentale delle esperienze sensibili deve essere ancora rappresentata *concettualmente*. In questo modo tali esperienze si possono utilizzare per trovare una proprietà *dipendente* da un fatto, o per completare una proprietà parzialmente stabilita mediante una *costruzione astratta di calcoli*, fondata sopra un *apprezzamento astratto* della proprietà caratterizzata. Questa rappresentazione si fa mettendo in evidenza i punti ritenuti come importanti, trascurando ciò che è accessorio, mediante l'*astrazione*, l'*idealizzazione*. L'esperienza poi decide se essa è o no sufficiente. Senza una qualsiasi concezione preesistente ogni esperienza è in generale impossibile, poichè questa riceve precisamente la sua forma dalla concezione antecedente, che si ha. Infatti quali sarebbero il mezzo e lo scopo della ricerca, se non si avesse già una certa tendenza? La via, in cui l'esperienza deve incamminarsi per *completarsi*, dipende dai dati acquistati in precedenza. L'esperienza sostiene, modifica o rovina la concezione che ne ha fornito l'idea. In un caso semplice l'investigatore moderno si porrà la questione: Di che cosa v è funzione? Se v è funzione di t, qual'è la forma di questa funzione? Galileo, con una semplicità tutta primitiva, si chiede: v è proporzionale ad s o è proporzionale a t? Egli procede sinteticamente ed a caso, e raggiunge lo stesso il suo intento. I metodi sistematici, che in certa guisa sono gli esemplari o modelli, costituiscono uno dei risultati della ricerca, e non possono essere a disposizione fin dai primi passi che fece il genio (Confrontare l'articolo " *Ueber Gedankenexperimente* „ Zeitschrift für den phys. und chem. Unterricht; 1897, I).

5. Per ottenere la relazione che esiste fra il moto sopra un piano inclinato ed il moto della caduta libera, Galileo fece la ipotesi che un corpo acquisti la stessa velocità cadendo secondo l'altezza o secondo la lunghezza del piano. Tale ipotesi pareva alquanto arrischiata; ma egli vi pervenne in una maniera, che la rende naturalissima, e che esporremo in poche parole. Quando un corpo cade liberamente, esso acquista una velocità proporzionale alla durata della caduta; Galileo immaginò

che all'istante, in cui il corpo giunge al termine della sua discesa, la sua velocità sia bruscamente rovesciata e diretta verso l'alto; il corpo, è chiaro, allora risalirà; e si può osservare che il suo moto è in questo caso una riflessione per così dire del suo moto del primo caso. La velocità, che mentre cresceva proporzionalmente al tempo, ora diminuisce nello stesso rapporto, e diviene nulla solo all'istante, in cui il corpo è risalito per tanto tempo per quanto era disceso, ed è ritornato alla stessa altezza primitiva. Dunque la velocità che un corpo acquista cadendo, gli permette di risalire ad un'altezza *eguale* a quella d'onde è caduto. Ora, se cadendo lungo un piano inclinato un corpo acquistasse una velocità tale da permettergli di risalire sopra un altro piano inclinato ad un'altezza maggiore della sua iniziale, ne conseguirebbe che il peso stesso dei corpi potrebbe produrre la loro ascensione. L'ipotesi che le velocità acquistate dipendono solo dall'altezza *verticalmente* percorsa, e non dall'inclinazione dei piani, non contiene quindi che l'affermazione e la nozione logica del *fatto*, che i gravi tendono non a salire, ma a *discendere*. Infatti se nella caduta inclinata il corpo prendeva, o in un modo o nell'altro, una velocità maggiore che cadendo verticalmente secondo l'altezza, basterà farlo passare, con la velocità già acquistata, sopra un piano verticale o sopra un piano altrimenti inclinato per fargli raggiungere un'altezza maggiore di quella del suo punto di partenza. Se la velocità acquistata nel piano inclinato fosse per lo contrario minore, si otterrebbe lo stesso risultato rovesciando l'esperimento. In entrambi i casi si potrebbe, mediante una serie di piani inclinati convenientemente disposti, obbligare un grave a salire indefinitamente per mezzo del suo proprio peso: ciò che è in assoluta contraddizione con la nostra conoscenza istintiva della natura dei gravi.

6. Galileo in questo caso non si contentò dell'esame logico e filosofico della sua ipotesi; ma volle sottoporla ancora all'esperienza.

A tal uopo prese un pendolo semplice formato di una sfera pesante attaccata ad un filo sottile. Scostando il pendolo dalla sua posizione di equilibrio (fig. 88), sollevò la sfera fino ad una altezza qualunque e verificò, abbandonandola a se stessa, che essa risaliva sino allo stesso livello dalla parte opposta. Riconobbe che, quando ciò non si verificava *esattamente*, la resistenza dell'aria era la causa dello scarto, poichè questo è maggiore per una palla di sughero, minore per una più pesante. Facendo astrazione da questa resistenza, il corpo risale alla stessa altezza. Ora il moto del pendolo sul suo arco di cerchio si può considerare come una caduta sopra una serie di piani inclinati differentemente. Poi Galileo fece

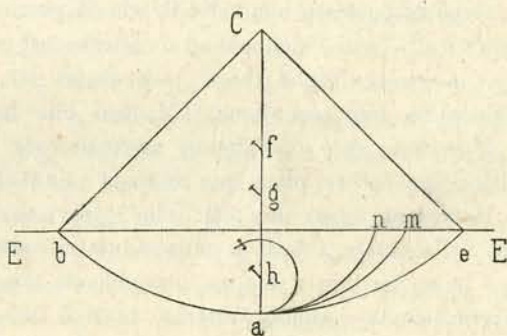



Fig. 88.

risalire il corpo sopra un altro arco di cerchio, cioè sopra un'altra serie di piani inclinati, servendosi a tal uopo di un chiodo, che fissava in un punto qualunque *f* o *g* da una banda della posizione di equilibrio del filo per impedire a tal porzione di esso di compiere la seconda metà del moto. All'istante in cui il filo arriva nella posizione di equilibrio ed urta nel chiodo, la palla che è discesa lungo l'arco *ba*, risale, lungo un'altra serie di piani inclinati, data dall'arco *am* o dall'arco *an*. Ora si osserva che essa ritorna al suo livello orizzontale iniziale EE; ciò non si verificherebbe se l'inclinazione del piano avesse qualche influenza sulla velocità acquistata nella caduta. Fissando il chiodo sufficentemente in basso (in *h*), si può accor-

ciare come si vuole la lunghezza del pendolo nella seconda semioscillazione senza cambiare l'andamento del fenomeno; e, se il chiodo è fissato assai in basso, in modo che il filo non possa più risalire fino al piano EE, la sfera passerà rapidamente al di sopra del chiodo, su cui essa avvolgerà il filo, perchè essa ancora possiede un avanzo di velocità, quando giunge alla maggiore altezza, cui può arrivare. D'altronde si sa che il punto h deve essere assai vicino ad a, affinchè il filo non si possa rallentare.

7. Si vede che la velocità, che un corpo acquista cadendo sul piano inclinato, gli permette di risalire esattamente al livello d'onde esso è partito. L'ipotesi dell'eguaglianza delle velocità acquistate nella caduta inclinata ed in quella verticale della stessa altezza non contiene nient'altro che l'espressione di questo fatto. Galileo ne trasse facilmente che le durate delle cadute, secondo la lunghezza e l'altezza, sono nel rapporto di questi due cammini, e che le accelerazioni sono nel rapporto inverso, poichè esse sono inversamente proporzionali alle durate delle cadute.

Infatti consideriamo un piano inclinato (fig. 89); la sua altezza AB o la sua lunghezza AC sono entrambi percorse con un moto uniformemente accelerato nei tempi t e t'. Sia v la velocità finale comune; si ha perciò:

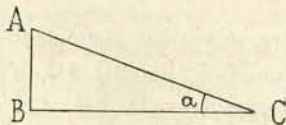



Fig. 89.

$$AB = \frac{v}{2} \cdot t \; ; \; AC = \frac{v}{2} \cdot t' \; ;$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'} .$$

Indicando con g e g' le accelerazioni rispettive si avrà:

$$v = gt \, , \, v = g't',$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{t}{t'} = \frac{AB}{AC} = \text{sen } a.$$

Quindi con questo metodo si può calcolare l'accelerazione di un corpo che cade liberamente, quando è data quella che esso ha nel piano inclinato.

Galileo dedusse da questa teoria alcuni corollari, parecchi dei quali sono passati nei nostri trattati elementari. Ad esempio si considerino due corpi che cadono, l'uno verticalmente, l'altro obliquamente. Le loro accelerazioni stanno fra loro nel rapporto inverso dell'altezza alla lunghezza; per ottenere i cammini, che essi percòrrono in tempi *eguali*, basterà dunque abbassare la perpendicolare BD (fig. 90) dal piede dell'altezza sul piano inclinato. Onde i due cammini AB ed AD sono percorsi in tempi eguali dai due corpi; l'uno cade liberamente dal punto A, l'al-

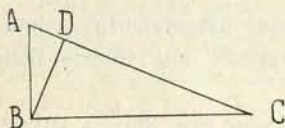
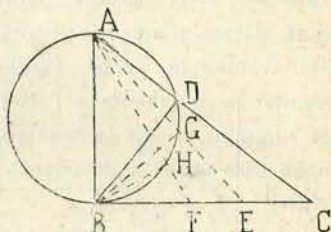



Fig. 90. *Fig. 91.*

tro scorre sul piano inclinato. Ne consegue che se parecchi piani inclinati (fig. 91) AC, AE, AF terminano in A, le corde d'intersezione AD, AG, AH delle loro linee di maggior pendenza con la circonferenza, descritta col diametro AB, sono percorse in tempi eguali. Siccome questa proprietà dipende solo dalle lunghezze delle corde e dalle inclinazioni e non già dalla posizione dei piani inclinati nello spazio, essa vale anche per le corde BD, BG, BH concorrenti alla estremità inferiore. Dunque si può dire in generale che un corpo sottoposto alla sola azione del suo peso impiega lo stesso tempo per percorrere il diametro verticale di un cerchio od una qualunque delle corde, che concorrono ad una delle sue estremità.

Inoltre Galileo aggiungeva alcune altre considerazioni eleganti, le quali ordinariamente non sono contenute nei libri ele-

mentari. Egli considerava varie oblique diversamente inclinate, le quali partivano da uno stesso punto A (fig. 92) e poste in uno stesso piano verticale. Se si lascia cadere allo stesso istante nel punto A un grave su ciascuna di queste rette, questi corpi, che incominciano insieme il loro moto di discesa, si troveranno in ciascun istante nei punti di una stessa circonferenza, il cui diametro è dato dallo spazio percorso verticalmente, ed i raggi crescono quindi proporzionalmente al quadrato dei tempi. Facendo ruotare la figura intorno alla verticale AV, si vede facilmente che queste circonferenze vengono sostituite da sfere, quando le oblique sono distribuite in modo qualunque nello spazio intorno al punto A.

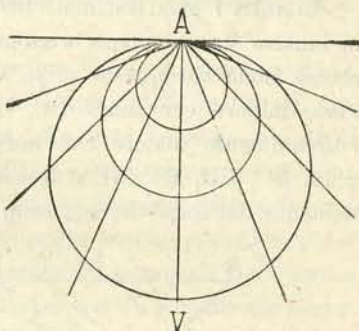



Fig. 92.

8. Galileo non cerca dunque di fare una *teoria* della caduta dei corpi, ma all'opposto osserva il *fenomeno* della caduta e lo studia senza idee preconcette. In questa ricerca, *adattando* gradatamente il suo pensiero ai fenomeni e *perseguendolo* in tutte le sue conseguenze logiche, giunge ad una concezione che, probabilmente per lui stesso molto meno che per i suoi successori, ha avuto il carattere di una legge particolarmente nuova. Galileo in tutte le sue deduzioni segue un principio di una grande fecondità scentifica, che giustamente si può chiamare *principio di continuità*, il quale consiste nel modificare, gradatamente e quanto è possibile, le circostanze di un caso particolare qualunque, di cui si è potuto fare un' idea chiara, accostandosi sempre tanto quanto è possibile a questa idea precedentemente acquistata. Nessun altro metodo potrà permettere la comprensione dei fenomeni naturali con più sicurezza e *semplicità*, con minor fatica o minore sforzo intellettuale.

Un esempio particolare farà meglio comprendere il nostro pensiero che queste considerazioni generali. Galileo considera un corpo che cade lungo il piano inclinato AB (fig. 93); e poi lo si pone con la sua velocità acquistata in un altro piano inclinato BC, lungo il quale risale.

In tutti i piani inclinati BC, BD, ecc., questo corpo sale e si innalza sino al piano orizzontale, che passa per A. Ma nello stesso modo che questo corpo cade lungo BD con un'*accelerazione* minore che lungo BC, lo stesso sale lungo BD con un *rallentamento* minore che lungo BC. A mano a mano che i piani BC, BD, BE, BF si accostano al piano orizzontale, il ritardamento del corpo diviene sempre minore; il cammino percorso

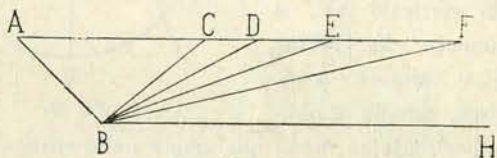



Fig. 93.

e la durata del moto divengono per conseguenza sempre maggiori. Sul piano orizzontale BH il rallentamento scompare *intieramente* — astrazione fatta, evidentemente, dell'attrito e della resistenza dell'aria — il corpo si muove indefinitamente lungo il piano e per un tempo indefinito con una velocità *costante*. Arrivando così al caso limite del problema, Galileo scopre la legge nota col nome di *legge d'inerzia*, secondo la quale un corpo, su cui non agisce nessuna influenza modificatrice del moto (forza), conserva indefinitamente la sua velocità (e la sua direzione). Più innanzi ritorneremo su questo argomento.

In un notevole studio pubblicato nel 1884 nel *Zeitschrift für Völkerpsychologie* col titolo *Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes* (vol. XIV, pag. 365-410 e vol. XV, pag. 70-135, 337-387) E. Wohlwill ha dimostrato che i predecessori ed i contemporanei di Galileo, e Galileo stesso, non abbandonarono che *assai lentamente e per gradi* le idee aristoteliche per giungere alla legge di inerzia. Anche per Galileo il *moto circolare uniforme*

ed il *moto orizzontale uniforme* hanno un significato speciale. Lo studio interessantissimo di Wohlwill dimostra innanzi tutto che Galileo stesso non giunge ad una concezione perfettamente chiara dei principii fondamentali, che egli ha creato e che hanno permesso lo svolgimento della scienza; poi che egli è soggetto spesso a ritornare sulle idee antiche, ciò che d'altronde è naturalissimo.

D'altra parte il lettore può vedere dalla esposizione che si è fatta che la legge d'inerzia non aveva, nello spirito di Galileo, la chiarezza e la generalità, che essa acquista più tardi (cfr. *Erhaltung der Arbeit*, p. 47). Contrariamente all'opinione di Wohlwill e di Poske io credo sempre di avere, nella mia esposizione, indicato il punto, che doveva *far sentire* più chiaramente possibile a Galileo ed ai suoi successori il *passaggio* della concezione antica a quella nuova. Galileo si avvicinò molto alla concezione compiuta della legge d'inerzia, e lo prova il fatto (segnalato da Wohlwill stesso, loc. cit., p. 112), che Baliani dedusse dall'esposizione di Galileo l'indistruttibilità di una velocità una volta acquistata. Non è inoltre sorprendente che là, ove si tratta unicamente dei moti dei corpi *pesanti*, Galileo impieghi la legge di inerzia, soprattutto per i moti orizzontali. Si sapeva per altro che una palla *senza peso* continuerà a muoversi in linea retta nella direzione del getto (*Dialogo sui due massimi sistemi del mondo*, Lipsia, 1891, p. 184); ma non è straordinario che egli esiti davanti all'enunciato generale di una proposizione a prima vista sì peregrina.

9. La caduta dei corpi è dunque un moto, nel quale la velocità cresce proporzionalmente al tempo, cioè un moto uniformemente accelerato.

Qualche volta l'accelerazione uniforme del moto della caduta dei gravi è presentata come conseguenza dell' azione costante della gravità. Questo processo di esposizione è un anacronismo ed un non-senso storico. “ La gravità, si dice, è una forza costante; *per conseguenza* essa genera, in elementi eguali di tempo, elementi eguali di velocità; così il moto che essa produce è uni-

formemente accelerato „. Questa esposizione è antistorica, come tutte quelle dello stesso genere. Essa presenta sotto una luce totalmente falsa il fatto capitale della scoperta di queste leggi. La nozione di forza, come la si possiede presentemente, fu infatti creata da Galileo. Prima si conosceva la *forza* come *pressione*. Solo l'esperienza ci può insegnare che in generale la pressione produce un moto. A maggior ragione ancora possiamo sapere, altrimenti che coll'esperienza, *in qual modo* la pressione si trasforma in moto, e riconoscere che essa non determina nè una posizione, nè una velocità, ma invece un'accelerazione. La semplice logica ci potrebbe fornire su questo punto solo delle ipotesi; la sola esperienza può definitivamente illuminarci con autorità.

10. Le analogie tratte da altre parti della fisica fanno subito comprendere che non è affatto evidente, *a priori*, che le circostanze determinanti del moto (forze) producono le *accelerazioni*. Così le differenze di temperatura dei corpi determinano pure dei cambiamenti in essi; ma esse determinano *velocità* di trasmissione di calore, non *accelerazioni*.

Galileo *discerne* nei fenomeni naturali il fatto, che le circostanze determinanti il moto producono accelerazioni. Ma prima vi si era già osservato un gran numero di altre cose. Ad esempio, quando si dice che ogni cosa cerca il suo luogo, questa osservazione è talvolta giustissima; ma essa non vale per tutti i casi, nè esaurisce compiutamente il soggetto. Così se noi gettiamo una pietra in alto, essa non cerca più il suo luogo, poichè essa sale, mentre il suo luogo sarebbe in basso; ma l'accelerazione verso la terra o la ritardazione del moto di ascensione è sempre presente. Galileo fu il primo a scorgere questo fatto: la sua osservazione è giusta in tutti i casi; essa vale in generale, *essa abbraccia con un solo sforzo mentale un campo assai più vasto.*

11. Come si è già osservato, Galileo scoprì la così detta legge d'inerzia del tutto *incidentalmente*. Ordinariamente si enuncia questa legge dicendo che un corpo, su cui non agisce nessuna

forza, conserva una velocità ed una direzione invariabili. Questa legge d'inerzia ha avuto una fortuna peregrina; ma non sembra che essa abbia mai avuto una parte prominente nel pensiero di Galileo. Ma i suoi successori, e specialmente Huygens e Newton, ne hanno fatto una legge speciale. Inoltre alcuni hanno considerato l'inerzia come una proprietà generale della materia. Per altro è facile riconoscere che essa non costituisce per nulla una legge speciale; ma è implicitamente contenuto in questa idea di Galileo, che le circostanze determinanti il moto (cioè le forze) producono le *accelerazioni*. Infatti, se si sa che una forza non determina nè una posizione, nè una velocità, ma invece un'accelerazione, cioè una *variazione* di velocità, ne consegue che là, ove non havvi forza, non può prodursi cambiamento di velocità. È inutile dare di questo corollario un enunciato speciale; se lo si facesse, si presenterebbe un fatto unico come *due fatti distinti*, si formulerebbe *due volte lo stesso fatto*. Grandi genii hanno commesso questo errore di metodo; ciò si può spiegare solo mediante questa perplessità degli esordienti; la quale si può impadronire anche dei più grandi investigatori e farli esitare, quando scorgono davanti ai loro occhi una gran massa di nuovi materiali.

In ogni caso è completamente errato il figurarsi l'inerzia o come una proprietà evidente per sè stessa, o come una conseguenza del principio generale, per cui " l'effetto di una causa persiste ". L'origine di tutti questi errori è una ricerca mal compresa del rigore. I principii del genere di questo, che ora si è citato, sono d'altronde proposizioni scolastiche, che nulla hanno a fare con la scienza. La proposizione contraria: *cessante causa, cessat effectus*, è del tutto valida, perchè se si chiama " effetto " la velocità acquistata, allora è la prima proposizione che vale; se si chiama " effetto " l'accelerazione, è la seconda che è esatta.

12. Ora esamineremo i lavori di Galileo sotto un altro punto di vista. Galileo incominciò le sue ricerche servendosi delle nozioni che erano comuni ai suoi tempi, e che si erano svolte prin-

cipalmente nelle arti manuali. Fra queste si trova la nozione di velocità che il moto uniforme fornisce immediatamente. Infatti se un corpo descrive in ogni secondo lo stesso cammino c, in t secondi percorrerà il cammino $s = ct$. Si chiama velocità lo spazio c percorso in un secondo, che si può d'altronde misurare, osservando un cammino qualunque e il tempo corrispondente; la formula dà allora: $c = \frac{s}{t}$. La velocità si ottiene dividendo il numero che misura lo spazio percorso per quello che misura il tempo trascorso.

Ora Galileo non poteva completare i suoi lavori senza modificare ed estendere tacitamente la nozione tradizionale di ve-

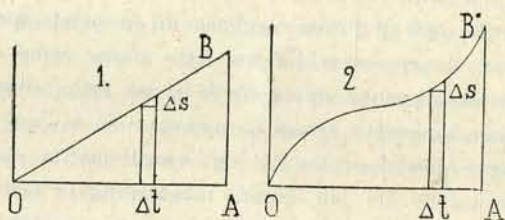



Fig. 94.

locità. Per fissare le idee rappresentiamo con disegni un moto uniforme ed un moto variabile (fig. 94, 1, 2), i tempi trascorsi essendo riportati come ascisse sull'asse OA e gli spazi percorsi come ordinate nella direzione AB. Nel primo caso si ottiene costantemente lo stesso valore c per la velocità, qualunque sia l'incremento di spazio percorso che si divide per il tempo corrispondente. Ma non si verifica ciò nel secondo caso: procedendo ugualmente si ottengono per la velocità valori più disparati. Ne consegue allora che la nozione ordinaria di velocità non ha più un significato determinato. Se, nulla meno, si considera lo spazio percorso in un elemento di tempo piccolissimo, affinchè l'elemento di curva della figura 2 si accosti alla linea retta, si potrà considerare questo incremento come uniforme e definire la velocità di questo moto elementare

come il quoziente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ del cammino elementare per l'elemento di tempo corrispondente. Questa definizione sarà ancora più esatta, se si definisce la velocità in un dato istante come il limite verso il quale tende il quoziente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quando l'elemento di tempo diviene infinitamente piccolo; questo limite si rappresenta con $\frac{ds}{dt}$. Questa nuova concezione contiene la prima concezione come caso particolare: essa si applica subito al moto uniforme. Benchè essa fosse stata formalmente espressa solo molto tempo dopo di lui, si vede peraltro che nel suo pensiero Galileo si serviva di questa estensione della nozione di velocità.

13. La nozione di *accelerazione*, cui Galileo fu condotto, è intieramente nuova. Nel moto uniformente accelerato la velocità varia col tempo nello stesso modo dello spazio percorso nel moto uniforme. Indicando con v la velocità acquistata alla fine del tempo t si ha:

$$v = gt,$$

ove g rappresenta l'incremento di velocità nell'unità di tempo, cioè l'accelerazione che è dunque anche data dall'equazione:

$$g = \frac{v}{t}.$$

Poichè si considerano moti non uniformemente accelerati, si deve estendere la nozione dell'accelerazione nello stesso modo che si è fatto per la velocità. Riprendiamo le figure 1 e 2, in cui le ascisse rappresentano sempre i tempi; ma ove ora le ordinate rappresentano le *velocità*. Rifacendo esattamente il ragionamento precedente, definiremo l'accelerazione mediante la formula $\frac{dv}{dt}$, ove dv rappresenta l'incremento infinitesimo della velocità durante il tempo infinitesimo dt. Servendoci delle notazioni del calcolo differenziale avremo per l'accelerazione φ in un moto *rettilineo:*

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Le idee che ora abbiamo svolte sono inoltre suscettibili di una rappresentazione grafica. Rappresentando i tempi colle ascisse e gli spazi percorsi colle ordinate, si ottiene la curva degli spazi, la cui *pendenza* in ciascun punto rappresenta la velocità nell'istante corrispondente. Similmente rappresentando i tempi e le velocità colle ascisse e colle ordinate si ottiene la curva delle velocità, la cui pendenza rappresenta l'accelerazione. Ma la curvatura della curva degli spazi ci fornisce già il mezzo di riconoscere il cambiamento della pendenza delle velocità. Infatti consideriamo un moto uniforme rappresentato, come si fa ordinariamente (fig. 95), mediante la retta OCD, e confrontiamolo con un secondo moto OCE, la cui velocità è maggiore, nella seconda

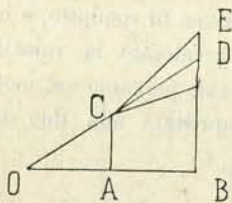



Fig. 95.

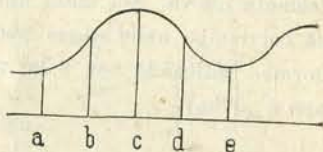



Fig. 96.

metà del moto e per cui l'ordinata BE, corrispondente all'ascissa OB = 2OA, sarà perciò maggiore; ed infine con un moto OCF, la cui velocità nella seconda metà è minore della velocità del moto uniforme e per cui l'ordinata finale BF sarà minore di BD. La semplice sovrapposizione delle figure rappresentanti questi tre moti dimostra che a un moto accelerato corrisponde la curva degli spazi convessa verso l'asse delle ascisse; e ad un moto ritardato una curva concava. Supponiamo che un mobile animato da un moto verticale qualunque abbia seco una matita, la cui punta sia in contatto con un foglio di carta, che si sposta orizzontalmente con un moto uniforme da destra a sinistra. La matita descrive una figura (fig. 96), da cui si possono dedurre le particolarità del moto. In *a* la velocità della matita è diretta verso l'alto; in *b* è maggiore; in *c* è nulla; in *d* essa è diretta verso il basso; in *e* è di nuovo nulla. In *a*, *b*, *d*, *e* l'accelera-

zione è diretta verso l'alto, in c è diretta verso il basso; in c ed e essa è massima.

14. Una tavola dei tempi delle velocità conseguite e degli spazi percorsi ci offrirà il mezzo di vedere a colpo d'occhio il sunto delle scoperte di Galileo:

t	v	s
1	g	$1 \cdot \frac{g}{2}$
2	$2 \cdot g$	$4 \cdot \frac{g}{2}$
3	$3 \cdot g$	$9 \cdot \frac{g}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .
t	$t \cdot g$	$t^2 \cdot \frac{g}{2}$

I numeri che vi compariscono seguono una legge così semplice e così immediatamente riconoscibile che è assai facile di sostituire a tutta la tavola una *regola di costruzione*. La relazione che esiste fra la 1ª e la 2ª colonna è rappresentata dalla equazione seguente $v = gt$, che in sostanza non è altro che l'espressione del metodo di costruzione della tavola. Le relazioni fra i numeri della 1ª e della 3ª colonna, e fra quelli della 2ª e della 3ª, sono rispettivamente: $s = \frac{1}{2} gt^2$ e $s = \frac{v^2}{2g}$. Così si hanno le tre relazioni:

$$(1) \quad v = gt,$$

$$(2) \quad s = \frac{1}{2} gt^2,$$

$$(3) \quad s = \frac{v^2}{2g}.$$

Galileo non adoprò che le refazioni (1) e (2); Huygens la (1) e mise in evidenza l'utilità della (3); ciò fu per la scienza un progresso considerevole.

15. Un'osservazione suggestiva si può fare a proposito di questa tavola. Si è già detto che colla velocità che conseguisce un corpo cadendo, esso può risalire al livello, da cui è partito. In questo moto di ascensione la velocità diminuisce (rispetto al tempo e allo spazio) esattamente nello stesso modo che essa aveva aumentato durante la caduta. Ora un corpo cadendo liberamente consegue una velocità doppia in una caduta di durata doppia; ma lo spazio che percorre in questo tempo doppio è quadruplo. Dunque un corpo lanciato verticalmente in alto con una velocità doppia salirà in un tempo *due volte* maggiore ad un'altezza *quattro volte* maggiore, che un corpo lanciato con la velocità semplice.

Alquanto tempo dopo Galileo, si riconobbe che nella velocità di un corpo si riscontra qualche cosa che corrisponde ad una forza, un qualche cosa cioè, per cui una forza può essere vinta, una certa *capacità d'azione* od efficacia. Non si discusse che il punto di sapere se questa efficacia fosse proporzionale alla *velocità*, come supponevano i Cartesiani, ovvero al *quadrato della velocità*, come pretendeva la scuola di Leibniz. Ma presentemente si sa che non havvi più ragione di discutere intorno a ciò. Il corpo lanciato in alto con una velocità doppia supera una forza data in un tempo *doppio,* ma lungo un percorso *quadruplo*. Dunque rispetto al tempo l'efficacia della velocità è ad esso proporzionale; rispetto allo spazio essa è proporzionale al suo quadrato. D'Alembert richiama l'attenzione su questo errore, ma in termini poco chiari. Aggiungeremo inoltre che Huygens già aveva su questo soggetto idee perfettamente chiare ed esatte.

16. I processi sperimentali, mediante i quali presentemente si verificano le leggi della caduta dei corpi, sono alquanto differenti da quelli di Galileo. Si possono impiegare due metodi: o all'intento di poter osservare comodamente si ritarderà il moto della caduta, che per la sua rapidità è difficile ad osservarla direttamente, ma in modo che non avvenga nessuna modificazione della sua legge; o l'osservare direttamente senza cambiarvi nulla mediante processi perfezionati. Sul primo di questi principî si

fonda il piano inclinato di Galileo e la macchina d'Atwood. Questo ultimo apparecchio (fig. 97) consiste in una leggera puleggia, su cui passa un filo teso da due pesi uguali P, sospesi alle sue estremità; aggiungiamo ad uno dei due pesi P un terzo peso più piccolo p. Questo piccolo eccesso di peso dà origine ad un moto uniformemente accelerato, la cui accelerazione è $\frac{p}{2\,\mathrm{P}+p}\cdot g$, come si vedrà facilmente, quando si sarà discusso il concetto di *massa*. Una scala graduata verticale, collegata alla puleggia, fornisce allora il modo di verificare che gli spazî 1, 4, 9, 16... sono percorsi nei tempi 1, 2, 3, 4,... Per osservare la velocità finale conseguita al termine di una durata data della caduta, s'attaccail peso addizionale p, che oltrepassa un po' P, mediante un anello entro il quale deve passare il corpo $\mathrm{P}+p$, e a partire da questo istante il moto continua senza accelerazione.

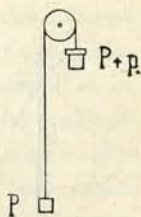



Fig. 97.

L'apparecchio di Morin è fondato su un altro principio. Un foglio di carta posto verticalmente è animato da un moto uniforme mediante un apparecchio d'orologeria. Un grave è munito di una matita, che quando la carta si muove, traccia una linea orizzontale. Se il corpo cade e la carta sta ferma, la matita segna una verticale. Se i due moti sono simultanei, la matita traccia una parabola, le cui ascisse orizzontali rappresentano i tempi trascorsi e le cui ordinate verticali rappresentano gli spazi percorsi. Per le ascisse 1, 2, 3, 4.... si ottengono le ordinate 1, 4, 9, 16... È cosa secondaria se Morin invece di servirsi di un foglio di carta piano adopera un tamburo cilindrico, che ruota rapidamente intorno al suo asse verticale; il corpo guidato da un filo di ferro cade lungo una generatrice di questo cilindro.

Un apparecchio diverso, fondato sullo stesso principio, fu inventato ad un tempo da Laborde, Lippich e da von Babo, indipendentemente l'uno dall'altro. Un lungo rettangolo di vetro annerito col nero di fumo cade liberamente (fig. 98 a) davanti ad un regolo elastico, che vibra orizzontalmente, tracciando una

curva sul vetro annerito. Il primo passaggio del regolo per la sua posizione d'equilibrio fa principiare il moto di discesa; le ondulazioni tracciate sul vetro diventano sempre più lunghe, mediante la costanza della durata di oscillazione e dell'incremento

Fig. 98.

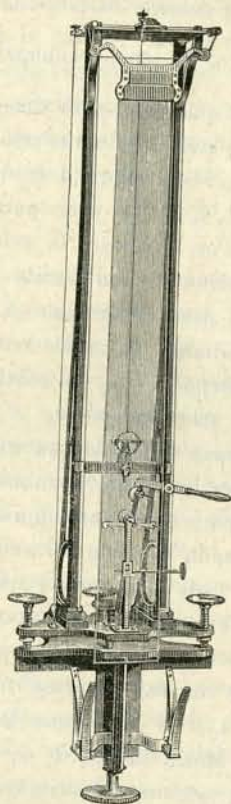
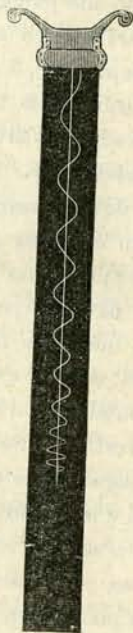



Fig. 98a.

della velocità verticale. Così si verifica (fig. 98) che è $bc = 3\,ab$, $cd = 5\,ab$, $de = 7\,ab$...; le uguaglianze

$$ac = ab + bc = 4\,ab\,,$$

$$ad = ab + bc + cd = 9\,ab$$

$$ae = ab + bc + cd + de = 16\,ab \text{ ecc.},$$

mostrano immediatamente la legge degli spazii. La legge delle velocità è verificata dalle inclinazioni delle tangenti nei punti a, b, c, d, ecc. Questo esperimento permette di determinare esattissimamente il valore di g, se si conosce la durata dell'oscillazione del regolo.

Wheatstone impiegò per misurare tempi piccolissimi un cronoscopio, formato di un meccanismo di orologeria a movimento rapidissimo, che si metteva in moto al principio del tempo da misurare e cessava di muoversi alla fine. Hipp ha modificato vantaggiosamente questo processo in questo modo: Il meccanismo di orologeria a moto rapido è regolato invece che dal bilanciere mediante un diapason, che dà una nota alta. Un indice leggerissimo può essere messo in comunicazione col meccanismo e può essere interrotta tale comunicazione mediante una corrente elettrica. Ora, come il corpo cade la corrente si apre e l'indice si mette a contatto col meccanismo; ed appena il corpo giunge al termine, la corrente si chiude, il contatto dell' indice è interrotto ed il cammino che ha descritto dà il tempo trascorso.

17. Fra i lavori ulteriori di Galileo dobbiamo ancora menzionare le sue riflessioni sul moto del pendolo e la sua confutazione della opinione, per la quale i corpi che pesano di più cadono con maggior velocità di quelli, che pesano meno. Torneremo più tardi su questi due punti. Si può peraltro qui osservare, che scoprendo l'isocronismo delle oscillazioni del pendolo, egli subito propose di servirsene per misurare il numero dei battiti del polso dei malati ed anche per le osservazioni astronomiche; e che, sino a un certo punto, egli stesso l'impiegò a tale scopo.

18. Le sue ricerche sul moto dei proietti sono ancora più importanti. Secondo la veduta di Galileo un corpo libero possiede sempre un'accelerazione verticale g diretta verso la terra. Se al principio del moto il corpo possiede già una velocità c, la sua velocità dopo il tempo t sarà:

$$v = c + gt,$$

in cui la velocità iniziale si prenderà col segno meno, quando

essa è diretta verso l'alto. Lo spazio percorso alla fine del tempo t è dato da

$$S = a + ct + \frac{1}{2} gt^2 ,$$

ct e $\frac{1}{2}gt^2$ sono le parti di spazio descritte rispettivamente nel moto uniformemente accelerato. La costante a è nulla, quando si misurano gli spazi a partire dal punto, in cui il corpo si trova al tempo $t = o$.

Quando una volta Galileo ebbe acquistate le sue concezioni fondamentali sulla dinamica, egli riconobbe facilmente che il getto (proiezione) orizzontale è una combinazione di due moti *indipendenti* l'uno dall'altro, cioè di un moto orizzontale uniforme e di un moto verticale uniformemente accelerato. Così egli applicò il *parallelogramma* dei moti. Anche il getto (proiezione) obliquo non presentava più reali difficoltà.

Se un corpo riceve una velocità orizzontale c, esso descrive nel tempo t uno spazio orizzontale $y = ct$, mentre ad un tempo cade verticalmente per una altezza $x = \frac{1}{2}gt^2$. Diverse circo-stanze determinanti il moto non esercitano alcuna influenza le une sulle altre, e i moti che esse determinano sono *indipendenti fra loro*. Galileo fu condotto a quest'ipotesi da un'osservazione attenta; e l'esperienza la confermò. Le due equazioni precedenti dànno, mediante l'eliminazione di t, l'equazione della curva descritta sotto l'azione combinata di questi due moti:

$$y = \sqrt{(2\,c^2 : g)\,x} .$$

Questa è una parabola con l'asse verticale e con il parametro $\frac{c^2}{g}$, come Galileo sapeva.

Si può facilmente riconoscere con Galileo che il getto (proiezione) obliquo non costituisce punto un nuovo problema. Se s'imprime ad un corpo una velocità v, inclinata di un angolo a sull'orizzonte, si può decomporre questa velocità in una componente orizzontale $c \,.\, cos\, a$ ed in una componente verticale

$c \,.\, \text{sen}\, a$. Quest'ultima fa salire il corpo durante un tempo t eguale al tempo, che esso impiegherebbe per conseguirla cadendo liberamente. Questo tempo è dato da:

$$c \,\text{sen}\, a = gt.$$

Quando il corpo ha raggiunto la sua massima altezza, la componente verticale della sua velocità iniziale si è annullata ed il moto continua a partire da S (fig. 100) come nel caso del getto (proiezione) orizzontale. Consideriamo due moti equidistanti dal-

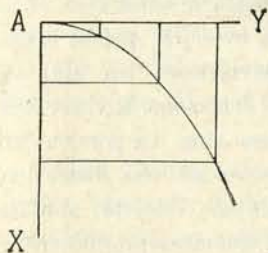
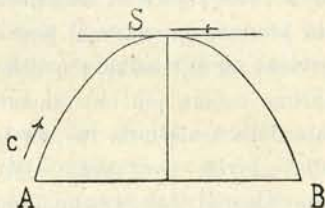



Fig. 99. *Fig. 100.*

l'istante del passaggio in S, l'uno prima e l'altro dopo. Le posizioni del corpo in questi due istanti si trovano sulla stessa orizzontale, a distanze eguali dalla verticale del punto S e da una banda e dall'altra di questa. Dunque questa verticale è un asse di simmetria della traiettoria, che è una parabola di parametro $\dfrac{(c \cos a)^2}{g}$.

Per trovare il cosidetto raggio di proiezione (getto) basta considerare il moto orizzontale durante il tempo dell'ascensione e della discesa del proiettile. Abbiamo veduto che il proiettile sale durante il tempo $t = \dfrac{c \,\text{sen}\, a}{g}$; esso impiega lo stesso tempo per discendere, vale a dire in tutto $\dfrac{2\, c \,\text{sen}\, a}{g}$. Lo spazio percorso orizzontalmente durante questo tempo è:

$$w = c \cos a \,.\, 2\, \frac{c \,\text{sen}\, a}{g} = \frac{c^2}{g} 2 \,\text{sen}\, a \cos a = \frac{c^2}{g} \,\text{sen}\, 2\, a\,.$$

Il raggio di proiezione è dunque massimo per $\alpha = 45^o$, esso è eguale per i due angoli $\alpha = 45^o \pm \beta^o$.

19. Per potere apprezzare al suo vero valore l'importanza del progresso conseguito da Galileo nell'analisi del moto dei proietti, è necessario considerare le ricerche più antiche fatte sullo stesso soggetto. Santbach (1561) ritiene che una palla di cannone si muove in linea retta fino all'esaurimento, e che allora cade verticalmente. Tartaglia (1537) compone la traiettoria del proiettile d'un segmento rettilineo, di un arco di cerchio, che si riunisce e infine della tangente verticale a quest'arco. Si sa che a tutto rigore la traiettoria è curva ovunque, poichè la gravità produce in ciascun punto una deviazione; ma egli non perviene ad un'analisi più compiuta del fenomeno. Rivius (1582) esprime ancora più chiaramente la stessa idea. La porzione iniziale della traiettoria fa pensare facilmente ad una distruzione della gravità per mezzo della grandissima velocità; abbiamo visto (Cap. II, I, n. 1) che Benedetti ha commesso questo errore. Il segmento di curva non presenta punto caduta, e dimentichiamo la piccolezza della *durata* di questa. Trascurando questa circostanza, noi potremmo ancora presentemente considerare un getto d'acqua come un corpo pesante, sospeso nell'aria, se si fa astrazione dal moto rapido delle sue molecole. La stessa illusione è prodotta dal pendolo conico, dalla trottola, dalla rotazione rapida di una catena solida (*Philos. Magaz.* 1878), dalla locomotiva, che distruggesse un ponte rovinante, se essa riposava su esso; ma che, lanciata a tutta velocità, giunga ad attraversarlo senza difficoltà, mercè una durata di caduta e di lavoro insufficiente. Un'analisi più approfondita fa vedere che questi fenomeni non sono più meravigliosi dei fenomeni più comuni. Come osserva Vailati, la diffusione dell'uso delle armi da fuoco nel secolo XIV ha enormemente reagito su tutta la meccanica. È vero che questi fenomeni si presentavano nelle antiche macchine di proiezione (catapulte) e anche nel getto della mano; ma la loro forma nuova ed autorevole può avere esercitato indubbiamente un gran fascino sulla curiosità del popolo.

20. Il riconoscimento della *indipendenza* delle circostanze determinanti il moto (o forze), che s' incontrano nella natura, è di una importanza capitale; esso fu scoperto ed espresso a proposito dello studio del moto dei proietti. Supponiamo che un corpo si muova nella direzione di AB (fig. 101), mentre il campo del moto si sposta secondo la direzione AC. Lo spostamento del corpo è allora AD. Ora ciò non si verifica che quando le due circostanze, che simultaneamente determinano i moti AB ed AC, non hanno alcuna influenza fra loro. È facile vedere che la costruzione del parallelogramma dà non solo la composizione dei moti simultanei, ma dà anche quelle delle velocità e delle accelerazioni.

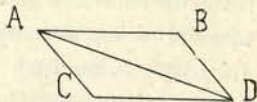



Fig. 101.

Galileo considerò dunque il moto del proietto come un fenomeno composto di due moti indipendenti fra loro. Questa concezione apre un intiero dominio di conoscenze analoghe importantissime. Si può dire che è egualmente importante il riconoscere tanto l'*indipendenza* di due circostanze A e B, quanto la *dipendenza* di due circostanze A e C; poichè è solo dopo avere riconosciuto il primo di questi punti, che noi possiamo proseguire senza timore lo studio del secondo. Possiamo confrontare alla scoperta di Galileo quella del parallelogramma delle forze di Newton, quella della composizione delle vibrazioni delle corde di Sauveur, e quella della composizione dei moti della propagazione del calore di Fourier. Questi ultimi investigatori fecero entrare nell' intiero campo della fisica matematica il metodo di composizione di un fenomeno mediante fenomeni parziali fra loro indipendenti, metodo analogo alla rappresentazione di un integrale generale mediante una somma di integrali particolari. P. Volkmann ha dato a questo metodo di scomposizione di un fenomeno in parti indipendenti le une dalle altre e di composizione di un fenomeno mediante parti di questo genere i nomi giustissimi d'*isolamento* e di *sovrapposizione*. Questi due pro-

cessi insieme combinati ci permettono di comprendere *per frammenti* e di ricostruire nel pensiero *come un tutto*, ciò che non avremmo potuto concepire *in una volta*.

« È solo in casi *rarissimi* che i fenomeni ci si presentano sotto un carattere perfettamente unitario; l'insieme dei fenomeni offre tutt'al contrario un carattere intieramente *composito*... La nostra conoscenza deve allora risolvere il problema di discernere nei fenomeni, com'essi si presentano, le serie dei fenomeni parziali, che li compongono, e di studiar prima questi fenomeni parziali nella loro purezza. Non c'impossesseremo dell'insieme, finchè non avremo riconosciuto la parte che ciascuna circostanza particolare ha nel fenomeno composto... „ (Cfr. P. *Volkmann, Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft,* 1896, p. 70, e cfr. anche i miei *Principien der Wärmelehre,* pp. 123, 151, 452).

21. La feconda attività di Galileo supera i confini della meccanica. Ricordiamo a questo proposito il contributo che egli portò per istabilire i fondamenti della termometria, il progetto del metodo per determinare la velocità delle luce, la constatazione diretta del rapporto del numero delle oscillazioni degli intervalli musicali e la spiegazione delle oscillazioni. Egli udì parlare del cannocchiale; ciò gli bastò per inventarlo, e per improvvisarlo con due lenti ed un tubo di organo. Subito dopo il suo strumento gli fa vedere le montagne della Luna, di cui misurò l'altezza, Giove coi suoi satelliti, che lo circondano, come modello rimpicciolito del sistema del mondo, la particolare conformazione di Saturno, le fasi di Venere, le macchie e la rotazione del Sole come nuovi e più saldi argomenti per Copernico. Dobbiamo pure ricordare le sue idee sugli animali a struttura geometrica e sulle macchine, sulla forma e solidità delle ossa, e l'impulso dato ai nuovi metodi matematici. Dopo Wohlwill, E. Goldbeck aveva dimostrato brevemente (*Teoria atomica di Galileo,* Bibliot. Mathem., serie 3ª, vol. II, quad. I), che questo pensatore rinnovatore non era totalmente rimasto in-

dipendente dalle influenze antiche e medioevali. Nella prima giornata il Dialogo contiene in modo particolare una esposizione particolareggiata delle osservazioni atomiche di Galileo, le quali stanno in decisa antitesi con Aristotile, e si collegano chiaramente pure con le teorie di Erone. Queste lo conducono a meravigliose discussioni sul *continuo* ed a speculazioni mistiche e matematiche sul *finito* e sull'*infinito*, le quali da un lato ricordano Niccolò da Cusa, ma dall'altro lato ricordano vivamente parecchie ricerche matematiche moderne. Non dobbiamo grandemente meravigliarci se Galileo non si fa comprendere con piena chiarezza come il suo indugiarsi sui paradossi, dei quali la forza fattiva ed illuminante ogni pensatore deve avere sperimentato.

22. Alcuni brani tratti dagli scritti di Galileo:

a) Dal " Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo „. — Dialogo II.

Sagredo. Ma quando l'artiglieria si piantasse non a perpendicolo, ma inclinata verso qualche parte, qual dovrebbe essere il moto della palla? andrebbe essa forse, come nell'altro tiro, per la linea perpendicolare, e ritornando anco poi per l'istessa?

Simplicio. Questo non farebbe ella, ma uscita dal pezzo seguiterebbe il suo moto per la linea retta, che continua la dirittura della canna, se non in quanto il proprio peso la farebbe declinar da tal dirittura verso terra.

Sagredo. Talchè la dirittura della canna è la regolatrice del moto della palla: nè fuori di tal linea si muove, o muoverebbe, se 'l peso proprio non la facesse declinare in giù...

b) Dai " Discorsi e dimostrazioni matematiche „. — Dialogo III.

" Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperietur, est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis, aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit; nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus

vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debiliatur, aut remittitur, et multo minus tollitur „.

II. *I lavori di Huygens.*

1. Fra i successori di Galileo si deve considerare Huygens come un suo eguale sotto ogni rapporto. Forse egli avrà avuto uno spirito meno filosofico; ma questa inferiorità era compensata dal suo genio di geometra. Huygens non solo spinse più innanzi le ricerche incominciate da Galileo, ma egli risolvè i primi problemi della *dinamica di sistemi,* mentre Galileo si era sempre limitato alla dinamica di *un sol corpo.*

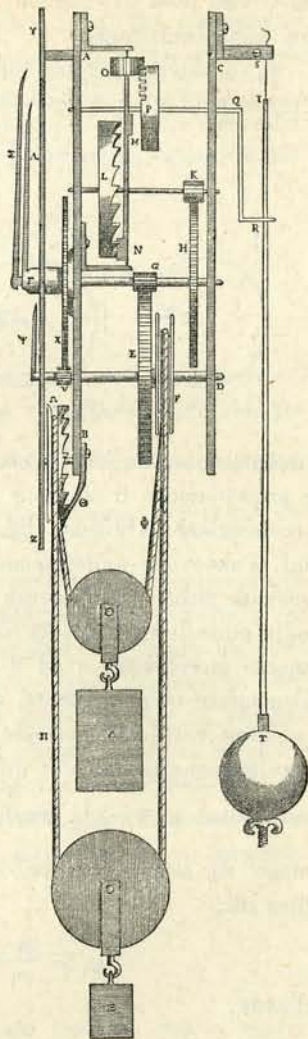
La molteplicità dei lavori di Huygens si scorge giù dal suo trattato: *Horologium oscillatorium*, che fu pubblicato nel 1673. Vi sono pur trattati per la prima volta problemi di grande importanza, che sono: la teoria del centro di oscillazione, l'invenzione e la costruzione dell'orologio a bilanciere, la scoperta dell'accelerazione *g* mediante l'osservazione del pendolo, una proposizione relativa all'uso della lunghezza del pendolo a secondi come unità di lunghezza, i teoremi sulla forza centrifuga, le proprietà geometriche e meccaniche della cicloide, la teoria della evoluta e del cerchio di curvatura.

2. Nella sua esposizione Huygens si fa notare come Galileo per una sincerità perfetta, la quale dimostra una grande elevatezza di carattere. Espone senza alcuna riserva i metodi, per mezzo dei quali era stato condotto alle sue scoperte, e così permette al lettore di giungere alla compiuta intelligenza delle sue teorie. Egli per altro non aveva nessuna ragione di nascondere i suoi metodi. Se fra un migliaio di anni il suo nome sarà ancora presente alla memoria degli uomini, si riconoscerà sempre in esso la sua *grandezza* intellettuale e morale.

Nella discussione dei lavori di Huygens dovremo procedere un po' diversamente che non siasi fatto per Galileo, le cui con-

cezioni potevano essere esposte quasi senza alcuna modificazione, mercè la loro semplicità classica. Ciò non si può fare per Huygens, che tratta di problemi assai più complicati. I suoi metodi e le sue notazioni matematiche sono divenuti insufficienti e difficili. Per ragioni di brevità riprodurremo le sue concezioni sotto una forma moderna, rispettando intieramente le sue idee essenziali e caratteristiche.

Fig. 161.

3. Incominceremo con le sue ricerche sulla forza centrifuga. Dappoichè si accetta la concezione di Galileo che la forza determina un'accelerazione, si deve necessariamente attribuire ad una *forza* ogni *modificazione* della velocità e quindi anche ogni modificazione nella *direzione* di un moto — poichè questa direzione è determinata da tre componenti della velocità, perpendicolari fra loro. Per conseguenza il fenomeno di un corpo, ad esempio una pietra attaccata ad una corda, animata da un moto circolare uniforme, si comprende solo ammettendo l'ipotesi di una forza continua, che lo fa deviare dal suo cammino rettilineo. Questa forza è la tensione della corda che, ad ogni istante, tira il corpo verso il centro del cerchio, fuori della linea retta, e quindi rappresenta una forza centripeta. D'altra parte essa agisce anche sull'asse o

sul centro fisso del cerchio; e, così considerato, essa costituisce una forza centrifuga.

Si consideri un corpo, cui si comunica una velocità qualunque e che lo si obblighi a muoversi con un moto uniforme sopra una

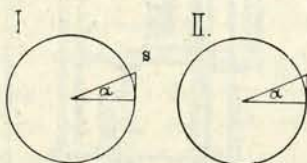
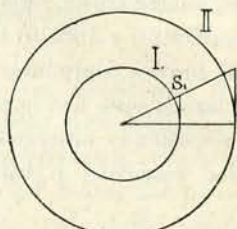



Fig. 102. *Fig. 103.*

circonferenza, con un'accelerazione costante diretta verso il centro; e proponiamoci di studiare le circostanze, da cui dipende questa accelerazione. Abbiansi (fig. 102) due circonferenze eguali, su cui si muovono uniformemente due corpi, l'uno con una data velocità sulla circonferenza I, l'altro con una velocità doppia sulla circonferenza II. Si consideri in questi due cerchi lo stesso angolo piccolissimo α ed il suo arco elementare; sia s lo spazio elementare corrispondente, di cui si è allontanato il corpo dal cammino rettilineo (secondo la tangente) sotto l'influenza della accelerazione centripeta; questo spazio è uguale in entrambi i casi. Siano φ_1 e φ_2 le accelerazioni rispettive, τ e $\frac{\tau}{2}$ gli elementi di tempo corrispondenti all'angolo α; la legge di Galileo dà:

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2} \quad , \quad \varphi_2 = 4 \, . \frac{2s}{\tau^2} \, ;$$

d'onde:

$$\varphi_2 = 4 \, . \, \varphi_1 \, .$$

Da una generalizzazione semplicissima si vede che in cerchi eguali le accelerazioni centripete stanno fra loro come i quadrati delle velocità.

Ora consideriamo il moto sulle circonferenze I e II della figura 103, i cui raggi stanno fra loro come 1 : 2; e supponiamo che le velocità stiano nello stesso rapporto, talchè gli elementi simili di arco son descritti in tempi eguali.

Siano φ_1, φ_2, s e $2s$ le accelerazioni e gli spazi elementari, τ il tempo, che in entrambi i casi ha lo stesso valore; si ha:

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2} \quad , \quad \varphi_2 = \frac{4s}{\tau^2} ;$$

da cui:

$$\varphi_2 = 2\, \varphi_1 .$$

Se ora riduciamo a metà la velocità sulla circonferenza II, talchè i due moti abbiano la stessa velocità, φ_2 sarà ridotto al quarto cioè ad $\frac{1}{2}\, \varphi_1$. Generalizzando si vede che per velocità *eguali* le accelerazioni sono in ragione inversa dei raggi delle circonferenze.

4. I metodi seguiti dai primi investigatori li condussero quasi sempre a trovare i loro teoremi sotto la forma difficile di proporzioni. Noi perciò sceglieremo un'altra via. Sopra un mobile animato da una velocità v si faccia agire durante un tempo elementare τ una forza, che gli dà l'accelerazione φ, perpendicolare alla direzione del suo moto. Questa forza dà origine ad una nuova velocità $\varphi\tau$, che, composta colla velocità primitiva, dà la nuova direzione del moto; sia a l'angolo che fa questa con l'altra; infine si supponga che la traiettoria sia un cerchio di raggio r, si trova:

$$\frac{\varphi\tau}{v} \text{ tang. } a = a = \frac{v\tau}{r} ,$$

poichè si può sostituire alla tangente l'angolo, che si suppone *piccolissimo*. Si ha dunque:

$$\varphi = \frac{v^2}{r} ,$$

che è l'espressione completa della accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme.

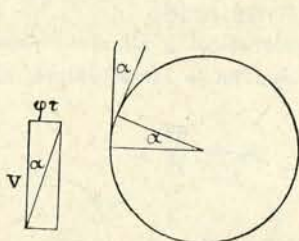
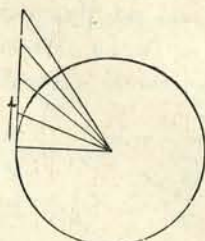



Fig. 104. *Fig. 105.*

L'idea del moto circolare uniforme, prodotto da un'accelerazione centripeta costante, è alquanto paradossale. Il paradosso consiste nell'accettazione del fatto, che una accelerazione centripeta continua esista senza che si verifichi il reale avvicinamento del centro o l'incremento della velocità. Ma questa impressione scompare se si riflette che, senza questa accelerazione centripeta, il mobile si allontanerebbe indefinitamente dal centro, che la direzione della accelerazione varia ad ogni istante, e che un cambiamento di velocità, esistente nel caso precedente, trae seco (come si vedrà nella discussione del principio delle forze vive) un avvicinamento de' corpi, che si comunicano reciprocamente le accelerazioni. L'esempio più complicato del moto ellittico si spiega in modo analogo.

5. Si può mettere sotto un'altra forma l'espressione dell'accelerazione centripeta o centrifuga $\varphi = \frac{v^2}{r}$; sia T la durata di una rivoluzione del mobile; si ha:

$$vT = 2\pi r;$$

e quindi:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Più tardi ci serviremo di questa espressione. Se parecchi corpi sono animati di moti circolari uniformi tali, che le durate delle rivoluzioni siano eguali, le accelerazioni centripete, che le trattengono sulle loro circonferenze rispettive, sono proporzionali ai raggi; ciò è evidente dalla formola, che abbiamo ora trovato.

Riguardo all'accelerazione centrifuga, diremo anche qualche parola sulle dimostrazioni, che si fondano sul principio dell'odografa di Hamilton.

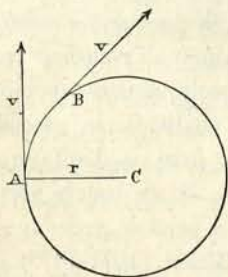
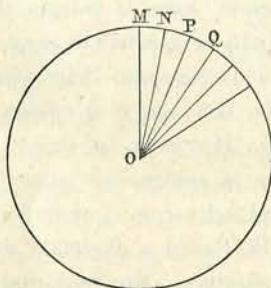



Fig. 105 b. *Fig. 105 c.* *Fig. 105 d.*

Si consideri un mobile, che percorre uniformemente il cerchio di raggio r (fig. 105 b); la tensione del filo trasforma la velocità v nel punto A in una velocità eguale, ma in un'altra direzione, nel punto B. Se, a partire da O come origine, portiamo su segmenti rettilinei in grandezza e direzione tutte le velocità che ha successivamente acquistato il mobile (fig. 105 c), il luogo delle loro estremità è una circonferenza di raggio v. Nello stesso tempo che OM si trasforma in ON, s'introduce una componente MN perpendicolare alla prima. Durante il lasso di tempo T di una rivoluzione del mobile la velocità cresce *uniformemente* della quantità $2\pi v$ secondo la direzione del raggio r. Il valore dell'accelerazione centrale è dunque:

$$\varphi = \frac{2\pi v}{T} \quad \text{o} \quad \varphi = \frac{v^2}{r},$$

poichè $vT = 2\pi r$.

Se si aggiunge ad OM = v la piccola componente ω (fig. 105 *d*), la velocità risultante sarà: $\sqrt{v^2 + \omega^2} = v + \frac{\omega^2}{2v}$ approssimativamente; ma per la rotazione *continua* del raggio il termine $\frac{\omega^2}{2v}$ scomparirebbe rispetto a v, e si vede che cambia solo la direzione della velocità, restando la sua grandezza invariabile.

6. I fenomeni, come la rottura dei fili pochissimo resistenti, mediante i quali si imprime ai corpi un moto di rotazione troppo rapido o lo schiacciamento delle sfere molli, animate da moti di rotazione, sono ben noti e si spiegano mediante le precedenti considerazioni. Huygens fu capace di dare mediante questa nuova nozione la spiegazione immediata di un'intiera serie di fenomeni. Così, ad esempio, un orologio a pendolo, essendo stato trasportato da Parigi a Cayenna da Richer (1671-1673) si riscontrò che ritardava. Huygens osservando che la forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra è massima all'equatore, ne dedusse la diminuzione apparente dell'accelerazione g, dovuta alla gravità, e così diede la spiegazione immediata del ritardo. Fra gli esperimenti che fece Huygens in quest'ordine d'idee, ne citeremo ancora uno per il suo interesse storico. Allorchè Newton svolse la sua teoria della gravitazione universale, Huygens fu fra il gran numero di quelli, che non seppero ammettere l'idea dell'azione a distanza. Al contrario egli credeva di potere spiegare la gravitazione mediante il moto rapidissimo delle molecole di un mezzo intermedio. Egli pose in un vaso pieno d'acqua alcuni corpi leggeri, come ad esempio sferette di legno, e fece allora rotare il vaso intorno ad un asse; osservò subito che le sferette di legno si muovevano rapidamente verso quest'asse. Se si fa, ad esempio, (fig. 106) ruotare intorno ad un asse orizzontale i tubi cilindrici di vetro RR fissati sul pernio Z, i quali contengono le sferette di le-

gno KK, queste sferette si allontanano dall'asse appena che l'apparecchio è messo in moto. Quando si riempiono d'acqua i tubi, le sfere più leggiere si pongono alle estremità superiori EE, e si vede che una rotazione impressa all'apparecchio, le fa avvicinare all'asse. La spiegazione di questo fenomeno è la stessa di quella del principio d'Archimede: le sfere ricevono una spinta centripeta, eguale in direzione opposta alla forza centrifuga, che agisce sul liquido di cui esse occupano il posto.

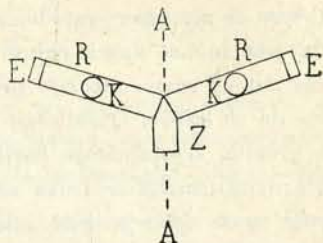



Fig. 106.

Anche Descartes pensava già a questa spiegazione della spinta centripeta dei corpi galleggianti in un mezzo vorticoso. Ma Huygens osservò con ragione, che si deve allora ammettere che i corpi più *leggieri* ricevono la *maggiore* spinta centripeta, e che perciò tutti i corpi pesanti dovrebbero essere più leggieri del mezzo vorticoso. Inoltre osservò che i fenomeni analoghi si devono produrre con corpi *qualunque,* i quali *non* partecipino al moto del vortice, e che così si trovano, senza forza centrifuga, in un mezzo animato da forze centrifughe. Ad esempio una sfera di materia qualunque e mobile solo intorno ad un raggio *fisso* (per es. ad un filo di ferro) sarà, nel mezzo vorticoso, spinta contro l'asse di rotazione.

Huygens immerse in un vaso chiuso pieno d'acqua pezzi di ceralacca, i quali, mediante la loro densità alquanto *più grande,* andavano a cadere nel fondo del vaso. Essendo questo vaso in seguito animato da un moto di rotazione, i pezzi di ceralacca andavano a porsi nell'orlo esterno. Se si fa cessare bruscamente la rotazione, l'acqua continua a rotare, mentre i pezzi di ceralacca, che giacevano sul fondo, e il cui moto quindi è più presto contrariato, ora sono spinti contro l'asse. Huygens vide in questo fenomeno una immagine della gravità. L'accettazione di un etere

che gira a mo' di vortice in un *senso* non gli sembrava corrispondere a nessuna necessità; ed era d'avviso che quest'etere avrebbe trascinato seco tutto. Dunque egli suppose che le molecole d'etere si movessero rapidamente in tutte le direzioni, e fu d'avviso che in uno spazio chiuso questo fenomeno avrebbe dato origine ad un moto circolare preponderante, che si sarebbe stabilito da sè stesso. Quest'etere gli sembrò sufficiente per spiegare la gravità. L'esposizione particolareggiata di questa teoria cinetica della gsavità si trova nell'opuscolo di Huygens: *Discorsi sulle cause della gravità,* alla fine del Trattato: « Sulla luce, » Leida, 1690; cfr. anche Lasswitz, *Geschichte der Atomistik,* 1890, vol. II, p. 344.

7. Prima di parlare delle ricerche di Huygens sul centro di oscillazione, faremo a proposito del moto pendolare ed oscillatorio in generale, alcune considerazioni elementarissime, e quindi assai chiare, ad onta che siano trattate senza rigore.

Galileo conosceva già parecchie proprietà del moto del pendolo. Numerose osservazioni qua e là nei suoi dialoghi dimostrano, che egli era già in possesso dell'idee, che ora esporremo, o che era sul punto di possedere. Il corpo pesante sospeso al filo del pendolo si muove sopra una circonferenza, il cui raggio è la lunghezza l di questo filo (fig. 107). Si dia ad esso uno spostamento piccolissimo; allora esso oscillerà, descrivendo un arco piccolissimo, il quale si confonderà sensibilmente con la corda CB, che è percorsa nello stesso tempo del diametro verticale $BD = 2l$. Sia t la durata della caduta, allora avremo:

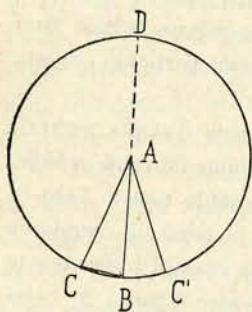



Fig. 107.

$$2l = \frac{gt^2}{2}\ , \text{ da cui } t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Ma siccome il moto al di là di B sull'arco BC′ impiega lo

stesso tempo del moto su CB, si otterrà per la durata T di un'oscillazione da C a C′:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Ad onta che questa spiegazione sia grossolana, tuttavia si vede che essa mette in evidenza la *forma* reale della legge del pendolo; infatti si sa che la formula esatta della durata delle oscillazioni piccolissime è:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Il moto del pendolo si può considerare come una caduta su una serie di piani inclinati. Indichiamo con α l'angolo del filo con la verticale; il pendolo riceve l'accelerazione g. sen α verso la posizione di equilibrio. Per *piccoli* valori di α quest'accelerazione può farsi eguale a g. α; dunque essa è sempre proporzionale all'ampiezza e diretta in senso contrario. Per piccole ampiezze si può anche trascurare la curvatura del cammino.

8. Per mezzo di questi preliminari ora noi possiamo procedere allo studio del moto oscillatorio in modo abbastanza semplice ed elementare. Un corpo si muove sopra una retta OA (fig. 108), e costantemente riceve un' accelerazione diretta verso il punto O e proporzionale alla sua distanza da questo punto. Rappresentiamo in ciascun punto questa accelerazione mediante un' ordinata perpendicolare alla retta del moto e portata al disopra e al disotto, secondo che l' accelerazione è diretta verso sinistra o verso destra. Il corpo abbandonato nel

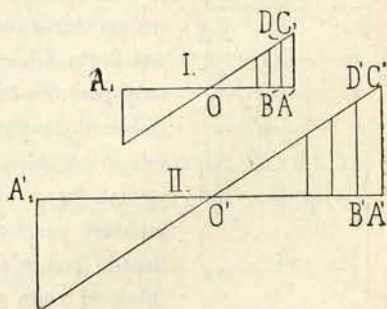



Fig. 108.

punto A si moverà verso O con un moto uniformemente accelerato, poi da O verso il punto A_1; talchè $OA_1 = OA$; poi ritornerà da A_1 verso O ecc. Si vede subito facilmente l'indipendenza della durata dell'oscillazione (durata del moto AOA_1) e della sua ampiezza (lunghezza OA). A tal uopo consideriamo nelle figure I e II due oscillazioni simili di ampiezze l'una doppia dell'altra. L'accelerazione essendo variabile da un punto all'altro, dividiamo le lunghezze OA ed $O'A' = 2OA$ in un numero grandissimo di parti elementari eguali, ciascun elemento $A'B'$ di $O'A'$ essendo doppio dell'elemento corrispondente AB di OA.

Le accelerazioni iniziali φ e φ' sono legate dalla relazione $\varphi' = 2\varphi$. Gli elementi AB ed $A'B' = 2AB$ saranno perciò percorsi con le accelerazioni rispettive φ e 2φ nello stesso tempo τ; e le velocità dei due corpi I e II, al termine del primo elemento percorso, saranno $v = \varphi\tau$ e $v' = 2\varphi\tau$, da cui $v' = 2v$. Le accelerazioni e le velocità iniziali si vede che stanno nel rapporto 1 : 2 nei punti B e B'. Gli spazi infinitesimi corrispondenti successivi saranno percorsi nello stesso tempo; e questa eguaglianza dei tempi dei percorsi esiste per tutte le copie successive dei cammini elementari. Una generalizzazione immediata fa vedere che la durata dell'oscillazione è indipendente dall'ampiezza.

Ora consideriamo (fig. 109, I e II) due moti oscillatori della stessa ampiezza, ma tali che nell'oscillazione II lo stesso allontanamento dal punto O produca un'accelerazione quattro volte maggiore che nel moto I. Analogamente dividiamo le due ampiezze OA ed $O'A' = OA$ in un numero grandissimo di parti uguali; le parti di I sono perciò uguali a quelle di II. Le accelerazioni iniziali in A ed A' sono φ e 4φ; gli spazi elementari percorsi sono $AB = A'B' = s$; e chiamando con τ e τ' le durate rispettive dei cammini, si vede che si ha:

Fig. 109.

$$\tau = \sqrt{\frac{2s}{\varphi}}, \qquad \tau' = \sqrt{\frac{2s}{4\varphi}} = \frac{\tau}{2}.$$

L'elemento A'B' è dunque percorso in un tempo eguale alla metà di quello del percorso dell'elemento AB. Le velocità finali v e v' in B e B' sono:

$$v = \varphi\tau\,, \qquad v' = 4\varphi\,\frac{\tau}{2} = 2v\,.$$

Le velocità iniziali in B e B' stando fra loro come $1:2$; e le accelerazioni come $1:4$; si vede che l'elemento del cammino successivo in I sarà percorso in un tempo doppio di quello del percorso dell' elemento corrispondente in II. Generalizzando si vede che per ampiezze uguali le durate dell'oscillazioni sono inversamente proporzionali alle radici quadrate delle accelerazioni.

9. Queste considerazioni possono essere abbreviate e si possono rendere molto più chiare mediante un metodo di rappresentazione impiegato la prima volta da Newton. Newton chiama sistemi materiali *simili* i sistemi materiali, le cui figure geometriche sono simili, e le cui masse omologhe stanno fra loro nello stesso rapporto di similitudine. Inoltre egli osserva che questi sistemi sono animati da moti simili, quando i punti omologhi descrivono cammini simili in tempi proporzionati. Nella odierna terminologia geometrica questi sistemi meccanici, che hanno cinque dimensioni, si dicono *simili* sol quando le dimensioni lineari, i tempi e le masse sono nello *stesso* rapporto. Dunque sarebbe più esatto chiamarli *affini* l'uno dell'altro.

Conserveremo questa denominazione assai appropriata di sistemi *simili*; e nelle considerazioni che dovremo fare in seguito faremo astrazione delle masse. Dunque siano, in due i moti simili, s ed αs i tempi omologhi, t e βt i tempi omologhi, si avrà:

per le velocità omologhe: $v = \dfrac{s}{t}\,,\ \gamma v = \dfrac{\alpha s}{\beta t}\,;$

per le accelerazioni omologhe: $\varphi = \dfrac{2s}{t^2}\,,\ \varepsilon\varphi = \dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{2s}{t^2}\,.$

Ora si vede subito che le oscillazioni di ampiezze 1 ed α, descritte da un corpo nelle condizioni sopra ammesse, sono moti

simili. Quindi osservando che il rapporto delle accelerazioni omologhe è $\varepsilon = \alpha$, si trova:

$$\alpha = \frac{\alpha}{\beta^2};$$

da cui, per il rapporto dei tempi omologhi, e quindi anche per quello delle durate di oscillazione:

$$\beta = \pm 1.$$

Dunque ne consegue che le durate di oscillazione sono indipendenti dalle ampiezze.

Se due oscillazioni hanno le loro ampiezze, che stanno fra loro come $1 : \alpha$, e le loro accelerazioni come $1 : \alpha\mu$, si ottiene:

$$\varepsilon = \alpha\mu = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{\pm\sqrt{\mu}},$$

ciò che di nuovo mostra la seconda legge del moto oscillatorio.

Due moti circolari uniformi sono sempre simili; indichiamo con $\frac{1}{\alpha}$ il rapporto dei raggi e $\frac{1}{\gamma}$ quello delle velocità; il rapporto delle accelerazioni sarà:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta^2};$$

da cui, poichè $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, si ha:

$$\varepsilon = \frac{\gamma^2}{\alpha},$$

la quale dà le leggi dell'accelerazione centripeta.

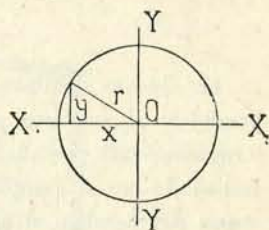
Peccato che queste questioni sull'*affinità* meccanica e foronomica siano *così poco* studiate, poichè esse promettono la più bella e la più luminosa estensione delle nostre cognizioni.

10. Fra il moto circolare uniforme ed i moti oscillatori che abbiamo studiato, esiste una relazione importante. Riferiamo il

moto circolare a due assi coordinati rettangolari, la cui origine O (fig. 110) è il centro della circonferenza, e scomponiamo secondo le direzioni X e Y l'accelerazione centripeta φ, che è la condizione di questo moto.

Osserviamo che la proiezione del moto sull'asse delle X dipende solo dalla componente X dell'accelerazione. Si possono considerare i due moti e le due accelerazioni come indipendenti fra loro.

Fig. 110.

Ora i due moti componenti sono moti oscillatorî intorno al centro O. L'ampiezza x corrisponde ad una accelerazione $\varphi \, . \, \frac{x}{r}$ o $\frac{\varphi}{r} \, . \, x$ diretta verso il punto O. Quindi l'accelerazione è proporzionale all'ampiezza e il moto è perciò identico al moto oscillatorio, di cui ora si è parlato. La durata T di una intiera oscillazione, la quale comprende il moto d'andata e quello di ritorno, è uguale alla durata della rivoluzione del mobile. Ma si sa che:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2};$$

si ha dunque

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{\varphi}}.$$

Ora $\frac{\varphi}{r}$ è l'accelerazione per $x = 1$; indicando con f il valore che essa ha per un'ampiezza uguale all'unità di lunghezza, si avrà:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{f}};$$

e indicando come d'ordinario con T la durata di un'oscillazione semplice, formata da un'andata o da un ritorno, si avrà:

$$T = \pi \sqrt{\frac{1}{f}}.$$

11. Questo risultato si può subito applicare alle oscillazioni pendolari di ampiezza *piccolissima,* per cui si possono ripetere i ragionamenti precedenti, poichè la curvatura è trascurabile. Indicando con a l'angolo, che fa il filo con la verticale, se la massa del pendolo si allontana dalla sua posizione d'equilibrio della lunghezza $l \, . \, a$, e l'accelerazione corrispondente è $g \, . \, a$, allora si ha:

$$f = \frac{g\,a}{l\,a} = \frac{g}{l}, \quad \text{e} \quad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dunque si vede che la durata delle oscillazioni è in ragione diretta della radice quadrata della lunghezza del pendolo, ed inversa dalla radice quadrata dell'accelerazione della gravità. Un pendolo, la cui lunghezza fosse quadrupla di quella del pendolo a secondi, avrebbe perciò un'oscillazione di due secondi. Un pendolo a secondi, inalzato sulla superficie della Terra ad una altezza eguale al suo raggio, non subirebbe più che una accelerazione $\frac{g}{4}$; e la sua durata di oscillazione sarebbe così di due secondi.

12. Si può facilmente dimostrare coll'esperienza la relazione che esiste fra la lunghezza del pendolo e la durata della sua oscillazione. Si prendano i pendoli *a, b, c* (fig. 111) che sono sospesi con due fili per avere l'invariabilità delle oscillazioni; le loro lunghezze rispettive siano 1, 4, 9.

Si verifica che a fa due oscillazioni mentre b ne fa una soltanto; e ne fa tre mentre c ne fa una.

È alquanto più difficile constatare sperimentalmente la relazione che esiste fra T e g, poichè non si può far variare a piacere

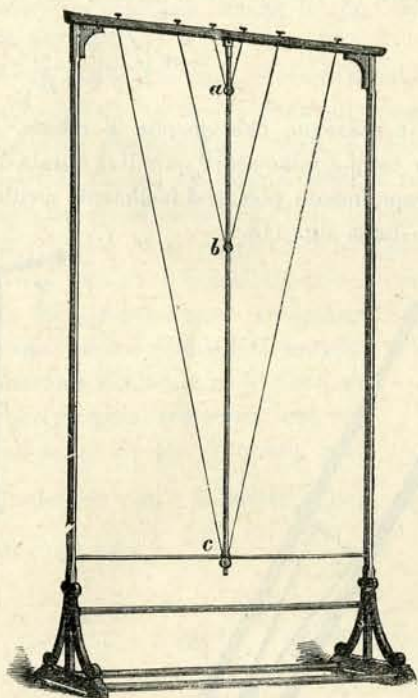



Fig. 111.

l'accelerazione dovuta alla gravità. Si può peraltro raggiungere lo scopo, facendo agire sul pendolo unicamente una componente di g. Infatti sia (fig. 112) A l'asse di rotazione del pendolo posto nel piano del disegno, che supponiamo verticale; l'intersezione EE del piano del disegno col piano di oscillazione è quindi la posizione d'equilibrio del pendolo. Sia β l'angolo che fa l'asse di rotazione AA col piano orizzontale, che è uguale all'angolo che

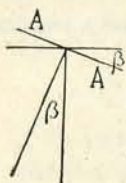
fa il piano di oscillazione EE col piano verticale. L'accelerazione, che agisce nel piano di oscillazione, è $g \cdot \cos \beta$. Se si dà al pendolo un piccolo spostamento a nel suo piano di oscillazione, allora l'accelerazione corrispondente sarà $(g \cos \beta) \cdot a$ e la durata dell'oscillazione:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \beta}}.$$

Fig. 112

Ne consegue che quando β cresce, l'accelerazione $g \cdot \cos \beta$ diminuisce; e quindi la durata dell'oscillazione aumenta. L'esperimento può farsi facilmente mediante l'apparato rappresentato dalla fig. 113.

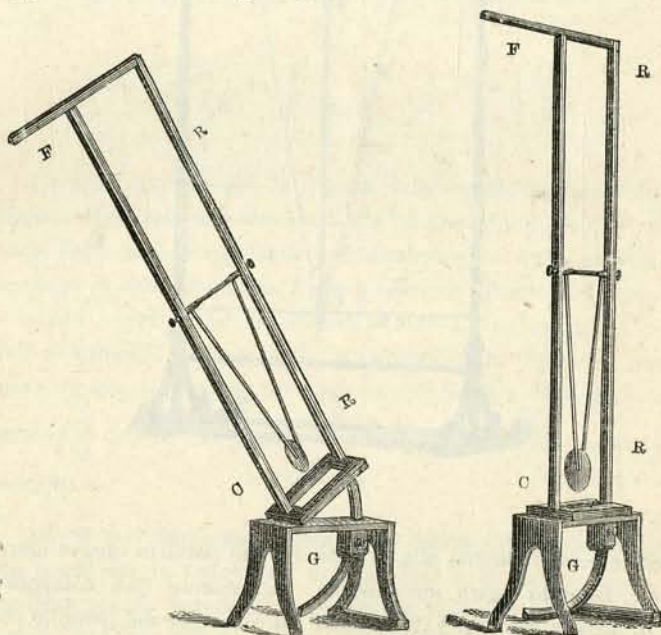



Fig. 113.

Il telaio RR, che è mobile intorno ad una cerniera c, può essere inclinato e fissato in una posizione di data inclinazione mediante un arco graduato g ed una vite di pressione. Si osserva

che la durata d'oscillazione aumenta con β. Se si porta il piano di oscillazione in posizione orizzontale, allora il telaio poggia sul piede f, e la durata di oscillazione diviene infinitamente grande. Allora il pendolo non ritorna più verso alcuna posizione d'equilibrio determinata, ma descrive parecchie rivoluzioni successive complete nella stessa direzione, finchè la sua velocità non sia stata distrutta dall'attrito.

13. Quando il pendolo cessa il suo movimento in un *piano* e si muove nello *spazio* intorno al punto di sospensione, il filo del pendolo descrive una superficie conica. Huygens studiò pure il moto del pendolo conico; ne esamineremo un caso particolare e semplice. Abbiasi un pendolo (fig. 114) di lunghezza l; lo si allontani dalla verticale di un angolo a e si dia alla massa, che esso sostiene, una velocità b perpendicolare al piano del filo e della verticale. Se l'accelerazione centrifuga sviluppata fa equilibrio a quella della gravità, cioè se l'accelerazione risultante ha la direzione del filo, la massa sospesa descriverà una circonferenza orizzontale. Si ha in questo caso $\frac{\varphi}{g} = \tan a$. Indicando con T la durata di una rivoluzione, allora si avrà:

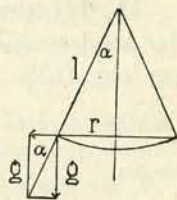



Fig. 114.

$$\varphi = \frac{4r\pi^2}{T^2}, \qquad \text{da cui } T = 2\pi . \sqrt{\frac{r}{\varphi}};$$

e sostituendo ad $\frac{r}{\varphi}$ il suo valore, avremo:

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{l \text{ sen } a}{g \tan a} = \frac{l \cos a}{g};$$

quindi si ha per la durata della rivoluzione del pendolo:

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{l \cos a}{g}}.$$

La velocità v del moto è data da:

$$v = \sqrt{r\varphi},$$

o, essendo $\varphi = g \tan a$, da:

$$v = \sqrt{gl \operatorname{sen} a \tan a}\,.$$

Se l'angolo del cono è piccolissimo, si può scrivere

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{l}{g}},$$

la quale è identica alla formula del pendolo ordinario, poichè *una* rivoluzione del pendolo conico corrisponde a *due* oscillazioni semplici del pendolo piano.

14. Huygens fu il primo a proporre la determinazione esatta dell'accelerazione della gravità mediante le osservazioni del pendolo. Dalla formula del pendolo semplice, che è formato da una sferetta attaccata a un filo, la quale è $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, si ricava:

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

Alla latitudine di 45° si trova per g il valore 9,806 espresso in $\frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}$, ossia in numero rotondo 10 metri per secondo, valore abbastanza esatto per un calcolo provvisorio, e che presenta il vantaggio di ricordarsi facilmente.

15. Ogni principiante riflessivo si fa questa domanda: Come si può trovare la durata delle oscillazioni, cioè un *tempo*, dividendo un numero che misura una *lunghezza* per un numero che misura un'*accelerazione* ed estraendo la radice quadrata dal quoziente? Per comprenderla bisogna ricordarsi che $g = \frac{2s}{t^2}$ è il quoziente d'una lunghezza per il quadrato del tempo. Dunque la

formula che dà la durata è in realtà la seguente:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{2s} t^2};$$

$\frac{l}{2s}$ essendo il rappòrto di due lunghezze, e quindi è un numero; onde la quantità che si trova sotto il radicale è dunque il quadrato del tempo. È perciò evidente che il valora di T sarà espresso in secondi, se si è scelto il secondo per unità di tempo nel misurare g.

La formula

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$$

fa vedere direttamente che g è il quoziente di una lunghezza per il quadrato del tempo secondo la natura dell'accelerazione.

16. Il più importante dei risultanti ottenuti da Huygens è la soluzione del problema della determinazione del centro di oscillazione. Quando si tratta della dinamica di un corpo *unico*, i principî di Galileo sono perfettamente sufficenti. Ora questo nuovo problema consiste nella determinazione del moto di *parecchi* corpi, che agiscono gli uni su gli altri, e non lo si può risolvere senza ricorrere ad un nuovo principio. Fu precisamente questo nuovo principio che scoprì Huygens.

Si sa che i pendoli più lunghi oscillano più lentamente, i più corti più presto. Un corpo solido pesante, mobile intorno ad un asse qualunque, il quale non passi per il suo centro di gravità, forma un pendolo composto. Ciascuna delle molecole materiali di questo corpo, posta sola alla stessa distanza dall'asse, avrà una durata d'oscillazione particolare; ma mediante il legame delle sue parti fra loro il corpo si muove come un tutto, e la durata della sua oscillazione ha un valore unico e ben determi nato. Abbiansi parecchi pendoli di diverse lunghezze (fig. 115), i più corti oscillano più rapidamente, e i più lunghi meno. Se si riuniscono in uno solo, avverrà che il moto dei pendoli

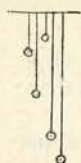
più lunghi sarà ritardato, quello dei più corti accelerato, e che per l'insieme ne conseguirà una durata d'oscillazione intermedia.

Si avrà dunque un pendolo semplice di lunghezza intermedia, fra quelle del maggiore e del minore dei pendoli considerati, la cui oscillazione avrà la stessa durata di quella del pendolo composto. Portando la lunghezza di questo pendolo semplice sul pendolo composto si trova un punto che, ad onta dei suoi legami con gli altri punti, oscilla come se fosse solo. Questo punto si chiama *centro di oscillazione*. Mersenne per la prima volta propose il problema della determinazione di questo centro; la soluzione che ne diede Descartes è assai concisa e insufficente.

Fig. 115.

17. La prima soluzione generale fu data da Huygens. Oltre Huygens quasi tutti gl'investigatori della sua epoca si sono occupati di questa questione, e si può dire che essa provocò lo svolgimento dei principii più importanti della meccanica moderna. Huygens prese le mosse dall'idea *nuova* seguente, assai più importante del problema stesso. In tutti i casi, qualunque siano le modificazioni che le reciproche reazioni delle molecole del pendolo apportino al moto di ciascuna di esse, le velocità acquistate nel moto di discesa del pendolo debbono essere tali, che il centro delle masse possa *risalire esattamente all'altezza d'onde è caduto,* tanto se le masse conservino i loro legami, quanto se questi legami siano distrutti. Davanti ai dubbi dei suoi contemporanei, rispetto all'esattezza di questo principio, Huygens fu costretto di far osservare, che esso contiene solo l'affermazione del fatto, che i corpi pesanti non si muovono da se stessi verso l'alto. Infatti, si supponga che il centro di gravità delle masse, collegate fra loro durante la caduta, possa, dietro la soppressione dei legami, salire ad una altezza maggiore di quella della caduta. Allora ne verrà che i gravi possono mediante il loro proprio peso, purchè questa operazione sia ripetuto un numero sufficente di volte, innalzarsi ad un'altezza qualunque. Se invece, dopo la soppressione dei legami, il centro di gravità può innalzarsi solo

ad un'altezza minore di quella della caduta, basterebbe rovesciare il senso delle operazioni, affinchè novellamente il corpo s'innalzi mediante il suo proprio peso ad un'altezza qualunque. Il postulato di Huygens era dunque in realtà uno di quelli di cui nessuno ha mai dubitato, e che invece ciascuno conosceva *istintivamente*. Huygens dava talvolta a questa conoscenza istintiva un valore *astratto*, e non mancò di partire da questo punto per dimostrare l'inutilità della ricerca del moto perpetuo. Possiamo riconoscere nella proposizione, che ora abbiamo svolta, *la generalizzazione di una delle concezioni di Galileo.*

18. Ora diremo dell'uso che si fa di questo principio nella determinazione del centro di oscillazione. Per semplicità consideriamo un pendolo lineare OA (fig. 116) formato di un gran numero di masse, indicate nella figura da punti. Se l'O si abbandona a se stesso nella posizione OA, esso discenderà fino in B, e salirà sino alla posizione A′; per cui AB = BA′. Il suo centro di gravità salirà da una banda, tanto quanto è disceso dall'altra; ma la soluzione non può trarsi da questa osservazione. Ora si supponga che all'istante, in cui il pendolo passa per OB, le particelle materiali istantaneamente si liberino dai loro legami; le loro velocità acquistate innalzeranno il loro centro di gravità alla stessa altezza di prima; e se s'immagina che ciascuna delle sue particelle materiali, oscillanti liberamente, sia fissa nella sua posizione *d'innalzamento massimo*, i pendoli più corti si troveranno al di qua e i più lunghi al di là di OA′; ma il centro di gravità del sistema si troverà su questa retta nella sua primitiva altezza.

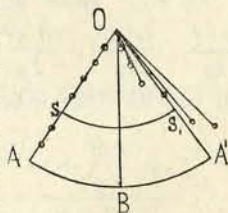



Fig. 116.

D'altra parte le velocità impresse alle molecole materiali sono proporzionali alle loro distanze dall'asse; essendo *data* una di queste velocità, tutte le altre sono note, e se ne trarrà l'altezza di ascensione del centro di gravità. Inversamente la velocità

d'una massa qualunque è determinata dall'altezza del centro di gravità. Ora per conoscere interamente il moto d'un pendolo basta conoscere la velocità corrispondente ad un'altezza di caduta data.

19. Premesse queste osservazioni, intraprenderemo la soluzione del problema. Essendo dato un pendolo lineare (fig. 117), prendiamone un segmento a partire dall'asse, e sia k l'altezza, da cui cade l'estremità di questo segmento, quando il pendolo va dalla sua posiziane di ampiezza massima alla sua posizione d'equilibrio. Le altezze di caduta delle masse $m, m', m'', \ldots$ poste alle distanze $r, r', r'', \ldots$ dall'asse saranno $rk, r'k, r''k, \ldots$ e l'altezza della caduta del centro di gravità sarà:

$$\frac{mrk + m'r'k + m''r''k + \ldots\ldots}{m + m' + m'' + \ldots\ldots} = k\,\frac{\Sigma m r}{\Sigma m}.$$

Questo passaggio alla posizione d'equilibrio comunica al punto, posto alla distanza 1 dall'asse, una velocità v ancora incognita.

L'altezza di ascensione di questo punto, dopo la soppressione dei legami, sarà dunque $\frac{v^2}{2g}$, e le altezze corrispondenti per le altre masse saranno: $\frac{(rv)^2}{2g}, \frac{(r'v)^2}{2g}, \frac{(r''v)^2}{2g} \ldots$ L'altezza di ascensione del centro di gravità delle masse rese libere sarà quindi:

Fig. 117.

$$\frac{m\,\frac{(rv)^2}{2g} + m'\,\frac{(r'v)^2}{2g} + m''\,\frac{(r''v)^2}{2g}\ \ldots}{m + m' + m''\ \ldots} = \frac{v^2}{2g}\cdot\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m}.$$

Il principio fondamentale di Huygens dà:

$$k\,\frac{\Sigma m r}{\Sigma m} = \frac{v^2}{2g}\,\frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m} \qquad \text{(a)}$$

Questa equazione dà la relazione che passa fra l'altezza della caduta k e la velocità v. Poichè tutti i moti pendolari della stessa

ampiezza sono foronomicamente simili, ne consegue che il moto studiato è compiutamente determinato.

Per trovare la lunghezza del pendolo semplice, la cui oscillazione si fa nello stesso tempo di quella del pendolo composto proposto, osserviamo che fra la sua altezza di caduta e la sua velocità deve esistere la stessa relazione che nel caso della caduta libera. Sia y la lunghezza di questo pendolo; la sua altezza di caduta è ky e la sua velocità vy; si ha:

$$\frac{(vy)^2}{2g} = ky;$$

od

$$y \cdot \frac{v^2}{2g} = k. \tag{b}$$

Moltiplicando membro a membro l'equazioni (a) e (b) avremo:

$$y = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r}.$$

Possiamo anche servirci della similitudine foronomica e procedere così: dalla (a) abbiamo

$$v = \sqrt{2gk} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma m r}{\Sigma m r^2}}.$$

Il pendolo semplice di lunghezza 1 ha, sotto circostanze corrispondenti, la velocità

$$v_1 = \sqrt{2gk}.$$

Sia T la durata di oscillazione del pendolo composto; quella del pendolo semplice di lunghezza 1 è $T_1 = \pi . \sqrt{\frac{1}{g}}$; e si trova nell'ipotesi delle ampiezze uguali, secondo l'ipotesi fatta:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{v_1}{v},$$

da cui

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{g \Sigma m r}}.$$

20. Si vede senza difficoltà che il principio fondamentale posto da Huygens consiste nel riconoscimento del *lavoro come determinante della velocità* o più esattamente *come determinante della forza viva.* Si chiama forza viva di un sistema di masse $m, m', m'', \ldots$, animate dalle velocità rispettive $v, v', v'' \ldots$, la somma:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{m' v'^2}{2} + \frac{m'' v''^2}{2} = \ldots .$$

Il principio fondamentale di Huygens è identico al principio delle forze vive, ed i contributi che vi apportarono gli altri investigatori riguardano non tanto la sostanza quanto la forma.

Abbiasi un sistema affatto qualunque di pesi $p, p', p'' \ldots$, collegati fra loro o liberi, che cadono dalle altezze $h, h', h'' \ldots$, e conseguono così le velocità $v, v', v'' \ldots$; il principio di Huygens, che esprime l'eguaglianza *dell'altezza della caduta e dell'altezza di ascensione* del centro di gravità, dà l'equazione:

$$\frac{ph + p'h' + p''h'' + \ldots}{p + p' + p'' \ldots} = \frac{p\frac{v^2}{2g} + p'\frac{v'^2}{2g} + p''\frac{v''^2}{2g} + \ldots}{p + p' + p'' \ldots},$$

ossia:

$$\Sigma p h = \frac{1}{g} \Sigma \frac{p v^2}{2}.$$

Essendo ora in possesso del concetto di " massa, « che mancava ancora ad Huygens, possiamo sostituire al rapporto $\frac{p}{g}$ al massa m, e si ottiene:

$$\Sigma p h = \frac{1}{2} \cdot \Sigma m v^2,$$

la quale si può assai facilmente estendere al caso delle forze variabili.

21. Il teorema delle forze vive dà il mezzo per determinare la durata delle oscillazioni infinitesime di un pendolo qualunque. Si abbassi dal centro di gravità S (fig. 118) del corpo una perpendicolare all'asse di rotazione e si fissi su quest'ultima il punto, che si trova all'unità di distanza dall'asse: si indichi con k l'altezza verticale, di cui è disceso questo punto all'istante, in cui esso passa per la sua posizione di equilibrio, e v la velocità che allora possiede. Il lavoro eseguito durante la caduta è determinato dal moto del centro di gravità; si avrà dunque:

lavoro fatto durante la caduta = forza viva,

$$akg\text{M} = \frac{v^2}{2} \Sigma m r^2,$$

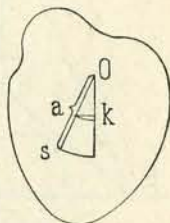



Fig. 118.

M essendo la massa totale del corpo. In questa formula si fa un uso anticipato della espressione della forza viva. Ragionando come si è fatto nel caso precedente, abbiamo:

$$\text{T} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{a g \text{M}}}.$$

22. Si vede dunque che la durata della oscillazione infinitesima di un pendolo dipende da due fattori: dal valore della espressione $\Sigma m r^2$ che Eulero ha chiamato *momento d'inerzia*, e che Huygens adopera senza dargli un nome particolare, e dal valore di agM. Quest'ultima espressione, che per brevità diremo *momento statico*, è il prodotto a. P del peso del pendolo per la distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione. La conoscenza di questi due valori determina la lunghezza del pendolo semplice della stessa durata di oscillazione (isocrona) e la posizione del centro di oscillazione. Per calcolare la lunghezza di questo pendolo semplice isocrona, Huygens non possedeva metodi analitici, i quali furono scoperti solo più tardi. Egli impiegò un processo geometrico veramente ingegnoso, di cui daremo qualche esem-

pio. Proponiamoci di determinare la durata di oscillazione di un rettangolo materiale ABCD, che oscilla intorno all'asse AB. Lo si divida in superficie infinitesime $f, f', f'' \ldots$, poste alle distanze r, r', r'' ... dall'asse. La lunghezza del pendolo semplice isocrono è data dalla formula:

Fig. 119.

$$\frac{fr^2 + f'r'^2 + f''r''^2 + \ldots}{fr + f'r' + f''r'' + \ldots}.$$

Nei punti C e D innalziamo CE e DF perpendicolari su ABCD in modo che CE = DF = AC = BD, e così si costruisca il prisma omogeneo ABCDEF. Cerchiamo la distanza del centro di gravità di questo prisma dal piano condotto per AB parallelamente a CDEF. Dobbiamo per ciò considerare le sottili colonne fr, $f'r'$, $f''r''$ ..., e le loro distanze r, r', r'' ... da questo piano; la distanza cercata è data dalla espressione:

$$\frac{fr \cdot r + f'r' \cdot r' + f''r'' \cdot r'' + \ldots}{fr + f'r' + f''r'' + \ldots}$$

Dunque si ritrova la formula precedente. Il centro di oscillazione del rettangolo ed il centro di gravità del prisma sono perciò posti alla stessa distanza $\frac{2}{3}$. AC dall'asse.

In quest'ordine di idee si riconosce facilmente l'esattezza della proposizione seguente: Per un rettangolo omogeneo di altezza h, che oscilla intorno alla sua base superiore, il centro di gravità è alla distanza $\frac{h}{2}$ dall'asse, ed il centro di oscillazione è alla distanza $\frac{2h}{3}$. Per un triangolo omogeneo di altezza h, il cui asse di rotazione passa per il vertice ed è parallelo alla base, le distanze dall'asse dei centri di gravità e di oscillazione sono rispettivamente $\frac{2}{3}h$

e $\frac{3}{4}h$. Indicando con Δ_1, Δ_2 i momenti di inerzia e con M_1, M_2 le masse del rettangolo e del triangolo, si ha:

$$\frac{2}{3}h = \frac{\Delta_1}{\frac{h}{2} . M_1}, \quad \frac{3}{4}h = \frac{\Delta_2}{\frac{2}{3}h\, M_2};$$

da cui:

$$\Delta_1 = \frac{h^2 M_1}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{h^2 M_2}{2}.$$

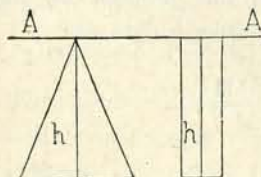
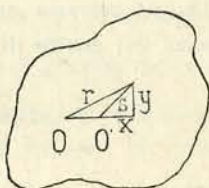



Fig. 120.

Fig. 121.

Questo processo geometrico assai elegante permette di risolvere molti altri problemi di questa specie, che presentemente si trattano in una maniera del tutto pratica, ma senza confronto assai più comoda.

23. Huygens si servì anche, ma sotto forma alquanto differente, del teorema seguente riguardante i momenti d'inerzia. Sia O il centro di gravità di un corpo (fig. 121); lo si prenda per origine di un sistema di assi coordinati rettangolari, e supponiamo noto il momento d'inerzia rispetto all'asse delle z. Indicando con m un elemento di massa ed r la sua distanza da quest'asse, questo momento di inerzia è:

$$\Delta = \Sigma m r^2.$$

Si sposti l'asse di rotazione parallelamente a sè stesso, di una lunghezza a secondo l'asse delle x; sia O′ la sua nuova posizione. La distanza r dell'elemento di massa dall'asse diviene ϱ, ed il nuovo momento d'inerzia è:

$$\Theta = \Sigma m \varrho^2 = \Sigma m [(x-a)^2 + y^2] = \Sigma m (x^2 + y^2) - 2a \Sigma m x +$$

$+ a^2 \Sigma m$, o $\Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma m r^2 = \Delta$, e le proprietà del centro di gravità dànno $\Sigma m x = o$; d'altra parte $\Sigma m = M$ è l'intiera massa del corpo; onde:

$$\Theta = \Delta + a^2 M.$$

Questa formula ci offre il mezzo dunque di calcolare facilmente il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualunque, essendo dato il momento d'inerzia rispetto ad un asse, che passa pel centro di gravità e *parallelo* al primo.

24. Questo teorema mena ad una proposizione importante. La distanza del centro di oscillazione è dato da:

$$l = \frac{\Delta + a^2 M}{a \, . \, M},$$

ove Δ, M ed a hanno il loro significato precedente. I valori Δ e M sono invariabili per un corpo dato; ne consegue che l è costante, se a non varia. Dunque il pendolo composto formato da un corpo che oscilla intorno ad un asse ha la stessa durata di oscillazione per tutti gli assi *paralleli posti alla stessa distanza* dal centro di gravità. Ponendo $\frac{\Delta}{M} = \kappa$, si ha:

$$l = \frac{\kappa}{a} + a,$$

ove l ed a sono rispettivamente le distanze dall'asse del centro di oscillazione e del centro di gravità. Si vede dunque che il centro di oscillazione è sempre più distante dall'asse del centro di gravità, e che l'eccesso della sua distanza dall'asse su quella del centro di gravità è $\frac{\kappa}{a}$, che rappresenta perciò la distanza di questi due punti.

Conduciamo per il centro di oscillazione un asse parallelo all'asse primitivo; e lo si scelga per il nuovo asse di rotazione; la lunghezza l' del pendolo composto nuovo così formato si ot-

terrà, sostituendo $\frac{\varkappa}{a}$ ad a nella formula precedente, ciò che dà:

$$l' = \frac{\varkappa}{\frac{\varkappa}{a}} = \frac{\varkappa}{a} = a + \frac{\varkappa}{a} = l.$$

La durata di oscillazione è dunque la stessa per un asse parallelo condotto per il centro di oscillazione, e quindi per ogni asse parallelo, la cui distanza dal centro di gravità è uguale alla distanza $\frac{x}{a}$ del centro di oscillazione. L'insieme di tutti gli assi paralleli, dando la stessa durata di oscillazione e posti quindi alle distanze a o $\frac{\varkappa}{a}$ dal centro di gravità, forma dunque due cilindri coussiali. La durata di oscillazione è la stessa, qualunque sia la generatrice di questi cilindri, che si prende per asse di rotazione.

25. Daremo a questi due cilindri il nome di cilindri degli assi. Per stabilire le relazioni che esistono fra loro, si può procedere così. Poniamo $\Delta = k^2 M$; ne consegue:

$$l = \frac{k^2}{a} + a.$$

Cercando il valore di a, che corrisponde ad un valore dato di l, cioè ad una durata di oscillazione data, si ha:

$$a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2}.$$

Dunque, in generale, *due* valori di a corrispondono ad *un* valore di l. Ma se è:

$$\sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2} = o,$$

vale a dire:

$$l = 2k,$$

questi due valori sono eguali e sono:

$$a = k.$$

Indichiamo con a e β i due valori di a, che corrispondono ad un valore di l, si avrà:

$$l = \frac{k^2 + a^2}{a} = \frac{k^2 + \beta^2}{\beta},$$

da cui:

$$\beta (k^2 + a^2) = a (k^2 + \beta^2),$$
$$k^2 (\beta - a) = a\beta (\beta - a),$$
$$k^2 = a\beta.$$

Supponiamo che si conoscano in un corpo *due* assi paralleli, che dànno la stessa durata di oscillazione e posti a distanze disuguali a e β dal centro di gravità. Ciò si verificherà quando si conosca il centro di oscillazione corrispondente ad *un* asse di sospensione qualunque; allora la formula precedente ci permette di costruire k; basta portare β successivamente ad a, e descrivere sulla loro somma una semi-circonferenza, la cui ordi-

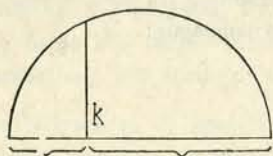
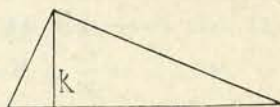



Fig. 122. *Fig. 123.*

nata corrispondente all'estremità comune di a e β è eguale a k (fig. 122). Inversamente, se k è data, si potrà ottenere per ogni valore dato λ di a un altro valore μ, che dà la stessa durata di oscillazione, costruendo (fig. 123) un triangolo rettangolo di cateti λ e k; la perpendicolare innalzata sull'ipotenusa all'estremità del cateto k determina il segmento μ sul prolungamento di λ.

Si consideri un corpo qualunque (fig. 124), il cui centro di gravità O giaccia nel piano del disegno; la si faccia oscillare intorno a tutti gli assi perpendicolari a questo piano. Per ciò che riguarda la durata di oscillazione, tutti gli assi che hanno i loro

piedi sopra l'una o l'altra delle circonferenze α e β noi possiamo scambiarli fra loro. Se si sostituisce ad α una circonfe-

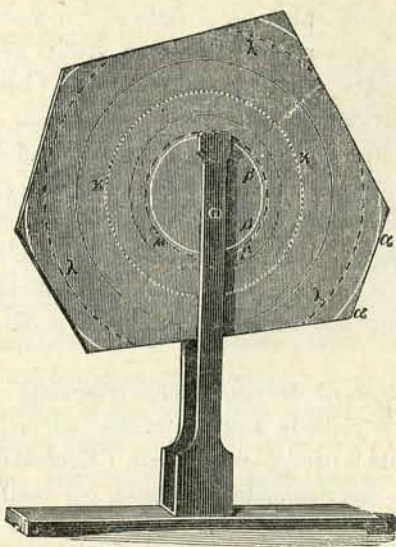



Fig. 124.

renza più piccola λ, si deve sostituire a β una circonferenza maggiore μ; e se α diminuisce sempre più le due circonferenze finiscono per confondersi in una sola di raggio k.

26. Con qualche ragione noi abbiamo insistito su questi problemi particolari. Infatti essi mettono in primo luogo in evidenza la ricchezza dei risultati di Huygens, poichè tutti quelli che abbiamo dati qui sono contenuti nei suoi scritti, quantunque sotto una forma alquanto differente; e quelli che non vi sono espressamente, vi si trovano sotto una forma sì prossima, che si possono completare senza alcuna difficoltà. Ben pochi di questi risultati sono stati incorporati nei trattati moderni; uno di quelli, che vi si ritrovano, consiste nella permutabilità dei centri di sospensione e di oscillazione; ma il modo, col quale esso comunemente è esposto, non tratta esaurientemente la questione. Kater

si è servito di questo risultato per la determinazione esatta della lunghezza del pendolo a secondi.

Le considerazioni precedenti ci sono state utili anche perchè esse hanno reso più chiara la nozione di " momento d'inerzia ". Questa nozione non conduce a nessuna veduta generale che non si possa conseguire senza di essa; ma essa *risparmia* la considerazione individuale delle masse del sistema, e permette di disporne una volta per tutte. Dunque essa conduce così ad una soluzione più spiccia e più comoda, e quindi ha una grande importanza nella *economia* della meccanica. Dietro i tentativi meno felici di Eulero e di Segner, Poinsot ha ampiamente svolto queste idee, e vi ha apportato nuove semplificazioni mediante l'applicazione del suo elissoide di inerzia e del suo elissoide centrale.

27. Le ricerche di Huygens sulle proprietà geometriche e meccaniche della cicloide sono di minore importanza. Huygens realizzò, mediante il pendolo orizzontale, l'isocronismo delle oscillazioni, non più approssimate ma esatte, per oscillazioni di qualunque ampiezza. Questo pendolo presentemente è di nessuna utilità pratica. Perciò non ce ne occuperemo più oltre, qualunque costituisca la bellezza geometrica di questi studi.

Per quanto grandi siano i meriti di Huygens nelle teorie fisiche più disparate, nell'arte dell'orologiaio, nella diottrica pratica, e sovratutto nella meccanica, il suo *capolavoro*, quello che richiedeva la più grande energia intellettuale e che ebbe anche le conseguenze più importanti, è l'enunciato del principio, per mezzo del quale egli risolvè il problema del centro di oscillaziene. Fu precisamente questo principio che non venne apprezzato nel suo proprio valore a causa delle vedute poco perspicaci dei suoi contemporanei ed anche molto tempo dopo. Abbiamo dimostrato, che esso è equivalente al principio della forza viva, e crediamo di averlo così presentato sotto il suo vero aspetto.

28. È impossibile di parlare qui degli importanti lavori che riguardano la fisica; ne citeremo solo alcuni. Egli è il creatore della teoria vibratoria della luce, che infine l'ha avuta vinta sulla

teoria newtoniana della emissione. La sua attenzione si rivolse a quei fenomeni luminosi che erano sfuggiti a Newton. In fisica egli fu ardente partigiano delle idee cartesiane del meccanismo universale, senza per altro chiudere gli occhi sui suoi difetti, che egli criticò più d'una volta in modo categorico e rigoroso. Le sue preferenze puramente meccaniche fecero di lui un avversario delle azioni a distanza, affermate dalla scuola di Newton; egli le sostituì volontieri con pressioni ed urti, cioè mediante azioni per contatto. In questa controversia egli espose certe idee nuove, come quella del flusso magnetico, che rimase senza eco, a causa della grande influenza che esercitò Newton; ma che, mercè l'imparzialità di Faraday e di Maxwell, è stata in questi ultimi tempi apprezzata nel suo vero valore. Inoltre Huygens fu un geometra e un gran matematico; e in quest'ordine d'idee è bene di ricordare la sua teoria dei giuochi di azardo. Le sue osservazioni astronomiche ed i suoi lavori nella diottrica teorica e pratica hanno fatto progredire assai queste scienze. Come tecnico Huygens è l'inventore d'una macchina a polvere, la cui idea è stata praticamente realizzata nei nostri moderni motori a gas. In fisiologia egli presentì la teoria dell'accomodamento dell'occhio mediante la deformazione delle lenti. Tutto ciò può essere qui appena accennato. Il genio di Huygens si rivela sempre più a mano a mano che i suoi lavori vengono messi successivamente in luce nella collezione delle sue opere complete (Christian Huyghens, *Opere complete, pubblicate dalla Società olandese delle scienze.* Haarlem, 1888). In una breve notizia piena di pietosa venerazione I. Bosscha ha dato un sunto dell'insieme dei suoi lavori (Christian Huygens, *Rede am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes*, traduzione tedesca di Engelmann, Lipsia, 1895).

III. *Il contributo di Newton.*

1. Newton ha reso alla scienza della meccanica un doppio servigio. Primieramente la sua scoperta della *gravitazione universale* allargò considerevolmente il dominio della meccanica fisica; inoltre siamo a lui debitori dell'*enunciato formale dei principii della meccanica,* ancora oggi accettati generalmente. Dopo Newton nessun principio nuovo è stato stabilito, ed il lavoro compiuto in meccanica sino da quell'epoca ha consistito in uno svolgimento deduttivo, formale e matematico di essa sulla base dei principii newtoniani.

2. Innanzi tutto consideriamo per un momento i lavori di Newton, che riguardano la fisica. Dalle osservazioni di Ticone Brahe e dalle sue proprie Keplero aveva dedotto le tre leggi empiriche seguenti del movimento dei pianeti attorno al Sole, che Newton spiegò col suo nuovo principio:

1) I pianeti si muovono descrivendo ellissi attorno al Sole come foco.

2) Il raggio vettore, che congiunge un pianeta al Sole, descrive aree eguali in tempi eguali.

3) I cubi dei raggi maggiori delle orbite sono proporzionali ai quadrati dei tempi di rivoluzione.

Essendo chiaramente nota la dottrina di Galileo e di Huygens, se si cerca di dedurne le conseguenze logiche, si vedrebbe che il moto *curvilineo* di un corpo può comprendersi solo ammettendo l'esistenza di un'accelerazione continua, *deviatrice,* e così ci troviamo condotti a cercare nei moti dei pianeti un'accelerazione di questa specie, che sarà perciò sempre diretta verso la concavità dell'orbita.

Ora la legge delle aree si spiega assai semplicemente, supponendo che il pianeta possegga un'accelerazione costantemente diretta verso il Sole. Infatti sia S A B (fig. 125) il settore descritto dal raggio vettore in un elemento di tempo; se l'accele-

razione fosse nulla, questo raggio descriverebbe nell'elemento di tempo successivo il settore SBC, BC essendo uguale ad AB e posto sul prolungamento di AB. Ma durante il primo elemento di tempo un'accelerazione centrale ha prodotto una certa velocità, che fa percorrere al pianeta lo spazio BD nello stesso tempo; il secondo settore elementare descritto dal raggio non è più SBC, ma bensì SBE, essendo BE la diagonale del parallelogramma costruito con BC e BD. Ma si vede che è SBE = SBC = SAB. La legge delle aree o dei settori è perciò una conseguenza immodiata della ipotesi di una accelerazione centrale.

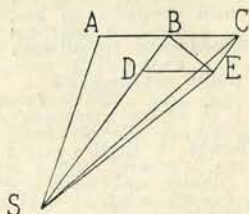



Fig. 125.

Così siamo condotti ad accettare l'ipotesi dell'accelerazione centrale; la *terza legge* dà la forma di questa. Infatti le orbite dei pianeti essendo ellissi assai poco differenti dalle circonferenze, ammetteremo per semplicità che esse siano esattamente circolari. Indicando allora con R_1, R_2, $R_3 \ldots$ i loro raggi e con T_1, T_2, $T_3 \ldots$ i tempi rispettivi delle rivoluzioni, la terza legge di Keplero si può scrivere così:

$$\frac{R^3_1}{T^2_1} = \frac{R^3_2}{T^2_2} = \frac{R^3_3}{T^2_3} = \ldots = \text{Costante.}$$

D'altra parte si è trovato che l'accelerazione centripeda nel moto circolare era data dalla formula $\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$. Se si suppone che per tutti i pianeti φ segua la legge $\varphi = \frac{K}{R^2}$, ove K è una costante, avremo:

$$\frac{K}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \text{ da cui } \frac{R^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2};$$

e

$$\frac{R^3_1}{T^2_1} = \frac{R^3_2}{T^2_2} = \frac{R^3_3}{T^2_3} = \ldots = \frac{K}{4\pi^2} = \text{Costante.}$$

Poichè si è condotti così all'ipotesi di un'accelerazione centrale inversamente proporzionale al quadrato della distanza, la reciproca, cioè la dimostrazione del fatto che questa accelerazione produce un moto, la cui traiettoria è una conica, e particolarmente un'ellisse, non è altro che una mera questione di analisi matematica.

3. Oltre a questa *contribuzione deduttiva*, d'altra parte preparata in tutti i punti da Keplero, Galileo e Huygens, la scienza è ancora debitrice a Newton di un *lavoro di invenzione* che dobbiamo apprezzare: e da parte nostra non esitiamo a considerare quest'ultimo il più importante di tutti. Di qual natura è l'accelerazione, che forma la condizione necessaria del movimento curvilineo dei pianeti intorno al Sole e dei satelliti intorno ai pianeti?

Con una grande audacia di pensiero Newton ammette (e primieramente mediante l'esempio della Luna) che questa accelerazione non è essenzialmente differente da quell'accelerazione della gravità, che ci è tanto familiare. Fu probabilmente il principio di continuità, di cui si è già indicato l'uso importante fattone da Galileo nei suoi lavori, che condusse Newton a questa scoperta. Egli era uso — e questa abitudine sembra essere stata comune a tutti i pensatori veramente grandi — di attenersi fermamente e anche lungamente, per quanto era possibile, ad una concezione, quando fosse stata bene stabilita, anche per i casi, in cui le circostanze fossero modificate in maniera da conservare nella rappresentazione quella uniformità, che la natura c'insegna di riconoscere nei suoi fenomeni. Una proprietà della natura, *una* volta costatata e in *un* luogo qualunque, si ritrova per *tutto* e *sempre*, quantunque forse in un modo meno appariscente. Vedendo che l'attrazione terrestre non si esercita solamente alla superficie della terra, ma si fa anche sentire sulle alte montagne e nelle profonde miniere, il fisico abituato alla continuità del pensiero si rappresenta quest'attrazione anche come operante ad altezze e a profondità maggiori di quelle, che ci sono accessibili. Egli domandò a sè stesso: “Ove è il limite della sua azione?

Questa azione si estende fino alla Luna? „ Questa questione dà origine ad un potente slancio d'immaginazione, e quando essa è posta da un genio intellettuale come quello di Newton, essa necessariamente trae seco i più grandi progressi scientifici.

Siccome Rosenberger ne parla di nuovo nella sua opera: *Newton und seine physikalischen Principien* (1895), egli dimostra giustamente che Newton non è il primo, cui sia venuto in mente l'idea della gravitazione universale, e che invece vi sono stati numerosi meritevolissimi predecessori. Questo apprezzamento è giusto; ma si può dire che presso tutti i suoi predecessori riscontriamo solo presentimenti, tentativi e discussioni imperfette della questione e che prima di Newton nessuno ha manifestato questa idea in modo così completo e così energico; talchè al disopra ed oltre il grande problema matematico che Rosenberger riconosce, qui ancora rimane a Newton l'onore del colossale fatto della immaginazione scientifica.

Fra i predecessori di Newton innanzi tutto ricorderemo Copernico, che disse nel 1543: " Io almeno sono d'avviso che il peso non è altro che una tendenza naturale che la provvidenza divina del padrone del mondo ha dato alle parti, secondo la quale esse possono formare la loro unità e la loro integrità collegandosi insieme sotto la forma sferica; e si può ammettere che questa tendenza si trovi pure nel Sole, nella Luna e negli altri pianeti . . . „. Keplero nel 1609, come prima Gilberto nel 1600, concepì pure la gravità come analoga all'attrazione magnetica. Sembra che mediante questa analogia Hooke pervenne all'idea di una diminuzione di peso con la distanza; e siccome egli supponeva che la gravità agisse per *irradiazione*, pensò pure all'azione in ragione inversa del quadrato. Tentò di dimostrare la diminuzione della gravità mediante pesate eseguite sulla cima della badia di Westminster sui corpi sospesi in alto e in basso, per mezzo di pendoli e di piatti di bilancia (precisamente come le esperienze moderne di Jolly): queste esperienze evidentemente non ebbero alcun risultato. Per dimostrare l'esistenza del moto dei pianeti adopera con molta perspicacia il pendolo conico. Così

Hooke realmente si accostò molto alle concezioni di Newton, ma senza tuttavia arrivare alla loro altezza.

In due Memorie assai notevoli (*Kepler's Lehre von der Gravitation*, Halle, 1896; *Die Gravitation bei Galileo u. Borelli*, Berlino, 1897) E. Goldbeck studia la preistoria della gravitazione con Keplero da una parte e Galileo e Borelli dall'altra. Keplero, ad onta della sua *adesione* alle idee aristoteliane e scolastiche, seppe riconoscere che la questione del sistema planetario è un vero problema fisico. Secondo lui la Luna è *tratta in giro* dalla Terra nel suo movimento intorno al Sole e dal canto suo essa *tira a sè* il flusso del mare come fa la Terra per i corpi pesanti. Egli attribuisce pure l'origine del moto dei pianeti al Sole, che considera come una delle parti di una leva non materiale, che trae seco nella sua rotazione i pianeti tanto più velocemente, quanto più sono ad esso vicini. Questa concezione gli offre il mezzo di scoprire che il Sole ruota su se stesso in meno di ottantotto giorni, che è la durata della rivoluzione di Mercurio. Solo per caso egli suppone il Sole analogo ad una calamita, che ha un moto di rotazione davanti ai pianeti pur essi calamitati. Nel sistema del mondo di Galileo predomina il punto di vista formale, matematico ed estetico. Respinge ogni ipotesi di attrazione e taccia di puerilità le idee di Keplero. Parlando propriamente il problema del sistema planetario non costituisce ancora per lui un problema fisico. Tuttavia ammette con Gilberto, che un punto matematico “ vuoto „ non può avere azione e rende alla scienza un segnalato servigio mediante la sua dimostrazione della natura terrestre dei corpi dell'universo. Borelli nelle sue ricerche sui satelliti di Giove immagina i pianeti come naviganti fra due strati di etere di densità diversa. Attribuisce ad essi una tendenza *naturale* ad avvicinarsi al corpo centrale (l'espressione di attrazione è evitata), che è tenuto in equilibrio, durante la loro rivoluzione, come il punto fisso di una fionda. Borelli spiega le sue concezioni mediante un esperimento assai simile a quello che abbiamo descritto al capitolo II, numero II, § 6, fig. 106. Come si vede le sue idee si avvicinano

molto a quelle di Newton. Il suo sistema pertanto è una combinazione di quelli di Descartes e di Newton.

Newton scoprì pel primo nel caso della Luna che la stessa accelerazione, che governa la caduta delle pietre, impedisce pure a quest'astro di allontanarsi dalla Terra indefinitamente e in linea retta, mentre la sua velocità tangenziale le impedisce di cadere sulla Terra. Il problema del movimento della Luna gli apparve allora subito sotto una luce intieramente nuova, quantunque sotto punti di vista che erano perfettamente noti. La nuova concezione era ad un tempo *stimolante e convincente*, poichè essa riuniva oggetti sino allora lontanissimi e non conteneva che gli elementi più noti; ciò spiega la sua rapida applicazione ad altri campi e la sua *influenza universale*.

La nuova concezione di Newton non fornì solo la soluzione del problema del movimento dei pianeti, proposto da migliaia d'anni, ma rese anche possibile l'intelligenza di altri fenomeni. Siccome l'accelerazione della gravità agisce sino sulla Luna e che nella sua azione non ha limite, così le accelerazioni prodotte dagli altri corpi celesti — cui il principio di continuità vuole che attribuiamo le stesse proprietà, — agiscono ovunque, e quindi hanno un'azione sulla Terra. Ma se la gravitazione è un fenomeno, che non appartiene solo alla Terra, allora non ha la sua sede *unicamente nel centro di essa:* ciascuna sua parte vi partecipa per quanto piccola essa sia; ciascuna di esse accelera le altre parti. Le concezioni fisiche hanno così guadagnato una estensione e una libertà, di cui prima di Newton non si aveva alcun presentimento.

Questa concezione generò per così dire spontaneamente un'intera serie di questioni riguardanti l'azione delle sfere sopra altri corpi esterni, interni o posti sulla loro superficie, e ad un tempo le ricerche sulla forma della Terra e sul suo schiacciamento a causa della rotazione. L'enigma del problema delle maree, la cui relazione colla Luna era già stata osservata da tempo, si trovò tutto ad un tratto risoluto mediante l'accelerazione impressa da quest'astro alla massa più mobile delle acque terrestri.

Newton giunse a comprendere l'identità della gravità terrestre e della gravità generale, cioè della gravitazione che determina i movimenti dei corpi celesti, immaginando una pietra lanciata orizzontalmente dalla vetta di un'alta montagna con velocità successivamente maggiore. Se si fa astrazione della resistenza dell'aria, la parabola di proiezione aumenterà sempre più sino a che infine non tocchi più la Terra, e che il proietto si metta a ruotare attorno a questa come un satellite. Il suo punto di partenza è il fatto della gravità universale. Egli dice chiaramente che non è riuscito a trovare la spiegazione di questo fenomeno e che non si arrischia a questo riguardo di fare alcuna ipotesi. Nullameno si può vedere da una delle sue lettere a Bentley che egli ha nell'animo qualche inquietudine. Gli sembra *assurdo* ammettere che la gravitazione della materia sia essenziale e spontanea e che un corpo possa agire sopra un altro attraverso a uno spazio voto e senza un intermediario; ma si rifiuta di occuparsi della natura materiale o immateriale (spirituale?) di questo agente intermediario. Dunque Newton ha inteso come altri investigatori, alcuni dei quali lo precedettero ed altri vennero dopo, il bisogno di una spiegazione della gravità mediante particolari azioni per contatto. Ma il grandissimo successo che ottenne Newton nell'astronomia, ponendo le forze a distanza come base della deduzione, cambiò subito intieramente la situazione. Gli investigatori si abituarono alle forze a distanza, considerate come punto di partenza dato dalla spiegazione ed il bisogno di ricercare la loro provenienza subito scomparsa completamente. Allora fu fatto il tentativo di introdurre queste forze negli altri campi della fisica, concependo i corpi come costituiti di molecole separate da spazi vuoti e operanti a distanza le une sulle altre. Finalmente quest'azione a distanza delle loro molecole servì anche a spiegare la resistenza che i corpi oppongono alla pressione e all'urto, cioè l'azione a contatto: infatti mediante la discontinuità, quest'ultima azione è rappresentata da un'azione più complicata della prima. Per questo *Laplace* e i suoi contemporanei tennero in gran favore le forze a distanza. Le naturali e geniali conce-

zioni di Faraday e la loro formulazione matematica di Maxwell hanno rimesso in voga le azioni a contatto. Diverse difficoltà avevano già indosso gli astronomi a dubitare del rigore delle leggi di Newton, e si tentò di introdurvi piccole modificazioni quantitative; ma dopo che fu provato che le azioni elettriche impiegavano un certo tempo a propagarsi, si presentò naturalmente di nuovo la questione di cercare una proprietà analoga nelle azioni simili alla gravità. Infatti la gravità ha la maggiore analogia con le azioni elettriche a distanza; ma almeno in tutti i fenomeni conosciuti fin qui, essa ha con sè solo un'attrazione e non una repulsione. Föppl (*Ueber eine Erweiterung des Gravitationsgesetzes*, Sitzungsber. d. Münch. Akad., 1897, p. 6 e seg.) è di opinione, che si può, senza trovarsi in contraddizione coi fatti, ammettere l'esistenza di masse negative che si attraggono egualmente fra loro, ma che respingono le masse positive e sono respinte da queste; e così si può giungere a concepire campi di gravitazione *finiti* analoghi ai campi elettrici. Drude (nella sua relazione sulle azioni a distanza fatta al congresso delle scienze naturali in Germania nel 1897) conta, risalendo fino a Laplace, un gran numero di ricerche che hanno per oggetto di trovare la velecità di propagazione della gravitazione. Il loro risultato può considerarsi come negativo, poichè le velocità di propagazioni possibili non concordano fra loro e sono tutte grandissimi multipli della velocità della luce. Solo Paolo Gerber (*Ueber die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation*. Zeistchr. f. Math. u. Phys., 1898, II) trova, dal movimento del perielio di Giove, il quale è di 41 secondi per secolo, che la velocità della gravitazione è uguale a quella della luce; questa esperienza è favorevole all'ipotesi, la quale fa dell'etere l'agente della gravitazione. Confrontare anche una Memoria di Wien sulla possibilità di una base elettromagratica della meccanica (Archives néerlandaises. La Haye, 1900, pag. 96).

4. La reazione delle nuove scoperte fisiche sulla meccanica non potè tardare a farsi sentire. Le accelerazioni che, mediante le nuove concezioni, *può* prendere lo stesso corpo secondo le

posizioni che esso occupa sullo spazio, presentavano immediatamente allo spirito l'idea di un corpo di peso *variabile* nel quale si riconoscerebbe ancora tuttavia *una* caratteristica invariabile. Così i concetti di *peso* e di *massa* furono nettamente separati per la prima volta. Dopo aver riconosciuto la variabilità dell'accelerazione, Newton constatò, mediante acconce esperienze, che l'accelerazione della gravità era indipendente dalla costituzione chimica dei corpi; ne risultarono nuovi punti indicativi per l'elucidazione della relazione fra la massa e il peso; ne parleremo fra breve partitamente. Finalmente i lavori di Newton fecero comprendere molto meglio che non si fosse potuto fare prima, la possibilità di *applicare universalmente la nozione di forza*, come l'aveva posta Galileo. Non si può più credere, d'ora innanzi, che questo concetto fosse unicamente applicabile alla caduta dei corpi e ai fenomeni vicini. La generalizzazione venne per così dire da sè stessa senza richiamare un'attenzione particolare.

5. Siamo giunti alla discussione delle ricerche di Newton nelle loro relazioni con *i principii della meccanica*. In questa discussione innanzi tutto tenteremo di presentare esattamente al lettore le idee di Newton, limitandoci nella nostra esposizione a qualche osservazione preparatoria, riservandoci la nostra critica per i paragrafi successivi.

Dalla semplice lettura del suo Trattato (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londini, 1687) si vede subito che i suoi principali progressi su Galileo ed Huygens sono i seguenti:

1) La generalizzazione del concetto di forza.

2) L'introduzione del concetto di massa.

3) L'enunciato esatto e generale del principio del parallelogramma delle forze.

4) L'introduzione del principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione.

6. Sul primo punto non rimane che ben poco da aggiungere a ciò che si è già detto. Newton concepiva tutte le circostanze

determinanti del moto, non solamente la gravità, ma anche l'attrazione dei pianeti, il magnetismo, ecc. *come determinanti di accelerazione.* Egli fa espressamente osservare che con le parole attrazione, ecc., non esprime alcuna opinione sull'origine od il carattere di questa azione reciproca, ma vuole semplicemente designare l'apparenza sensibile dei fenomeni del movimento. Newton assicura, e vi insiste più volte, che egli non si occupa di speculazioni sulle cause ignote dei fenomeni, ma unicamente della ricerca e della constatazione dei fatti; questo indirizzo di pensiero, che egli significa sì chiaramente nelle parole: “ *hypotheses non fingo*, „ lo mostra come un filosofo *di gran valore*, che nella completa padronanza di se stesso si propose di conoscere la natura (1).

---

(1) Le regole che Newton s'impose nelle ricerche dei fenomeni naturali ne sono un'eccellente prova:

Regole che bisogna seguire nella ricerca della fisica.

Regola I. — Non bisogna ammettere che quelle cause che sono necessarie per spiegare i fenomeni.

Regola II. — Gli effetti della stessa specie debbono essere sempre attribuiti così, per quanto è possibile, alla stessa causa. (Come la respirazione dell'uomo e quella delle bestie; la caduta di una pietra in Europa ed in America; la luce del fuoco qui in Terra e quella del Sole; la riflessione della luce sulla Terra e nei pianeti).

Regola III. — Le qualità dei corpi, che non sono suscettibili nè di aumento, nè di diminuzione, e che appartengono a tutti i corpi su cui si possono fare esperimenti, debbono considerarsi come appartenenti a tutti i corpi in generale. (Newton fa seguire questa regola da un elenco delle proprietà generali, che è stato introdotto in tutti i libri di testo).

Infine, poichè è constatato dalle esperienze e dalle osservazioni astronomiche, che tutti i corpi che sono vicini alla superficie della terra, gravano su essa secondo la quantità della materia, che la Luna gravita sulla Terra in ragione della sua quantità di materia, che il nostro mare a sua volta gravita sulla Luna, che tutti i pianeti gravitano reciprocamente gli uni sugli altri, e che le comete pure gravitano sul Sole. Si può concludere, secondo questa terza regola, che tutti i corpi gravitano reciprocamente gli uni verso gli altri.

Regola IV. — Nella filosofia sperimentale le proposizioni, tratte mediante l'induzione dei fenomeni, si devono considerare, ad onta delle ipotesi contrarie, come esattamente ed approssimatamente vere, sino a che qualche altro fenomeno le confermi interamente o faccia

7. Rispetto al concetto di *massa* osserviamo, che la definizione che ne dà Newton, e secondo la quale la massa è la *quantità di materia* di un corpo, determinata dal prodotto del volume e della densità, è infelice. Il circolo vizioso è evidente poichè non si può definire la densità che come massa dell'unità di volume. Newton intese distintamente che a ciascun corpo era inerente una caratteristica determinata di moto, differente per il suo peso, che chiameremo con lui massa; ma egli non è riuscito ad esprimere esattamente questa conoscenza. Ritorneremo su questo punto, ma per ora ci limiteremo alle seguenti osservazioni preliminari.

8. Numerosissime esperienze, di cui molte erano conosciute da Newton, indicano chiaramente l'esistenza di una *caratteristica determinante il moto* distinta dal peso. Se si sospende (fig. 126) un volante con un filo, e lo s'innalza mediante una puleggia, si ha la sensazione del peso del volante. Se questo è posto sopra un'asse perfettamente cilindrico e levigato e così bene equilibrato quanto è possibile, il suo peso non gli farà prendere alcuna posizione determinata. Tuttavia proveremo una forte resistenza, quando tenteremo o di metterlo in moto se esso è immobile, o di arrestarlo, se esso è in moto. Fu questa esperienza, che condusse ad ammettere una proprietà particolare della materia, chiamata inerzia, o meglio forza d'inerzia, ciò che è inutile come lo si è visto e come lo spiegheremo ancora in seguito. Due carichi eguali innalzati simultaneamente resistono coi loro pesi, ma se essi si attaccano alle estremità di una ca-

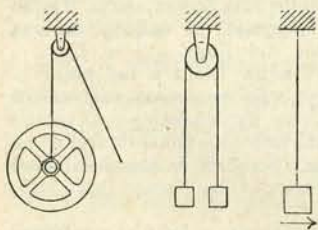



Fig. 126.

---

vedere che esse sono suscettibili di eccezioni. Poichè un'ipotesi non può indebolire i ragionamenti fondati sull'induzione ricavata dall'esperienza.

(Tutte le citazioni di Newton fatte in quest'opera sono state prese dai suoi *Principia*, ecc.

tena, passante sopra una puleggia, allora essi resistono mediante la loro *massa* al movimento, o piuttosto al cambiamento di velocità della puleggia. Un peso considerevole, sospeso all'estremità di un filo lunghissimo, da formare un pendolo, può essere trattenuto mediante un piccolissimo sforzo in una posizione vicinissima alla verticale: la componente del peso, che spinge il pendolo verso la sua posizione d'equilibrio, è assai piccola. Non pertanto proveremo una resistenza notevole, se tentiamo dimettere rapidamente il pendolo in moto o di trattenerlo. Poniamo che un peso sia sostenuto da un pallone; allora non si deve più tener conto di esso e tuttavia esso oppone una resistenza sensibile ad ogni moto. Inoltre aggiungiamo che uno stesso corpo osservato sotto latitudini differenti e in differenti luoghi, presenta cambiamenti notevoli nell'accelerazione dovuta alla gravità. Così si riconosce che la massa è una caratteristica del moto diversa dal peso.

È ancora necessario di far vedere, che essendo dato l'indirizzo delle idee particolari di Newton, la sua concezione della *massa* fu *psicologicamente* vicinissima a quella di *quantità di materia*. Non si poteva d'altronde aspettarsi che un investigatore in quest'epoca si fosse preoccupato degli studî critici sulla origine del concetto di materia. Quest'ultimo concetto si è svolto in un modo tutto istintivo; si trovò per così dire interamente eseguito e fu accettato affatto naturalmente. Lo stesso fenomeno si verificò rispetto al concetto di forza. Ma la forza sembra inerente alla materia; e Newton, precisamente assegnando a tutte le molecole materiali forze di gravitazione analoghe, e considerando le attrazioni reciproche degli astri come le somme di queste attrazioni particolari, fece direttamente apparire queste forze come connesse alla quantità di materia. Rosenberger ha insistito su questa ultima circostanza (*Newton und seine physikalischen Principien*. Lipsia, 1895; in particolare pag. 192).

In un'altra opera (*Analyse der Empfindungen*) ho cercato di dimostrare come la costanza del *legame* fra le sensazioni distinte ci conduca all'ipotesi di una costanza *assoluta* che chia-

miamo *sostanza*. L'esempio di una di queste sostanze, che si presenta come più prossimo e più immediato, è quello di un corpo mobile, che è possibile di distinguere da tutto ciò che lo circonda. Se questo corpo può essere diviso in parti simili, di cui ciascuna presenta un'insieme di proprietà costanti, otterremo la rappresentazione d'una sostanza variabile *quantitativamente*, che chiameremo *materia*. D'altronde la parte che togliamo in un corpo, riapparirebbe in altro posto precisamente, perchè essa è stata tolta; l'insieme della quantità di materia sembra dunque *costante*. Ma un esempio più rigoroso ci fa vedere che vi sono in realtà tante quantità sostanziali distinte, quante sono le proprietà dei corpi; allora la *materia* non conserva altra funzione all'infuori di quella di rappresentare la connessione costante fra le proprietà particolari; la *massa* è semplicemente una di queste (cfr. *Principien der Wärmelehre*, 1896, pag. 425).

9. Newton dimostra che in certe circostanze la massa di un corpo può tuttavia essere misurata mediante il suo peso. Questo punto è importante. Si consideri un corpo posto sopra un sostegno, su cui esso esercita una pressione col suo peso. Si acquista facilmente l'idea che un altro corpo eguale al doppio, al triplo, alla metà o al terzo del primo esercita una pressione eguale al doppio, al triplo, alla metà od al terzo della pressione primitiva. Supponiamo che l'accelerazione, dovuta alla gravità, sia accresciuta, diminuita od annullata; allora dobbiamo aspettarci che la pressione si accrescerà, diminuirà o scomparirà. *Vediamo* che la pressione prodotta dal peso aumenta, decresce o si annulla con la " quantità di materia „ e con l'intensità dell'accelerazione dovuta alla gravità. Il modo più semplice col quale possiamo riconoscere la pressione p, consiste nel vedere come può essere quantitativamente rappresentata, mediante il prodotto della quantità della materia m e dell'accelerazione g, cioè da $p = mg$. Ora consideriamo due corpi che esercitano rispettivamente le pressioni p e p', siano m ed m' le loro " quantità di materia „ e g e g' le accelerazioni dovute

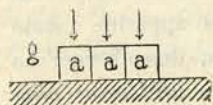



Fig. 127.

alla gravità: avremo $p = mg$ e $p' = m'g'$. Se ora noi possiamo dimostrare che qualunque sia la costituzione chimica dei corpi, si ha in ciascun punto della superficie terrestre $g = g'$, si avrà: $\frac{m}{m'} = \frac{p}{p'}$; da cui risulta che in ciascun punto della superficie terrestre la *massa* può essere misurata dal peso.

Mediante pendoli della stessa lunghezza, formati di sostanze *differenti,* la cui accelerazione si era provato essere la stessa, Newton dimostrò che l'accelerazione g è indipendente dalla costituzione chimica dei corpi. Egli ebbe cura di evitare le perturbazioni prodotte dalla resistenza dell'aria, impiegando pendoli formati di sfere di gran diametro esattamente eguali e più o meno incavate, affinchè i loro pesi fossero eguali. Questi esperimenti dimostrarono che l'accelerazione g è la stessa per tutti i corpi, e che perciò si può, secondo il risultato di Newton, misurare le quantità di materia o masse coi pesi.

Supponiamo una serie di corpi ed una calamita, separati da uno schermaglio. Se la calamita è molto forte, questi corpi, od almeno il maggior numero di essi, premeranno sullo schermaglio. Ma nessuno penserà a servirsi di queste pressioni magnetiche per misurare le masse, come si è fatto per le pressioni dovute ai pesi. La disuguaglianza troppo evidente delle accelerazioni, impresse dalla calamita ai diversi corpi, non fa venire in mente questa idea. Il lettore osserverà del resto, che tutta questa deduzione, presenta il fianco alla critica, poichè essa suppone la definizione del concetto di massa, che sino ad oggi è stato solo *designato,* e di cui si è semplicemente inteso la *necessità.*

10. Dobbiamo a Newton l'enunciato chiaro del principio della composizione delle forze (1). Un corpo sottoposto ad un tempo a due forze, che separatamente gli farebbero descrivere nello stesso tempo all'uno il cammino AB (fig. 128), all'altro il cam-

---

(1) A proposito del teorema della composizione delle forze si deve citare egualmente Roberval (1668) e Lami (1687); abbiamo già citato Varignon.

mino AC, si muove secondo AD, poichè le due forze, ed i movimenti che esse producono, sono *fra loro indipendenti*. Questo modo di vedere è perfettamente naturale e ad un tempo indica chiaramente il punto essenziale. Esso non contiene nessuno dei caratteri artificiali e forzati, che furono ulteriormente introdotti nella teoria della composizione delle forze.

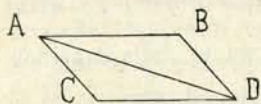



Fig. 128.

Si può enunciare il teorema in un modo un po' diverso per accostarlo alla forma che gli si dà oggi. Le accelerazioni, che diverse forze imprimono ad uno stesso corpo, sono le misure di queste forze; ma i cammini descritti in tempi eguali sono proporzionati alle accelerazioni, e possono quindi essere presi essi stessi per misure delle forze. Si può dire, che se due forze di direzioni AB ed AC e d'intensità proporzionali alle lunghezze di questi segmenti sono applicate al corpo A, questo corpo prende un moto che potrebbe anche essere egualmente prodotto da una terza forza, unica, rappresentata in intensità e direzione dalla diagonale del parallelogramma costrutto coi segmenti AB ed AC. Questa ultima forza può quindi sostituire le due prime. Siano φ e ψ le accelerazioni secondo AB ed AC; si ha per un tempo t di percorso $AB = \frac{1}{2} \varphi t^2$ e $AC = \frac{1}{2} \psi t^2$. Supponiamo che AD sia percorso nello stesso tempo da una forza, che produrrebbe l'accelerazione χ; ne viene $AD = \frac{1}{2} \chi t^2$ e:

$$AB : AC : AD = \varphi : \psi : \chi.$$

Così dunque la nozione di forza, come l'ha stabilita Galileo, conduce facilmente al principio del parallelogrammo, giacchè si ammette l'indipendenza delle forze; ma senza quest'ipotesi si cercherebbe invano di stabilire questo teorema con un metodo puramente deduttivo.

11. La più importante contribuzione di Newton ai principii della meccanica è forse l'enunciato chiaro e generale del principio *dell'eguaglianza dell'azione e della reazione.* I problemi sui moti dei corpi, che agiscono gli uni sugli altri, non possono essere risolti senza altro aiuto oltre quello dei principii di Galileo; ma per determinare le azioni mutue è necessario un nuovo principio. Come ad esempio quello, di cui si servì Huygens nella ricerca del centro di oscillazione, così anche il principio dell'azione eguale alla reazione, enunciato da Newton.

Secondo Newton un corpo che esercita sopra un altro una pressione od un'attrazione, riceve da questo una pressione o un'attrazione eguale ed opposta. L'azione e la reazione, la pressione e la repulsione sono sempre eguali fra loro. D'altra parte, poichè Newton definì come misura della forza la quantità di moto (prodotto della massa per la velocità) acquistata nell'unità di tempo, ne consegue che due corpi, che agiscono l'uno sull'altro, conseguono nello stesso tempo quantità di moto eguali e contrarie, e quindi si comunicano velocità inversamente proporzionali alle loro masse.

Quantunque il principio di Newton sembri, secondo questa esposizione, molto più semplice, più immediato ed a prima vista più accettabile di quello di Huygens, tuttavia si riconobbe che esso non contiene in alcun modo meno esperienze inanalizzate e meno elementi istintivi. L'impulso primo che condusse a stabilire questo principio è senza alcun dubbio di natura puramente istintiva. Si sa che non si prova una resistenza da parte di un corpo, che nel momento in cui si tenta di metterlo in moto. Vogliamo lanciare più velocemente una pietra, più forte sarà l'impulso che il nostro corpo subirà in senso contrario. La pressione e la repulsione vanno accoppiate. L'ipotesi dell'eguaglianza dell'azione e della reazione è perciò immediata, se come ha fatto Newton s'immagina un filo teso, od una molla tesa o compressa, che congiunge i due corpi.

Nella statica si trovano numerose conoscenze istintive, che contengono il principio in parola, per esempio questa volgare

esperienza, secondo la quale non possiamo innalzare nell'aria noi stessi, tirando su la nostra sedia. In uno scolio, in cui egli cita i fisici Wren, Huygens e Wallis, come suoi predecessori, che hanno applicato questo principio, Newton espone considerazioni analoghe. Immagina la Terra, di cui ciascuna molecola gravita verso tutte le altre, tagliata con un piano qualunque. Se la pressione di una delle due parti sull'altra non fosse eguale alla contro-pressione la Terra dovrebbe muoversi nel senso della maggiore di queste due azioni; ora la nostra esperienza insegna, che il moto di un corpo non può essere determinato che da corpi esterni. Inoltre, siccome noi possiamo far passare questo piano di divisione per qualunque punto e dargli una direzione qualunque, la direzione di questo moto sarebbe interamente indeterminata.

12. L'oscurità della nozione di massa si fa di nuovo sentire, quando si vuol far uso in Dinamica del principio dell'azione eguale alla reazione. L'azione e la reazione possono essere eguali; ma donde conosciamo che azioni eguali producono velocità che sono in ragione inversa delle masse? Newton sentì pure il bisogno reale di confermare questo principio fondamentale con l'esperienza. In uno scolio egli parla dell'esperimento di Wren sull'urto e di esperienze analoghe, che egli stesso ha eseguite. Egli mise in una prima boccetta una calamita e in una seconda un pezzo di ferro; e dopo averle chiuse le fece galleggiare in un vaso pieno d'acqua, e le lasciò agire l'una sull'altra. Le boccette si avvicinarono, si urtarono, restarono unite; e finalmente si stabilì l'equilibrio. Questa esperienza prova l'eguaglianza dell'azione e della reazione, come pure l'eguaglianza delle quantità di moto acquistate in direzioni contrarie, come lo vedremo nella discussione delle leggi dell'urto.

13. Il lettore ha già compreso che le diverse esposizioni, fatte da Newton, del principio dell'azione eguale alla reazione e del concetto di massa *dipendono* l'una dall'altra, e si appoggiano a vicenda. Le esperienze che formano la base di queste nozioni sono: il riconoscimento del fatto, che i corpi resistono ad ogni

cambiamento di velocità, proporzionalmente ai loro pesi, senza che pertanto questo peso abbia parte nel fenomeno, e l'osservazione del fatto, che una stessa pressione imprime ai corpi di pesi vie più grandi, velocità sempre vie più piccole. Newton ha avuto un *senso* meraviglioso dei concetti e delle proposizioni fondamentali indispensabili per la meccanica. La forma della sua esposizione lascia, tuttavia, parecchio a desiderare; ritorneremo in seguito su questo punto, ma ciò non ci autorizza a menomare le sue scoperte, poichè ebbe a superare grandi difficoltà, e le evitò meno di tutti gli altri investigatori.

14. Le produzioni di Newton non si limitano al dominio particolare, di cui è oggetto questa nostra esposizione. Già i principii della filosofia naturale sorpassano la trattazione propria della meccanica. Qui viene studiato il moto in mezzi, che oppongono resistenza, il moto dei fluidi sotto l'azione dell'attrito, e la velocità di propagazione del suono viene pure per la prima volta qui trattata. Le opere ottiche di Newton contengono una serie di importanti scoperte. Qui egli dimostra la scomposizione prismatica della luce, la composizione della luce bianca da elementi disuguali, rifrangibili e di diversi colori, ai quali unisce la periodicità della luce e la determinazione della lunghezza dei periodi dipendenti dai colori e della rifrangibilità. Newton ha concepito in primo luogo l'importanza della polarizzazione. Altri studî lo condussero a stabilire le leggi della rifrazione e del principio pirometrico e termometrico su cui si fonda. Nelle sue dissertazioni sull'ottica Newton ha mostrato la via delle sue scoperte con tutta franchezza. Da quanto pare le polemiche poco gradite, in cui furono travolte queste prime pubblicazioni, ebbero una certa influenza sulla esposizione dei *Principia*. Qui egli dà in forma sintetica la prova dei fondamentali teoremi, senza farne conoscere i metodi che a ciò l'avevano condotto. La contesa accentuata fra Newton e Leibniz, relativamente ai loro seguaci, sulla priorità del calcolo infinitesimale, veniva effettivamente composta in seguito alla ritardata pubblicazione di Newton sul metodo delle flussioni. Oggi si vede chiaramente

che ambedue questi investigatori avevano ricevuto il loro impulso dai predecessori, senza che nessuno dovesse toglier nulla in prestito dall'altro; si vede chiaramente che le idee d'invenzione erano sufficientemente preparate per poter progredire in modi diversi.

IV. *Discussione e spiegazione del principio di eguaglianza dell'azione e della reazione.*

1. Ora cercheremo di penetrare più addentro nel pensiero di Newton per poter avere un'intelligenza ed un sentimento più chiari del principio dell'azione eguale alla reazione. Secondo Newton due masse M ed m, che agiscono l'una sull'altra, si comunicano velocità *opposte* V e v, che sono nel rapporto inverso delle masse, quindi si ha:

$$M \cdot V + m \cdot v = o .$$

Le considerazioni seguenti dànno a questo principio un carattere di grande evidenza. Anzitutto prendiamo due corpi a perfettamente *identici*, anche rispetto alla loro costituzione chi-

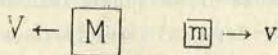



Fig. 129. *Fig. 130.*

mica. Poichè si esclude l'influenza di ogni terzo corpo e quella dell'operatore, si vede che la sola azione reciproca, determinata *in un modo unico,* è la comunicazione di velocità *eguali,* opposte, dirette secondo la retta, che congiunge i due corpi.

Riuniamo in A e B (fig. 131) rispettivamente m ed m' corpi a; si formano così due corpi, le cui quantità di materia o masse stanno fra loro come $m : m'$; e supponiamo che la loro distanza sia molto grande per poter trascurare le loro dimensioni. Indichiamo con a l'accelerazione che i due corpi a, indipendente-

mente l'uno dall'altro, si comunicano. Ciascuna parte di A riceverà dunque l'accelerazione $m'a$ di B, e ciascuna parte di B

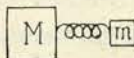



Fig. 131. *Fig. 132.*

riceverà l'accelerazione $m a$ di A. Si vede che queste accelerazioni sono in ragione inversa delle loro masse.

2. Consideriamo due masse M ed m (formate entrambe di corpi a identici), collegati fra loro mediante una molla (fig. 132). Supponiamo che una causa *esterna* imprima alla massa m l'accelerazione φ; il legame elastico subisce subito una deformazione, che rallenta m ed accelera M; e non appena le due masse si muovono con la stessa accelerazione, la deformazione della molla non cresce più. Indichiamo con a l'accelerazione di M, con β la diminuzione della accelerazione di m, si ha: $a = \varphi - \beta$; ora risulta da ciò che precede che $a\text{M} = \beta m$; dunque:

$$a + \beta = a + \frac{a\text{M}}{a} = \varphi;$$

d'onde:

$$a = \frac{m\,\varphi}{\text{M} + m}.$$

Esaminando il fenomeno in modo più particolareggiato, si riconoscerebbe che, oltre al loro moto comune di progressione, le due masse sono animate l'una rispetto all'altra da un moto oscillatorio; ma se il legame sviluppa una tensione considerevole per una lieve deformazione, l'ampiezza della oscillazione sarà piccolissima e si potrà trascurare questo moto accessorio, come abbiamo fatto subito.

L'espressione $a = \dfrac{m\,\varphi}{\text{M} + m}$, che rappresenta l'accelerazione dell'intiero sistema, fa vedere che il prodotto $m\varphi$ è il fattore

più importante di questa determinazione. Newton diede a questo prodotto della massa per l'accelerazione che essa ha il nome di « forza motrice ». D'altra parte $M + m$ rappresenta l'intiera massa del sistema solido. La questione $\frac{p}{m'}$ rappresenta perciò l'accelerazione di una massa m', cui è applicata la forza di moto p.

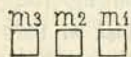
3. Questo risultato non richiede affatto che le due masse collegate fra loro agiscano direttamente l'una sull'altra in tutte le loro parti. Si considerino tre masse m_1, m_2, m_3 tali che m_1 e m_3 non agiscano che su m_2, senza agire l'una sull'altra. Una causa esterna dà alla massa m_1 l'accelerazione φ. Per l'accelerazione prodotta: le masse m_3, m_2, m_1 ricevono le accelerazioni $+\delta, +\beta, +\varphi, \alpha, -\gamma$

m3 m2 m1

Fig. 133.

i segni + e — indicano le direzioni verso destra e verso sinistra. È evidente che il processo di deformazione cessa quando è:

$$\delta = \beta - \gamma = \varphi - \alpha,$$

in cui è:

$$\delta m_3 = \gamma m_2 \quad \text{e} \quad \alpha m_1 = \beta m_2.$$

La risoluzione di queste equazioni dà l'accelerazione comune:

$$\delta = \frac{m_1 \varphi}{m_1 + m_2 + m_3},$$

risultato della stessa forma del precedente. Se per esempio una calamita agisce sopra un pezzo di ferro collegato ad un pezzo di legno, è inutile di ricercare quali siano le particelle di legno deformate sotto l'azione del moto del ferro, sia direttamente, sia indirettamente (per l'intermediario di altre particelle di legno). Queste considerazioni dimostrano bene quale enorme importanza posseggono nel campo della Meccanica le concezioni di Newton. Esse faciliteranno più tardi il mettere in evidenza i punti deboli dei loro enunciati.

4. Studiamo ora alcuni esempî fisici della eguaglianza dell'azione e della reazione. Abbiasi un peso L (fig. 134) che giace sopra una tavola T. La tavola riceve dal peso una pressione *esattamente* eguale a quella che, reciprocamente, essa esercita su questo; così essa impedisce al peso di cadere. Sia p il peso, m la sua massa e g l'accelerazione della gravità; secondo Newton si ha: $p = mg$. Lasciamo cadere la tavola liberamente; la pressione che si esercitava su essa viene a cessare. Dunque si riconosce che la pressione del peso sulla tavola è determinata dalla sua accelerazione relativa rispetto a questa. Se la tavola si muove verso il basso con l'accelerazione γ, la pressione che essa subisce diviene $m(g - \gamma)$; se questo moto ha luogo verso l'alto la pressione è: $m(g + \gamma)$. Bisogna ancora osservare che un moto di ascensione o di discesa di *velocità costante* non influisce affatto sulla pressione. L'accelerazione relativa è la circostanza determinante.

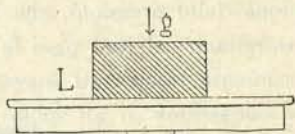



Fig. 134.

Galileo conosceva perfettamente queste relazioni. Non solo egli fece crollare coll'esperienza l'opinione degli aristotelici, che ammettevano che i corpi più pesanti cadono più presto, ma egli mise alle strette anche i suoi contradditori con argomentazioni logiche. Gli aristotelici asserivano che i corpi più grandi cadono più presto, perchè le parti superiori premono sulle parti inferiori ed accelerano così la caduta. Galileo opponeva a ciò che se un corpo più piccolo possiede in se stesso la proprietà di una discesa meno rapida, questo corpo più piccolo, collegato ad un corpo assai più grande, dovrà ritardarne la caduta, e che il corpo più grande cade quindi meno presto del piccolo. L'intiera ipotesi fondamentale è falsa, diceva Galileo, poichè una *parte* qualunque di un corpo *che sta cadendo* non può produrre, col suo peso, assolutamente alcuna pressione sopra un'*altra* parte.

Se si prende un pendolo, di cui la durata di oscillazione è $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, e la si anima di una accelerazione γ verso il basso,

questa durata diviene $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g-\gamma}}$. Se il pendolo cade liberamente, questa durata diviene infinita; il pendolo cessa di oscillare.

Quando saltiamo o cadiamo da una certa altezza, proviamo una sensazione particolare, che deve aver origine dalla cessazione delle pressioni, che le particelle del corpo (il sangue, ecc.) esercitano col loro peso le une sulle altre. Se noi fossimo bruscamente trasportati sopra un pianeta più piccolo, proveremmo la sensazione di un suolo che ci manchi sotto i piedi. Trasportati sopra un pianeta più grande, proveremmo una sensazione di ascensione perpetua come quella che si prova nei terremoti.

5. Un apparecchio costruito da Poggendorff (fig. 135 *c*) fa vedere chiarissimamente queste diverse relazioni. Esso consta di

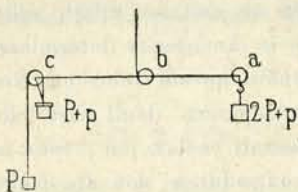
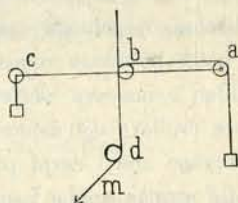



Fig. 135 a. *Fig. 135 b.*

un filo teso da due pesi P, che passano per una puleggia fissa ad una delle estremità del giogo della bilancia. Si aggiunge da una parte un peso p, attaccato all'asse della puleggia con un filo sottile; questo ora sostiene un peso $2P + p$. Se si brucia il filo, che sostiene il peso p, incomincia un moto uniformemente accelerato, che fa discendere il peso $P + p$ e salire il peso P con l'accelerazione γ. Questo movimento diminuisce la pressione sulla puleggia e questa diminuzione è indicata dalla bilancia. La discesa di uno dei pesi P è compensata dall'ascesa dell'altro, mentre il peso aggiunto, invece di pesare p, non pesa

più di $p \cdot \frac{g-\gamma}{g}$. Ora:

$$\gamma = \frac{p}{2P + p} \cdot g;$$

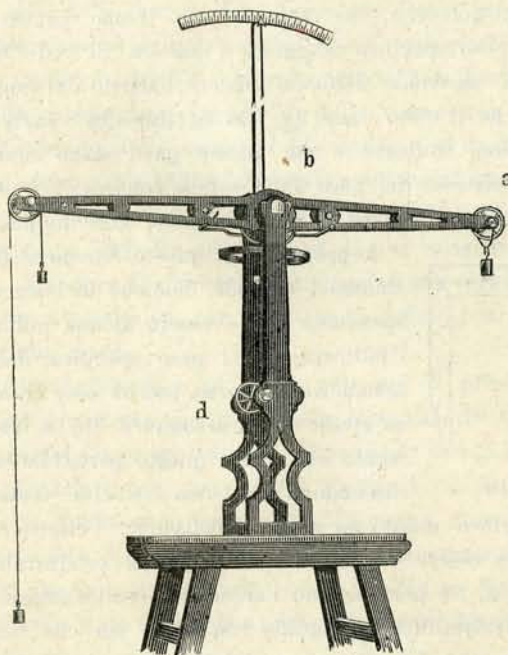



Fig. 135 c.

dunque in luogo di p il carico aggiunto della puleggia è:
$p \cdot \frac{2P}{2P+p}$. Il peso p, non essendo impedito che parzialmente nella sua caduta, non pesa che in parte sulla puleggia.

Si può cambiare l'esperimento. Sulle pulegge *a*, *b*, *d* (fig. 135 *b*) si fa passare un filo teso dal peso P e di cui si fissa l'estremità in *m*; poi si equilibra l'apparecchio. Una trazione qualunque esercitata in *m* sul filo non può avere azione *diretta* sulla bilancia, poichè la direzione del filo passa esattamente per l'asse di sospensione. Questa trazione fa tuttavia inclinare subito il

braccio *a* del giogo. Invece se si allenta il filo *a* sale. Un moto *non accelerato* del peso non distruggerebbe l'equilibrio; ma è impossibile di passare dal riposo al moto senza accelerazione.

6. Un fenomeno assai sorprendente a prima vista è quello di corpi piccolissimi, che restano lungo tempo sospesi in un liquido di peso specifico maggiore o minore. Si vede facilmente che queste particelle debbono vincere l'attrito del liquido. Supponiamo che il cubo della fig. 136 sia diviso in 8 parti mediante le tre sezioni indicate, e che queste parti siano immerse. La massa e l'eccesso del peso sulla spinta rimarranno le stesse, ma la superficie, cui l'attrito è proporzionale, sarà doppia.

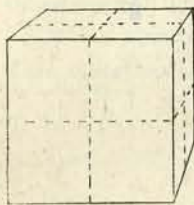



Fig. 136.

A proposito di questo fenomeno fu talvolta emessa l'opinione, cioè che le molecole in sospensione non avessero alcuna influenza sull'indicazione del peso specifico, dato da un areometro immerso, poichè esse erano già per se stesse degli areometri. Ma si vede facilmente che, come queste particelle salgono o discendono con una velocità costante, ciò che si verifica subito se sono piccolissime, l'effetto sull'areometro deve essere identico a quello che si produrrebbe sopra una bilancia. Se per esempio l'areometro oscilla attorno alla sua posizione d'equilibrio, il liquido con tutto ciò che contiene si muove con esso. L'applicazione del principio degli spostamenti virtuali pone fuori di dubbio il fatto, che l'apparecchio dà il peso specifico medio. L'opinione contraria, secondo la quale esso indicherebbe solo il peso specifico del liquido e non nello stesso tempo quello delle particelle in sospensione, è insostenibile, come lo provano le considerazioni seguenti. Supponiamo che nel liquido A una piccola quantità di un liquido B più denso sia ripartito in goccioline piccolissime, ed ammettiamo che l'areometro indichi solo il peso specifico del liquido A. Aumentiamo la quantità del liquido B sino a che ve ne sia una quantità uguale a quella di A: è ora impossibile dire quale dei due liquidi sia

in sospensione nell'altro; e quindi qual peso specifico deve indicare l'areometro.

7. Un fenomeno maestoso, in cui l'accelerazione relativa dei corpi in presenza è la determinante delle loro pressioni reciproche, è quello delle maree. Ne studieremo tanto, quanto potrà servirci per chiarire la quistione di cui ci occupiamo. La relazione fra questo fenomeno e il movimento della Luna è dimostrata dalla coincidenza dei periodi delle maree con quelli lunari, dall'aumento delle maree al plenilunio e al novilunio, dal loro ritardo giornaliero (circa 50′) corrispondente al ritardo diurno del punto di culminazione della Luna, ecc. Infatti si è pensato da molto tempo addietro all'esistenza di una relazione fra i due fenomeni. All'epoca di Newton si supponeva una specie di onda di pressione atmosferica, per cui il moto della Luna provocava il flusso della marea.

Questo fenomeno fece su chi lo vide per la prima volta in tutta la sua grandezza una impressione straordinaria. Quindi non bisogna meravigliarsi se tutti gl'investigatori di ogni tempo, se ne siano occupati con passione. I guerrieri di Alessandro il Grande, che conoscevano solo il Mediterraneo, appena ne avevano una pallida idea; e furono perciò profondamente impressionati dal flusso e riflusso alle bocche dell'Indo. Ecco ciò che riferisce Curzio Rufo (*De Rebus gestis Alexandri Magni*, lib. IX, cap. 34-37):

« . . . . . . Tum aliam insulam medio amni sitam evecti paulo lenius, quia cursus aestu verberabatur, applicant classem, et ad commeatus petendos discurrunt, securi casus eius qui supervenit ignaris. Tertia ferme hora erat, cum flata vice Oceanus exaestuans invehi coepit et retro flumen urgere. Quod primo coercitum, deinde vehementius pulsum, maiore impetu adversum agebatur, quam torrentia praecipiti alveo incurrunt. Ignota vulgo freti natura erat, monstraque et irae Deum indicia cernere videbantur. . . . . Iamque levatis navigiis et tota classe dispersa, qui expositi erant, undique ad naves trepidi et improviso malo attoniti recurrunt. Sed in tumultu festinatio quoque tarda est. Hi contis

navigiis appellabant, hi dum remos aptari prohibebant, considerant. Quidam enavigare properantes, sed non expectatis qui simul esse debebant, clauda et inhabilia navigia languide moliebantur. Aliae navium inconsulte ruentes non receperant pariterque et multitudo et paucitas festinantes morabantur. Clamor hinc expectare, hinc ire iubentium, dissonaeque voces numquam idem ac unum tendentium, non oculorum modo usum, sed etiam aurium abstulerant. Ne in gubernatoribus quidem quicquam opis erat, quorum nec exaudiri vox a tumultuantibus poterat nec imperium a territis, incompositisque servari. Ergo collidi inter se naves, abstergereque invicem remi, et alii aliorum navigia urgere coeperunt. Crederes non unius exercitus classem veti, sed duorum navale inisse certamen. Incutiebantur puppibus prorae, premebantur a sequentibus, qui antecedentes turbaverant. Iurgantium ira perveniebat etiam ad manus. Iamque aestus totos circa flumen campos inundaverant, tumulis dumtaxat eminentibus velut insulis parvis, in quos plerique trepidi, omissis navigiis, enare coeperunt. Dispersa classis partim in praealta aqua stabat, qua subsederant valles, partim in vade haerebat, utcumque in aequale terrae fastigium occupaverant undae, cum subito novus et pristino maior terror incutitur: reciprocare coepit mare magno tractu aquis in suum fretum recurrentibus, reddebatque terras paulo ante profundo salo mersas. Igitur destituta navigia alia praecipitantur in proras, alia in altera procumbunt strati erant campi sarcinis avulsarum tabularum remorumque fragmentis. Miles nec egredi in terram nec in naves substitere audebat, identidem praesentibus graviora quae sequerentur expectans. Vix quae perpetiebantur, videre ipsos posse credebant, in sicco naufragia, in amni mare, nec finis malorum; quippe aestum paulo post mare relaturum, quo navigia allevarentur, ignari, famem et ultima sibimet ominabantur. Belluae quoque fluctibus destitutae, terribiles vagabantur. Iamque nox appetebat et regem quoque desperatio salutis aegritudine affecerat; non tamen invictum animum curae abruunt quin tota nocte praesideret in speculis, equitesque praemitteret ad os amnis ut cum mare rursus exaestuare

sensissent, procederent. Navigia quoque lacerata refici et eversa fluctibus erigi iubet, paratosque esse et intentos cum rursus mare terras inundasset. Tota ea nocte inter vigilias, adhortationesque consumpta celeriter et equites ingenti cursu refugere et secutus est aestus. Qui primo aquis leni tractu subeuntibus, coepit lenare navigia; mox totis campis inundans, etiam impulit classem, plaususque militum, nauticorumque insperatam salutem immodico celebrantium gaudio, litoribus, ripisque resonat. Unde tantum redisset subito mare, quopridie refugisset, quaenam esset eiusdem elementi natura, modo discors, modo imperio temporum obnoxia mirabundi requirebant. Rex cum ex eo quod acciderat, coniectaret post solis ortum flatum tempus esse, ex media nocte, ut aestum occuparet, cum paucis navigiis secundo amne defluit evectusque os eius, 400 stadio processit in mare, tandem voti sui compos, praesidibus, et mare, et locorum Diis sacrificio facto, ad classem rediit „.

Ecco la traduzione:

“ 34. Siccome essi discesero con un po' più di fatica, mediante la marea che risaliva, approdarono ad un'altra isola posta in mezzo all'acqua, e corsero ad approvigionarsi, non dubitando di ciò che dovesse loro accadere.

35. Erano circa le tre (ore) quando l'oceano nella sua costante marea di flusso e riflusso, incominciò a ritornare, e ad arrestare il corso del fiume; ma dopo la respinse con tanto impeto, che rinculò sì rapidamente da scorrerne un torrente nella valle. I soldati non sapevano ciò che fosse il flusso e il riflusso del mare, quantunque vedendolo entrare tutto ad un tratto ad inondare le campagne, essi credettero che quello fosse un segno dell'ira degli Dei, che volevano punire la loro temerità. Quantunque la marea avesse sollevato le navi e disperso la flotta, quelli che erano discesi, sorpresi da un accidente sì inopinato, corsero per ritornare nelle loro navi. Ma più si affrettavano per andarvi, meno procedevano. Gli uni si sforzano di giungervi con uncini, gli altri, che cercavano di mettersi a posto, scompigliano i galeotti e il comito. I più frettolosi, non avendo atteso i loro

compagni, non possono governare i loro vascelli e le galere, in cui si gettano in massa. Sono così piene, che non vi si possono muovere, quantunque per troppa gente o per poca il disordine è eguale. Gli uni gridano che si aspetti, gli altri che si parta, ed altri ancora altre cose; e tanti gridi diversi stordiscono il marinaio, che non sa a chi ascoltare. I piloti stessi erano allora inutili, poichè il rumore impediva di udire i loro ordini e lo spavento di eseguirli. I vascelli incominciano ad urtarsi fra loro, i remi si spezzano, incomincia la confusione e non sembra che sia una sola armata navale, ma bensì due che combattono l'una contro l'altra. Le poppe urtano contro le prue; e il male che è stato fatto a quelle davanti, lo ricevono quelli di dietro; infine si grida, si contesta tanto, che dalle parole si viene ai fatti.

36. Il flusso aveva già ricoperto la campagna che era intorno al fiume, e non si scorgeva più che qualche altura, come isolette, ove parecchi si salvavano a nuoto, abbandonando le loro navi, di cui una parte navigava in piene acque, e l'altra era arenata, secondo l'accidentalità dei luoghi. Ma essi ebbero un'altra paura più grande della prima, quando videro il rimanente del mare che ritiravasi collo stesso impeto, col quale era venuto, lasciando rivedere la terra, che esso aveva sommerso poco prima; poichè i vascelli rimasti a secco cadevano gli uni sulla prua, gli altri sul fianco; e i campi erano seminati di bagagli, di remi spezzati, d'assi fracassati, come avanzi di un naufragio. I soldati non osavano discendere, nè stare sulle loro navi, diffidando sempre di qualche nuova avventura peggiore della prima; e non potevano credere a quello che vedevano, dei naufragi sulla terra e il mare in un fiume. Ed ancora non pensavano di essere al termine dei loro mali, poichè, non sapendo che la marea dovesse ben presto ritornare, la quale risolleverebbe le loro navi, essi aspettavano di morire di fame e di cadere in grandi calamità. D'altra parte essi vedevano cento mostri marini, che il mare aveva lasciato, che, strisciando intorno ad essi, li facevano fremere d'orrore.

37. Pertanto si faceva notte, ed il re non sapendo che cosa sperare più degli altri, era in grandi inquietudini; ma siccome nulla poteva abbattere questo coraggio, fu tutta la notte sulla coffa, ovvero sulla tolda a dare ordini, e fece montare alcune persone a cavallo per andare sino all'imboccatura del fiume, ed avvertire quando la marea ritornerebbe. Egli fece rattoppare anche i suoi vascelli, e raddrizzare quelli che erano stati rovesciati, comandando a ciascuno di tenersi pronto al ritorno della marea. Tutta quella notte si passò a fare la guardia e ad infondere coraggio all'armata, sino a che i cavalieri ritornarono a tutta briglia e la marea dopo essi; la quale dapprima salendo dolcemente non fece che sollevare le navi; poi subito dopo rimise in piena acqua questa flotta desolata, tutta risuonante di grida di gioia, che emettevano i soldati ed i marinai per un bene così insperato. Si domandavano pieni di stupore: “ Donde ritornava ad un tratto questo gran rigurgito d'acque, in qual parte esso si era ritirato il giorno precedente, e quale era la natura di un elemento in complesso così disordinato e così soggetto alle stesse vicende? Il re congetturò, per ciò che era avvenuto, che la marea ritornerebbe al sorger del Sole, sebbene egli la volesse prevenire; e essendosi messo in mare sulla mezzanotte, con alcuni vascelli arrivò alla foce del fiume e navigò 400 stadi sull'oceano, possedendo infine l'oggetto dei suoi voti e il colmo dei suoi desideri. Poi dopo aver sacrificato ai dei tutelari del mare e di queste regioni, ritornò a raggiungere la sua flotta „.

38. Per la spiegazione del fenomeno delle maree è essenziale osservare che la parte solida della Terra può prendere solo *una* accelerazione determinata verso la Luna, mentre le particelle mobili delle acque possono prendere accelerazioni differenti, secondo che esse si trovano dalla parte più lontana o più vicina dell'astro attirante.

Sia in E la Terra, e di rimpetto ad essa (fig. 137) la Luna M. Si considerino tre punti A, B, C della Terra. Supposti liberi, questi tre punti avrebbero verso la Luna le accelerazioni, che indichiamo con $\varphi + \Delta\varphi$, φ e $\varphi - \Delta\varphi$. L'insieme della Terra,

essendo solido, precederà per tanto l'accelerazione φ. Indichiamo con g l'accelerazione verso il centro della Terra, e componiamo

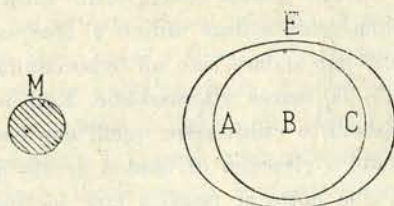



Fig. 137.

positivamente o negativamente le accelerazioni secondo che esse son dirette verso destra o verso sinistra:

i pesi liberi	A ,	B ,	C
hanno le accelerazioni	$-(\varphi + \Delta\varphi)$,	$-\varphi$,	$-(\varphi - \Delta\varphi)$
	$+g$		$-g$
L'accelerazione della Terra è:	$-\varphi,$	$-\varphi,$	$-\varphi$
Ne cconsegue per l'accelerazione verso la Terra	$(g - \Delta\varphi)$,	o ,	$(g - \Delta\varphi)$.

Questo quadro fa vedere che il peso dell'acqua prova in A e C una diminuzione apparente ed esattamente eguale. L'acqua si solleverà in A (fig. 137) ed in C; si avrà in ciascun punto un flusso due volte al giorno. Non si richiama sempre a sufficienza l'attenzione sul fatto che questo fenomeno sarebbe essenzialmente diverso se la Luna e la Terra non fossero in moto accelerato l'una rispetto all'altra, e fossero in riposo e fisse relativamente. Modificando le nostre considerazioni, possiamo applicarle a questo nuovo problema. Si ha in primo luogo per la Terra solida $\varphi = o$;

quindi i pesi liberi	A ,	C
ricevono le accelerazioni	$-(\varphi + \Delta\varphi),$	$-(\varphi - \Delta\varphi)$
	$+g$	$-g$
cioè	$(g - \Delta\varphi) - \varphi$	$-(g - \Delta\varphi) - \varphi$
o, ponendo $g' = g - \Delta\varphi$:	$g' - \varphi,$	$-(g' + \varphi)$.

Il peso dell'acqua sarebbe dunque (fig. 138) diminuito in A e aumentato in C, e quindi il livello delle acque innalzato in A

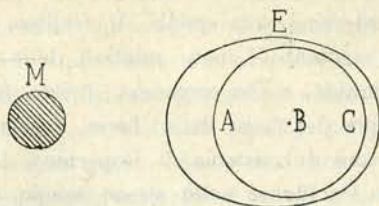
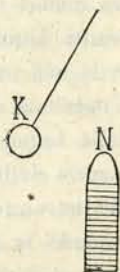



Fig. 138.

ed abbassato in C. Il flusso si verificherebbe solo dalla parte della Luna.

9. Non vale quasi la pena di illustrare con esperienze difficili delle proposizioni, cui si giunge in un modo migliore per via deduttiva. Questi esperimenti pertanto non sono impossibili. Abbiasi un pendolo conico, formato di una pallina di ferro K, il quale oscilla e gira intorno al polo magnetico (fig. 139) N. Si ricopra la sfera di una soluzione di solfato magnetico di ferro, se la calamita è molto forte, la gocciolina liquida presenterà il fenomeno delle maree. Fermiamo ora la sfera in una posizione qualunque: la goccetta non si solleva più ad un tempo dalla parte della calamita e dalla parte opposta, ma rimane sospesa unicamente dalla parte del polo della calamita.

Fig. 139.

10. Non bisogna naturalmente immaginarsi l'intiero flusso della marea prodotto subito dall'azione della Luna. Il fenomeno del flusso e del riflusso potrebbe paragonarsi piuttosto ad un moto oscillatorio *mantenuto* da quest'astro. Se per esempio si sventolasse uniformemente e continuamente un ventaglio sopra la superficie dell'acqua di un canale circolare, si produrrebbe così un impulso continuo, che subito darebbe origine ad un'onda molto grande, il cui moto seguirebbe quello del ventaglio. Il fenomeno delle maree è prodotto da una causa analoga; ma è

assai complicato dalla forma irregolare dei continenti, dalla variazione periodica delle perturbazioni, ecc.

11. Di tutte le teorie delle maree, che hanno preceduto quella di Newton, ricorderemo solo quella di Galileo, che spiega il flusso e riflusso mediante il moto relativo delle particelle terrestri solide e liquide, e che considera questo fenomeno come una prova evidente del moto della Terra, e come un capitale argomento in favore del sistema di Copernico. La Terra ruota da Oriente verso Occidente nello stesso tempo, che è animata da un movimento di traslazione (fig. 139 *b*). Da ciò consegue che in *a* ed in *b* le particelle terrestri prendono velocità rispettivamente eguali alla somma ed alla differenza di quelle che esse posseggono nei due movimenti. Le acque dei mari non possono seguire così presto queste variazioni di velocità, e si verifica un fenomeno analogo a quello che si constaterebbe in una secchia d'acqua oscillante o in un canale pieno d'acqua che scorra ora più velocemente ora meno: le acque si raccolgono alternativamente in dietro od avanti. Questa è in sostanza la spiegazione che Galileo svolge nella sua opera: *Dialogo sui due massimi sistemi del mondo.* L'opinione di Keplero, che attribuiva il fenomeno all'attrazione della Luna, gli pareva mistico e puerile; egli la mette nella categoria delle spiegazioni per simpatia ed antipatia; e pensa pure di distruggerla più facilmente di qualunque altra spiegazione, secondo la quale le maree sarebbero dovute ad una dilatazione dell'acqua sotto l'effetto della irradiazione solare. In questa teoria il flusso e il riflusso dovrebbe prodursi *una sola volta* al giorno. Galileo evidentemente l'osserva, ma erra su questa difficoltà pensando di spiegare i periodi giornalieri mensili ed annuali delle maree colle oscillazioni proprie dell'acqua ed i cambiamenti del moto. Il principio del moto relativo è qui un elemento perfettamente *esatto,* ma è così *infelicemente* applicato che può condurre solo ad una teoria intieramente errata. Le circostanze

Fig. 139 b.

considerate in questo fenomeno non potevano infatti aver seco le conseguenze che Galileo attribuiva ad esse. Immaginiamo per dimostrarlo una sfera omogenea di acqua; la rotazione di questa sfera non può produrre altro effetto che quello di un certo schiacciamento. Inoltre supponiamo che essa riceva un movimento regolare di traslazione: questo non potrà avere alcuna influenza sul riposo relativo delle molecole liquide; poichè secondo il nostro modo di vedere questo nuovo caso non è sostanzialmente diverso dal precedente, e si riconduce ad esso ponendo il movimento di traslazione della sfera sostituito con un moto contrario di tutti i corpi circostanti. La stessa conclusione sussiste ancora se si ammette il moto “ assoluto „; in tale ipotesi la traslazione regolare non potrebbe avere ancora alcuna azione sulle relazioni reciproche delle molecole liquide. Ora immaginiamo solidificate alcune parti di questa sfera, le cui molecole non cercano muoversi le une rispetto alle altre; talchè vi rimangono dei bacini marittimi contenenti acqua fluida: la rotazione uniforme continuerà senza interruzione. Dunque si vede che la teoria di Galileo è sbagliata. Tuttavia sembra a prima vista perfettamente accettabile. Questo paradosso proviene dalla concezione *negativa* del principio d'inerzia. D'altra parte tutto divien chiaro quando ci domandiamo: Quale *accelerazione* prova l'acqua? L'acqua *senza peso* sarebbe dispersa dalla prima rotazione; l'acqua *pesante* avrebbe un movimento circolare intorno al centro della Terra. Sapendosi che la velocità di rotazione è piccola, una molecola qualunque di acqua si avvicinerebbe ancora di più al centro della Terra, se la resistenza delle molecole inferiori non distruggessero il resto dell'accelerazione centripeta che ha lasciato sussistere il suo movimento circolare di data velocità tangenziale. Tutti i punti dubbi ed oscuri sono stati in questo modo chiariti.

Ma per esser giusti bisogna dire che in questo caso, eccetto per un genio sovrannaturale, era impossibile a Galileo di approfondire compiutamente il fenomeno. Egli avrebbe dovuto aver precedentemente percorso l'enorme cammino intellettuale fatto da Huygens e Newton.

V. *Critica del principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione e del concetto di massa.*

1. Ora che le precedenti discussioni ci hanno rese familiari le idee di Newton, siamo sufficientemente preparati per addentrarci in un esame critico di esse. Anzitutto ci limiteremo al concetto di massa e al principio d'eguaglianza dell'azione e della reazione. In tale esame queste due nozioni non possono andar disgiunte; esse contengono il cardine fondamentale delle contribuzioni di Newton.

2. Innanzi tutto non si riconosce nella nozione di “ quantità di materia „ alcuna rappresentazione che possa delucidare il concetto di massa, perchè questa nozione difetta di chiarezza. Questa oscurità sussiste ancora se, come hanno fatto molti autori, arriviamo sino a numerare gli atomi, d'altronde ipotetici. Questo processo non fa che accumulare delle rappresentazioni, le quali richieggono di essere giustificate. Se mettiamo insieme un dato numero di corpi identici e della stessa sostanza, possiamo senza dubbio avere un'idea chiara da poter mettere in relazione coll'idea di “ quantità di materia, „ e riconoscere che la resistenza al moto cresce con questa quantità. Se non si richiede più l'identità chimica della sostanza di questi corpi, le esperienze meccaniche conducono assai vicino all'ipotesi, che in corpi *differenti* esiste una cosa misurabile colla *stessa* unità e che si può chiamare quantità di materia; ma tuttavia si sente sempre il bisogno di una giustificazione. Nella questione della pressione, dovuta al peso, facendo con Newton l'ipotesi $p = mg$, $p' = m'g$ e ricavandone $p : p' = m : m'$, si fa già uso *dell'ipotesi,* che non si tratta di legittimare e che consiste nella misurabilità dei diversi corpi colla *medesima* unità.

Possiamo infatti porre a priori: $m : m' = p : p'$; ciò equivarrebbe a definire il rapporto delle masse mediante il rapporto delle pressioni dovute ai pesi per uno stesso valore di g. Ma allora rimarrebbe da *giustificare* l'uso di questo concetto di massa

nel principio di eguaglianza dell'azione e della reazione e in altre questioni.

3. Essendo dati due corpi (fig. 40 *a*) identici sotto ogni riguardo, il principio di simmetria fa sì che noi dobbiamo aspettarci che le accelerazioni, le quali si possono comunicare a vicenda, abbiano la direzione della retta, che li congiunge e siano uguali ed opposte. Poichè questi corpi presentano qualche differenza di forma e di proprietà chimiche, ecc., il principio di

Fig. 140 a. *Fig. 140 b.*

simmetria non può essere più applicato, eccetto che, *a priori, non sappiamo o non facciamo l'ipotesi* che l'identità della forma o della proprietà chimica sia senza influenza. Ma se l'esperienza meccanica ci ha avvicinati alla nozione dell'esistenza di una caratteristica dei corpi determinante l'accelerazione, nulla c'impedisce di stabilire *a priori* questa proposizione:

Si chiamano corpi di masse uguali due corpi che, agendo l'uno sull'altro, si comunicano accelerazioni eguali e direttamente opposte.

Questa proposizione non fa che *denominare* una relazione tra fatti. Se, agendo l'uno sull'altro, i corpi (fig. 140 *b*) A e B si comunicano le accelerazioni rispettive $-\varphi$ e $+\varphi'$, le cui direzioni sono indicate dai segni, diremo che il corpo B ha $-\frac{\varphi}{\varphi'}$ volte la massa di A. Da ciò avremo: "*se scegliamo il corpo* A *come unità, si dirà che un corpo è di massa* m *quando questo corpo agendo sul corpo* A, *gli comunica un'accelerazione eguale ad* m *volte l'accelerazione che riceve dalla reazione del corpo* A *su esso*". Il rapporto delle masse è il rapporto inverso delle accelerazioni preso col segno negativo. L'esperienza ed essa sola ci può insegnare che queste accelerazioni sono sempre di segni contrari e che quindi non vi sono, secondo la definizione,

che masse positive. In questo concetto di massa non è coinvolta teoria alcuna; la " quantità di materia „ per esso è affatto inutile; non contiene nient'altro che la determinazione precisa, la designazione e la denominazione di un fatto.

M. Streintz (*Die physikalische Grundlagen der Mechanik*. Lipsia, 1883, pag. 117) obbietta a questa mia definizione, che un confronto delle masse, che soddisfaccia ad essa, non può esser fatto, che mediante processi astronomici. Io non posso ammettere quest'obbiezione. Ciò che abbiamo esposto nei n. 1 e 4 di questo capitolo, e nei successivi, la confutano a sufficienza. Tanto nell'urto, quanto nei fenomeni elettrici e magnetici, e quanto nella macchina di Atwood, mediante un filo le masse si comunicano accelerazioni reciproche. Nell'opera *Leitfaden der Physik* (2ª ediz., 1891, pag. 27) io fo vedere come si poteva con processo affatto elementare e popolare determinare il rapporto delle masse con il regolatore a forza centrifuga. Dunque si può considerare questa obbiezione come fuori di luogo.

La mia definizione deriva da una tendenza a stabilire la *dipendenza reciproca dei fenomeni*, e a far dileguare ogni oscurità metafisica senza che pertanto essa sia dal punto di vista dei suoi risultati meno buona, che qualunque altra fra quelle che si sono usate fino ad oggi. Io ho proceduto esattamente nello stesso modo nello studio del concetto di " quantità elettrica „ (*Uber die Grundbegriffe der Electrostatik, Vortrag gehalten auf der internationalen eletrischen Ausstellung*, Vienna, 4 settembre 1883), di quelli di " temperatura „ e di " quantità di calore „ (*Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht*, Berlino, 1888) ecc.

Da questo modo di concepire la massa risulta un'altra difficoltà, che non può sfuggire ad un critico molto sottile, e che si riscontra nell'analisi di altri concetti fisici, per esempio in quelli della teoria del calore. Maxwell ha notato questo punto nel suo studio del concetto di temperatura presso a poco verso l'epoca, in cui io l'ho fatto per quello di massa. Io potrei rin-

viare a questo riguardo al mio trattato: " *Die Principien der Wärmelehre, historischkritisch entwickelt* „ (Lipsia, 2ª ed., 1902).

4. Ora esamineremo più davvicino questa difficoltà, che è indispensabile di rimuovere per la formazione di un concetto di massa perfettamente chiaro. Confrontiamo una serie di corpi A, B, C, D.... al corpo A preso per unità:

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F \ldots \\ 1, & m, & m_1, & m_2. & m_3, & m_4 \ldots \end{array}$$

troviamo le masse rispettive 1, m, m_1, m_2, m_3, m_4 . . . . Ora sorge la questione seguente: Scegliendo B come campione od unità di misura, troveremmo per C, D . . . le masse $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$, . . . o ben altri numeri? Questa questione si può porre più semplicemente così: Due corpi B e C, che agendo separatamente su A, si comportano come avessero la stessa massa, si comporteranno ancora come aventi egual massa in un'azione reciproca? Non n'è di necessità *logica* che due masse eguali ad una stessa terza siano eguali fra loro, poichè qui trattasi non di un problema matematico, ma di una questione *fisica*. Un confronto farà meglio comprendere questa idea. Consideriamo tre sostanze A, B, C di pesi a, b, c tali, che i rapporti $a : b : c$ siano i rapporti dei pesi, secondo i quali si combinano chimicamente per formare i composti AB ed AC. Non avvi alcuna necessità *logica*, perchè nella combinazione BC i pesi B e C siano nel rapporto $b : c$. Tuttavia l'esperienza dimostra, che non avviene così. Se consideriamo dei pesi di una serie di corpi proporzionali ai pesi, in cui si combinano con uno stesso corpo A, questi corpi si combinano anche fra loro negli *stessi* rapporti di peso. Questa conoscenza può essere conseguita solo colla esperienza. Avviene lo stesso pei numeri che misurano le masse dei corpi.

L'ipotesi che l'ordine in cui i corpi sono stati disposti per la determinazione dei valori delle loro masse abbia un'influenza, è, come vedremo, in contraddizione colla esperienza. Si considerino, ad esempio, tre corpi elastici A, B, C, mobili sopra un

anello fisso (fig. 141) perfettamente levigato. Si supponga che A e B si comportino reciprocamente come aventi masse eguali, e così B e C. Si dovrà ammettere, senza tema di essere in contraddizione con la esperienza, che anche A e C si comportano reciprocamente come aventi uguali masse. Se si comunica ad A una velocità qualunque, esso la trasmette coll'urto a B, e questo a C. Se C si comportasse verso A come una gran massa, A prenderebbe coll'urto una velocità maggiore della sua velocità primitiva, mentre C conserverebbe un residuo di velocità. Ciascun giro fatto nella direzione delle lancette di un orologio *aumenterebbe la forza viva del sistema.* Se C si comportasse verso A come una massa minore, basterebbe cambiare la direzione del moto per ottenere lo stesso risultato. Ora un tale incremento di forza viva è in completa contraddizione colle nostre *esperienze.*

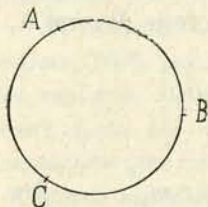



Fig. 141.

5. L'apprendimento del concetto di massa, fatto come si è veduto, rende inutile la formulazione particolare del principio dell'azione eguale alla reazione. Nel concetto di massa e nel principio dell'azione eguale alla reazione, lo *stesso* fatto viene enunciato *due volte*. Abbiamo precedentemente fatto la stessa osservazione per un altro principio: avvi un pleonasma sapendosi che le masse 1 e 2 agiscono l'una sull'altra, la nostra definizione contiene già l'enunciato del fatto, che esse si comunicano accelerazioni opposte, il cui rapporto è 2 : 1.

6. Il fatto che *la massa può essere misurata col peso*, ove l'azione della gravità è invariabile, può anche dedursi dalla nostra definizione di massa. I nostri sensi ci avvertono subito gli incrementi e le diminuzioni di pressione; ma non ci offrono che una misura assai grossolana di questa. L'osservazione che ogni pressione può essere sostituita dalla pressione di un numero determinato di corpi pesanti identici, fornisce un processo di misura delle masse, che si può utilizzare. Ad ogni pressione si può fare equilibrio colla pressione di corpi pesanti così scelti.

Abbiansi due corpi m ed m' (fig. 142) animati dalle accelerazioni φ e φ' di direzioni contrarie, dovute a circostanze esterne; si riuniscono questi due corpi con un filo; se si stabilisce l'equilibrio, l'accelerazione φ di m e l'accelerazione φ' di m' sono esattamente distrutte dalla *reazione*. Ma in questo caso si ha: $m\varphi = m'\varphi'$. Se poi è $\varphi = \varphi'$, e ciò si verifica quando i corpi sono abbandonati alla gravità, si avrà: $m = m'$. È ovvio osservare che è indifferente che si facciano agire i corpi l'uno sull'altro direttamente con un filo, ovvero con un filo che passa sopra una puleggia, o mettendoli nei piatti di una bilancia. La nostra definizione ha quindi per conseguenza evidente la misurabilità della massa per mezzo del peso, senza che sia necessario ricorrere alla " *quantità di materia* ".

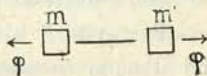



Fig. 142.

7. Dunque un'esperienza ci fa subito così scoprire nei corpi l'esistenza di *una caratteristica particolare determinante l'accelerazione*. Il nostro compito termina col riconoscimento distinto e colla designazione precisa di questo *fatto*. Non andremo più oltre di questo riconoscimento del fatto, poichè, facendolo, non potremmo apportare che oscurità. Ogni difficoltà scompare, quando si comprende chiaramente che il concetto di massa non contiene alcuna teoria, ma invece una esperienza. Fin qui questo concetto si è conservato nella scienza; ed è assai inverosimile, ma non impossibile, che esso scompaia un giorno, nello stesso modo che l'idea di una quantità di calore invariabile, che pure basavasi sull'esperienza, è stata modificata con nuovi esperimenti.

VI. *Le idee di Newton sul tempo, lo spazio ed il moto.*

1. In uno scolio, che egli pone subito dopo le sue definizioni, Newton espone le sue idee intorno allo spazio ed al tempo. Ora le esamineremo più minutamente, ma non citeremo a tale oggetto che i luoghi indispensabili per caratterizzarle.

“ Io or ora ho fatto vedere il significato che do in quest'opera ad alcuni termini, che non sono comunemente usati. Rispetto a quelli di *tempo*, di *spazio*, di *luogo* e di *moto* sono noti a tutti; ma bisogna osservare che avendo considerato queste quantità solo mediante le relazioni, che le legano alle cose sensibili, si sono commessi parecchi errori.

Per evitarli bisogna distinguere il tempo, lo spazio, il luogo ed il moto *in assoluti* e *relativi, veri* ed *apparenti, matematici* e *comuni*.

“ I. Il tempo assoluto, vero e matematico, senza alcuna relazione esterna, trascorre uniformemente e si chiama *durata*. Il tempo relativo apparente e comune è quella misura sensibile ed esterna di una parte di durata qualunque (eguale o diseguale) presa del moto; tali sono le misure di *ore*, di *giorni*, di *mesi*, ecc., di cui ci serviamo comunemente invece del tempo vero . . .

. . . . . Poichè i giorni naturali sono disuguali, quantunque essi si prendano ordinariamente per una misura eguale di tempo, e gli astronomi correggano questa ineguaglianza per potere misurare i movimenti celesti mediante un tempo più esatto. È molto probabile che non esista movimento perfettamente eguale, il quale possa servire alla misura esatta del tempo; poichè tutti i moti possono essere accelerati o ritardati; ma il tempo assoluto deve trascorrere sempre nello stesso modo.

La durata e la perseveranza delle cose è dunque la stessa, sia che i movimenti siano solleciti, sia ch'essi siano lenti; e sarebbe ancora lo stesso quando non si avesse alcun moto „.

2. Sembrerebbe, a leggere queste osservazioni, che Newton si trovi ancora sotto l'influenza della filosofia del medio-evo, e ch'egli sia *infedele* al suo divisamento di non studiare che i *fatti*. Asserire che una cosa A si trasforma col tempo, significa semplicemente che le circostanze di questa cosa A dipendono dalle circostanze di un'altra cosa B. Le oscillazioni di un pendolo prendono posto nel tempo, quando le loro ampiezze *dipendono* dalla posizione della Terra. Nella osservazione del pendolo non è necessario di tener conto di questa dipendenza della po-

sizione della Terra; bisogna fare il confronto con un'altra cosa qualunque, le cui condizioni dipendono naturalmente anche dalla posizione della Terra, e ciò dà facilmente origine a questa illusione, che *tutti* questi punti di confronto non siano necessari. Inoltre si può, nell'osservazione del moto pendolare, fare compiutamente astrazione di tutte le cose esterne e trovare che per ciascuna delle sue posizioni, i nostri pensieri e le nostre sensazioni sono diverse. Quindi il tempo sembra come una cosa particolare ed indipendente, dal cui progresso dipende la posizione del pendolo, mentre che le cose, che abbiamo liberamente scelte per punti di confronto, sembrano avere una parte secondaria. Non bisogna pertanto dimenticare che tutte le cose sono connesse fra loro, e che noi stessi, e tutte le nostre rappresentazioni mentali, non sono che una particella della natura. Ci troviamo nell' impossibilità assoluta di misurare col tempo le variazioni delle cose. Il tempo è piuttosto un' astrazione, cui arriviamo mediante questi stessi cambiamenti; mercè questo fatto non siamo obbligati ad alcuna misura *determinata*, poichè dipendono tutte fra loro. Chiamiamo moto uniforme un moto nel quale gl' incrementi eguali di cammini corrispondono ad incrementi di cammini eguali in un moto di confronto, che è quello di rotazione della Terra. Un moto può essere uniforme rispetto a un altro; ma il domandarsi se un moto è uniforme in sè, non ha alcun significato. Parlare di un “ tempo assoluto, „ indipendente da ogni variazione è intieramente privo di senso. Questo tempo assoluto non può essere misurato da nessun moto; quindi esso non ha alcun valore nè pratico, nè scientifico. Nessuno può dire ch'egli corona qualche cosa rispetto a questo tempo assoluto; ma è un'oziosa concezione metafisica.

Noi acquistiamo la nozione di tempo mediante la dipendenza reciproca delle cose. Lo si potrebbe far vedere facilmente per mezzo della psicologia, della storia e dello studio linguistico (coi nomi delle divisioni del tempo). La nozione di tempo contiene l' idea più profonda e più generale del concatenamento delle

cose. Quando un moto prende posto nel tempo, esso dipende dal moto della Terra. Questo modo di vedere non è in contraddizione col fatto, che i moti meccanici sono invertibili. Un certo numero di grandezze variabili possono essere collegate in modo tale, che un gruppo di esse possa essere modificato senza che questo cambiamento affetti le altre. La natura si comporta come una macchina. Le parti individueli si determinano reciprocamente le une colle altre. In una macchina la posizione di una delle parti determina quelle di tutte le altre; ma si comprende che esistono nella natura relazioni più complicate. La migliore immagine che si può formare di queste relazioni consiste nel rappresentarsi un numero n di grandezze collegate fra loro mediante un numero di equazioni $n' < n$. Se n fosse eguale ad n', la natura sarebbe invariabile. Se n fosse eguale a $n' - 1$ una delle quantità determinerebbe tutte le altre; e se questo caso fosse quello che si presenta in natura, il tempo sarebbe invertibile, poichè sarebbe stato conseguito mediante un moto unico. Ma il vero stato delle cose non corrisponde a questa differenza fra n ed n'. Le grandezze non sono allora che parzialmente determinate l'una coll'altra; esse hanno una indeterminazione, una libertà maggiore che nell'ultimo caso. Noi stessi abbiamo la sensazione di essere elementi analoghi della natura in parte determinati e in parte indeterminati. Il tempo non ci sembra come irreversibile, ed il tempo passato come irrevocabilmente trascorso solo pel fatto che una parte solamente delle variazioni, che si producono nella natura, dipende da noi, e che la riversibilità di questa parte solamente è in nostro potere.

Per esprimere il nostro pensiero in modo breve e accessibile a tutti diremo che si giunge alla nozione di tempo mediante la relazione fra il contenuto del dominio della nostra memoria e il contenuto del dominio della nostra percezione esterna. Quando noi diciamo che il tempo trascorre in una direzione o in un senso definito, ciò significa semplicemente che gli avvenimenti fisici (e quindi anche gli avvenimenti psicologici) si verificano in un

senso definito (1). Le differenze di temperatura, le differenze elettriche e tutte le differenze di livello in generale, abbandonate a se stesse, non crescono, ma diminuiscono. Consideriamo due corpi di temperature disuguali messi in presenza l'uno dell'altro ed abbandonati a se stessi, noi non potremo trovare che differenze di temperatura maggiori nel campo della memoria e minori nel campo della percezione sensibile, e non l'inverso. Tutti questi fenomeni non esprimono altro che una dipendenza reciproca particolare e profonda delle cose. Pretendere ora una perfetta delucidazione di questa questione sarebbe volere anticipare, nello stesso modo della filosofia speculativa, i risultati di tutte le ricerche future, ed esigere una perfetta conoscenza della natura.

Ho esposto altrove le mie vedute sul tempo psicologico, sulla sensazione del tempo e in parte anche sul tempo *fisico*. (*Beiträge zur Analyse der Empfindungen*, Iena, 2ª ediz., 1900, pag. 103-111, 166-168). Nello studio dei fenomeni calorifici si sceglie per misurare le temperature un'*indicatore volumetrico arbitrariamente scelto* (termometro), che varia quasi in corrispondenza parallela colla nostra *sensazione* del calore, ma che non è sottoposto alle perturbazioni incontrollabili degli organi dei sensi. Così, e per ragioni analoghe, prendiamo per misurare il tempo un *moto arbitrariamente scelto* che procede quasi in corrispondenza parallela colla nostra sensazione di tempo; tal'è, per esempio, l'angolo, di cui la Terra ha girato o il cammino descritto di un corpo abbandonato a se stesso. Le oscurità metafisiche svaniscono, allorchè ci siamo perfettamente persuasi che si tratta semplicemente di stabilire la *dipendenza reciproca* dei fenomeni, come io l'ho fatto già rilevare nel 1865 (*Ueber den Zeitsinn des Ohres*, Sitzungsb. d. Wien. Akad.) e nel 1866 (*Fichte's Zeitschr. f. Philosophie*). Confr. anche Epstein, *Die logischen Principien der Zeitmessung*, Berlino, 1887.

---

(1) Qui non ci occupiamo delle ricerche sulla natura fisiologica delle sensazioni di tempo e di spazio.

In un' altra opera (*Principien der Wärmelehre,* p. 51) ho cercato di dimostrare l'origine di questa tendenza degli uomini a personificare i concetti che erano ad essi cari, e particolarmente quelli, cui essi sono giunti istintivamente senza alcuna conoscenza della storia del loro sviluppo. I ragionamenti che abbiamo fatti rispetto alla nozione di temperatura, si possono facilmente applicare alla nozione di tempo, e così rendono più intelligibile la nozione di " tempo assoluto „ di Newton. Abbiamo fatto lo stesso ragionamento (vedi capitolo III, n. V, § 5) rispetto alla relazione tra il concetto d'energia e la irreversibilità del tempo; e abbiamo espresso l'opinione che l'entropia dell'universo nel suo totale, se essa potesse d'altra parte essere determinata, costituirebbe una specie di unità assoluta di tempo. Indicherò ancora qui la discussione di Petzold (*Das Gesetz der Eindeutigkeit,* " Vierteljahrschr. f. W. Philosophie, 1894, pag. 146), cui risponderò in altra parte.

3. Newton espone, a proposito dello spazio e del moto, idee analoghe alle sue idee sul tempo. Citeremo ancora alcuni passi caratteristici.

" II. Lo spazio assoluto, senza riguardo alle cose esterne, rimane per sua natura sempre simile ed immobile.

" Lo spazio relativo è quella misura o parte mobile dello spazio assoluto, la quale cade sotto i nostri sensi per mezzo della sua relazione coi corpi, e che il volgo confonde collo spazio immobile . . . . „.

" IV. Il moto assoluto è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto in un altro luogo assoluto; ed il moto relativo è la traslazione da un luogo relativo ad un'altro luogo relativo. . . . . Noi ci serviamo dunque dei luoghi e dei moti relativi invece che dei moti assoluti, come si usa nella vita civile senza nessun inconveniente. Ma nelle discussioni filosofiche bisogna fare astrazione dei sensi, perchè può essere che non vi sia nessun corpo veramente in riposo, cui si possano riferire i luoghi e i moti.

“Gli effetti, pei quali si può riconoscere il moto assoluto dal moto relativo, sono le forze, che hanno i corpi, i quali ruotano per allontanarsi dall'asse del loro moto, poichè nel moto circolare, semplicemente relativo, queste forze sono nulle, ed in un moto circolare vero ed assoluto sono più o meno grandi, secondo la quantità del moto.

“Se si fa ruotare intorno un vaso sospeso ad una corda sino a che la corda, a forza di essere torta, divenga in qualche maniera inflessibile; e se poi questo vaso si riempie d'acqua, e dopo aver lasciato prendere all'acqua e al vaso lo stato di riposo si dà alla corda la libertà di svolgersi, allora il vaso acquisterà in questo modo un moto, che durerà per lungo tempo; all'inizio di questo movimento la superficie dell'acqua contenuta in questo vaso rimarrà piana come era prima che la corda si svolgesse; ma poi il moto del vaso comunicandosi a poco a poco all'acqua che contiene, quest'acqua incomincia a girare, ad innalzarsi verso i suoi orli e a divenire concava come io l'ho provato; e il suo moto aumentandosi, gli orli di quest'acqua s'innalzeranno sempre più, sino a che le sue rivoluzioni, compiendosi in tempi eguali a quelli, in cui il vaso fa un intero giro, l'acqua sarà in un riposo relativo rispetto al vaso. L'ascensione dell'acqua verso gli orli del vaso indica lo sforzo, ch'essa fa per allontanarsi dal centro del suo moto e, si può conoscere e misurare con questo sforzo il moto circolare vero ed assoluto di quest'acqua, il quale è interamente opposto al suo moto relativo; poichè nell'inizio, in cui il moto relativo dell'acqua nel vaso era maggiore, questo moto non eccitava in essa alcuno sforzo per allontanarsi dall'asse del suo movimento: l'acqua non s'innalzava sugli orli del vaso, ma restava piana; e quindi non aveva ancora il moto circolare vero ed assoluto. Quando poi il moto dell'acqua incomincia a diminuire, l'ascensione dell'acqua verso gli orli del vaso indicava lo sforzo che essa faceva per allontanarsi dall'asse del suo moto; e questo sforzo, che andava sempre aumentando, indicava l'incremento del suo moto circolare vero. Infine questo moto circo-

lare vero era maggiore quando l'acqua era in un riposo relativo nel vaso...

" Bisogna confessare che è assai difficile conoscere moti veri di ciascun corpo e distinguerli effettivamente dai moti apparenti, poichè le parti dello spazio immobile, nelle quali si eseguiscono i moti veri, non cadono sotto i nostri sensi. Tuttavia non bisogna interamente disperarne, poichè possiamo servirci per pervenirvi tanto dei moti apparenti, che sono le differenze dei moti veri, quanto delle forze, che sono le cause e gli effetti dei moti veri. Se, per esempio, due globi attaccati l'uno all'altro per mezzo di un filo di lunghezza data, si fanno ruotare intorno al loro centro di gravità comune, la tensione del filo farà conoscere lo sforzo che essi fanno per allontanarlo dal centro del loro moto, e darà con questo mezzo la quantità di moto circolare. Inoltre se colpendo questi due globi allo stesso tempo, in direzioni opposte e con forze eguali, si aumenta o si diminuisce il moto circolare, si riconoscerà dall'incremento o dalla diminuzione della tensione del filo, l'aumento o la diminuzione del moto; ed infine si troverà in questo modo le parti dei globi, in cui le forze devono essere impresse per aumentare il più possibile il moto, cioè le parti che si muovono parallelamente al filo e che seguono il suo movimento: perciò conoscendo queste parti e le loro opposte, che precedono il moto del filo, si avrà la determinazione del moto.

" Analogamente si giungerà a conoscere la quantità e la determinazione di questo moto circolare in un moto qualunque, in cui non vi sarebbe nulla di esterno, nè di sensibile, cui si possa riferire il moto di questi globi. „

4. È appena necessario di fare osservare che in queste considerazioni Newton è ancora una volta in contraddizione col suo divisamento di studiare solo i fatti. Nessuno può dir nulla dello spazio assoluto e del moto assoluto, che sono nozioni puramente astratte, che non possono in nulla essere il risultato dell'esperienza. Abbiamo dimostrato particolareggiatamente, che tutti i principî fondamentali della meccanica derivano dalle esperienze

sulle posizioni e sui moti relativi dei corpi. Nei campi, in cui oggi si riconosce la loro validità, non sono stati accettati senza prove e non potevano esserlo. Nulla autorizza ad estendere questi principî al di fuori dei limiti della nostra esperienza; infatti questa estensione non avrebbe alcun senso, poichè nessuno ne potrebbe fare uso.

Entriamo in qualche particolare. Diciamo che un corpo K può cambiare la sua direzione e la sua velocità solamente sotto l'influenza di un altro corpo K′. Ora sarebbe per noi impossibile giungere a questa idea, se altri corpi A, B, C... non fossero presenti, i quali ci permettono di giudicare del moto di K. Dunque noi siamo semplicemente consci di una relazione del corpo K coi corpi A, B, C... Fare subito astrazione di A, B, C... e mettersi a parlare del modo come si comporta il corpo K nello spazio assoluto significa cadere in un duplice errore. Infatti è impossibile di sapere come K si comporterebbe in assenza dei corpi A, B, C..., poichè noi non possederemmo allora alcun mezzo, che ci permetta di giudicare del modo di comportarsi del corpo K e di dimostrare la nostra affermazione; questa non avrebbe dunque più significato scientifico.

Due corpi K e K′, che gravitano l'uno verso l'altro, si comunicano accelerazioni inversamente proporzionali alle loro masse m ed m' e dirette secondo la retta che li congiunge. Questo teorema non contiene solo una relazione reciproca di K col corpo K′, ma anche una relazione di questi due corpi con tutti gli altri corpi. Esso afferma infatti non solo che i due corpi K, K′ hanno l'uno rispetto all'altro, l'accelerazione $\varkappa \frac{m+m'}{r^2}$, ma ancora che K è animato dall'accelerazione $\frac{-\varkappa m'}{r^2}$ e K′ dall'accelerazione $+\varkappa \frac{m'}{r^2}$, entrambe dirette secondo la congiungente i due corpi, e ciò non si può dimostrare che con la presenza di altri corpi.

Il moto di un corpo K non può essere osservato che rispetto ad altri corpi A, B, C... Ma possiamo disporre di un numero suf-

ficiente di corpi relativamente fissi gli uni rispetto agli altri, o le cui posizioni non cambiano tutt'al più che assai lentamente; non ci siamo quindi ristretti ad alcun corpo *determinato* come punto di riferimento, e possiamo fare astrazione ora dell'uno, ora dell'altro. Ciò diede origine all'idea che questi corpi siano generalmente indifferenti.

Infatti può essere che i corpi isolati A, B, C... non siano che accessorii nella determinazione del moto del corpo K e che questo moto sia determinato mediante il *mezzo*, in cui si trova K. Ma allora si dovrebbe sostituire questo mezzo allo spazio assoluto di Newton. Newton certamente non ha avuto questa idea. Inoltre si può dimostrare facilmente che l'atmosfera non è questo mezzo che determina il moto. Allora si deve immaginare un mezzo, che riempie quasi l'intiero spazio, ed avente proprietà, di cui presentemente non abbiamo alcuna adeguata conoscenza, come non l'abbiamo delle condizioni del moto dei corpi che vi si trovano. Un tale stato di cose in sè non sarebbe impossibile. Gli studî recenti sull'idrodinamica hanno dimostrato che un corpo solido, immerso in un fluido senza attrito, non prova resistenza che per le *variazioni* di velocità. Invero questo risultato è una conseguenza teorica del principio d'inerzia, ma si potrebbe inversamente considerarlo come il fatto primitivo, che deve servire di punto di partenza. Così perciò, quantunque questa rappresentazione non possa ora essere di alcuna utilità pratica, tuttavia si può sperare che l'avvenire aumenterà la nostra conoscenza di questo mezzo ipotetico; e, dal punto di vista scientifico, questa concezione è di un valore assai maggiore dell'idea antiquata di uno spazio assoluto. Considerando che è impossibile di fare scomparire i corpi isolati A, B, C..., e quindi di discernere se la parte che hanno è essenziale od accessoria, che d'altronde questi corpi sono stati fin qui il solo e l'unico mezzo sufficiente di orientazione dei moti e di descrizione dei fatti meccanici, si comprenderà che è vantaggioso considerare senz'altro tutti i moti come determinati da questi corpi.

5. Ora esaminiamo quali siano le più forti ragioni sulle quali Newton abbia fondato la sua distinzione fra moto assoluto e moto relativo. Se la Terra è animata da una rotazione *assoluta* intorno al suo asse, ne consegue che *vi si manifestano forze centrifughe*, che essa è schiacciata, che l'accelerazione della gravità diminuisce all'equatore, che il piano del pendolo di Foucault gira, ecc. Tutti questi fenomeni scompaiono se la Terra è in riposo, e se i corpi celesti sono animati da un movimento assoluto tale, che ne risulti la stessa rotazione *relativa*. Così avviene certamente se, *a priori*, prendiamo lo spazio assoluto per punto di partenza; ma rimanendo nel campo dei fatti, non si conosce nient'altro che lo spazio ed il moto *relativi*. Astrazion fatta di questo mezzo incognito dello spazio, che non deve essere considerato, si trova che i movimenti del sistema del mondo sono relativi e gli stessi, sia che si adotta il sistema di Tolomeo o quello di Copernico. Queste due concezioni sono egualmente *esatte*; la seconda non è che più semplice e più *pratica*. L'universo non ci è stato dato *due volte*, prima con una Terra in riposo, poi con una Terra animata di una rotazione, ma solo *una volta*, con i suoi movimenti relativi solo determinabili. Dunque è impossibile dire come procederebbero le cose, se la Terra non girasse. Tutto ciò che si può fare è di interpretare in diversi modi il caso che ci è dato. Se tuttavia la nostra interpretazione ci mette in contraddizione con la esperienza, essa è falsa. I principii fondamentali della meccanica possono infatti essere compresi in modo, che le forze centrifughe si manifestino anche per rotazioni relative.

L'esperimento del vaso pieno d'acqua ed animato di un moto di rotazione ci informa che la rotazione relativa dell'acqua rispetto al vaso non produce forze centrifughe apparenti, ma che queste sono prodotte dal suo moto relativo rispetto alla massa della Terra ed agli altri corpi celesti; esso non ci insegna nulla di più. Nessuno potrebbe dire ciò che avrebbe dato l'esperienza, se la parete del vaso fosse stata di spessore maggiore e più massiccia sino ad avere uno spessore di parecchie leghe. Non abbiamo davanti a noi che una unica esperienza, e dobbiamo

metterla d'accordo con l'insieme dei fatti, che ci son noti, ma non con le finzioni arbitrarie della nostra immaginazione.

6. Il modo, con cui fu conseguita la legge d'inerzia, non lascia sussistere dubbio alcuno sul suo significato. Galileo prima scoprì la costanza della velocità e della direzione di un corpo rispetto ad oggetti terrestri. Gran parte dei moti terrestri sono di una durata e di una estensione sì brevi, che è intieramente inutile di tener conto della rotazione, nè del cambiamento della velocità progressiva della Terra rispetto ai corpi celesti. Questa considerazione non è necessaria che pei proietti lanciati a grande distanza, per il pendolo di Foucault, od in casi analoghi. Cercando di applicare al sistema solare i principii meccanici scoperti sino dai tempi di Galileo, Newton osservò che, astrazion fatta delle azioni delle forze e per quanto è possibile di giudicarne, i pianeti sembrano conservare la loro direzione e la loro velocità rispetto ai corpi lontanissimi dell'universo, nello stesso modo, che i corpi in moto sulla Terra rispetto agli oggetti fissi posti sulla sua superficie. Il modo di comportarsi dei corpi terrestri rispetto alla Terra si può confrontare con quello della Terra rispetto ai corpi celesti lontani. L'affermare rispetto al moto dei corpi che si conosce qualche cosa d'altro che il loro modo di comportarsi relativamente ai corpi celesti, modo fornitoci dall'esperienza, è un atto di *mala fede* scientifica. L'asserire che un corpo conserva la sua velocità e la sua direzione nello *spazio* è semplicemente un modo abbreviato di riferimento all'*intiero universo*. È permesso a chi scopre il principio di servirsi di una espressione abbreviata di questa specie, perchè egli sa che essa non farà in generale sorgere alcuna difficoltà. Ma se sorgeranno difficoltà, ad esempio, se i corpi fissi gli uni rispetto agli altri, la cui presenza è indispensabile, vengono a mancare, egli rimarrà intieramente disarmato.

7. Invece di riferire il moto di un corpo K allo spazio, cioè ad un sistema di coordinate, ora faremo lo studio diretto delle sue relazioni con i *corpi* dell'universo, poichè il sistema di coordinate può essere solo *determinato* mediante questi. Le distanze

reciproche de' corpi assai lontani fra loro, che si muovono con una velocità costante e nella stessa direzione relativamente ai corpi fissi lontanissimi, variano proporzionalmente al tempo. Si può anche dire che, se si trascurano tutte le azioni reciproche o altro, le distanze dei corpi lontanissimi variano proporzionalmente fra loro. Ma se la distanza di due corpi, che si muovono rispetto ad altri corpi lontani, con velocità costanti in grandezze e direzioni, è piccola, la sua variazione è sottoposta ad una legge più complicata. Supponiamo che i due corpi dipendano l'uno dall'altro; indichiamo con r la loro distanza, con t il tempo, e con a una costante dipendente dalle grandezze e dalle direzioni delle velocità, si troverà:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r}\left[a^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Dunque è evidentemente assai più *semplice* e più *comoda* di riguardare i due corpi come indipendenti fra loro, e di considerare la costanza della loro velocità e della loro direzione rispetto ad altri corpi lontanissimi.

Invece di dire che la velocità di una massa μ dello spazio rimane costante in grandezza ed in direzione si può dire anche che l'accelerazione media di questa massa μ, rispetto alle masse $m, m', m''\ldots$ poste alle distanze $r, r', r''\ldots$ è nulla, ovvero che

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = o.$$

Quest'ultima espressione è equivalente alla prima, se si considera un numero sufficiente di masse abbastanza grandi e lontane. L'influenza reciproca delle piccole masse più vicine, che in apparenza sono indipendenti fra loro, scomparisce da sè stessa. Per vedere che l'invariabilità della direzione e della velocità è data mediante questa condizione, basta immaginare dei coni di vertice μ, che separano parti distinte nello spazio, e di porre la condizione per le masse contenute in ciascuna di queste parti

separate. Si può pure evidentemente porre per lo spazio *intiero* circostante μ:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = o;$$

ma questa equazione non ci insegna nulla sul moto di μ, poichè essa sussiste qualunque sia questo moto, purchè μ sia uniformemente circondato da un'infinità di masse. Quando due masse μ_1 e μ_2 agiscono l'una sull'altra in funzione della loro distanza, si ha:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = (\mu_1 + \mu_2) f(r);$$

ma, nello stesso tempo, secondo il principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione, l'accelerazione del centro di gravità di due masse, od accelerazione media del sistema di masse rispetto alle masse di tutto lo spazio, rimane nulla, cioè che:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\mu_1 \frac{\Sigma mr_1}{\Sigma m} + \mu_2 \frac{\Sigma mr_2}{\Sigma m}\right] = o.$$

Considerando che il tempo, che entra nell'espressione dell'accelerazione, non è altro che un numero che serve di misura alle distanze o agli angoli di rotazione dei corpi dell'universo, si vede che è *impossibile* di fare astrazione del resto dell'universo anche nel caso più semplice, in cui sembra che non ci occupiamo che dell'azione reciproca delle *due* masse. La natura non incomincia con elementi, come noi che siamo costretti a farlo. Per noi veramente è una fortuna, quando possiamo di tanto in tanto distrarre la nostra attenzione dall'intiera potente unità del tutto per fissarla sui particolari. Non bisogna allora dimenticare di cercare subito di correggere e completare i risultati per le condizioni, che erano state lasciate provvisoriamente da banda.

8. Queste considerazioni mostrano che è inutile riferire la legge d'inerzia ad uno spazio assoluto qualunque. Al contrario si riconosce che le masse che, secondo la fraseologia corrente,

esercitano le une sulle altre azioni reciproche, e quelle che non le esercitano, si trovano fra loro nelle relazioni di accelerazione perfettamente identiche, e si può effettivamente considerare *tutte* le masse come in relazione le une colle altre. Si deve accettare come un fatto sperimentale che, nelle relazioni delle masse, le *accelerazioni* abbiano una parte preponderante. Ciò non impedisce di cercare di *delucidare* questo fatto, confrontandolo con altri fatti, poichè nuovi punti di vista possono essere così acquistati. In tutti i fenomeni della natura le *differenze* di certe quantità u hanno parte *determinante*. Le differenze di temperatura, di potenziale, ecc., dànno origine ai fenomeni, che consistono nell'agguagliamento di queste differenze. Le espressioni ben note $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, che sono le determinanti caratteristiche dell'agguagliamento, si possono considerare come la misura del passaggio delle condizioni di un punto alla condizione media verso la quale esso tende. Le accelerazioni delle masse si possono concepire in modo analogo. Le grandi distanze delle masse senza azione fra loro variano *proporzionalmente a sè stesse*. Dunque prendendo una certa distanza ϱ come ascissa ed r come ordinata (fig. 143), si ottiene una figura, che è una retta. Ciascuna ordinata r, corrispondente ad un valore dato a ϱ, è media fra le due ordinate adiacenti. Se i corpi si trovano in una certa relazione di forza, un certo valore di $\frac{d^2r}{dt^2}$ si trova determinato; che, secondo le osservazioni precedenti, possiamo sostituire con un'espressione della forma $\frac{d^2r}{d\varrho^2}$. Questa relazione di forza determina perciò una certa *differenza* fra l'ordinata r e la *media delle ordinate vicine*, differenza che non esisterebbe senza questa relazione di forza. Questo accenno basta a far conoscere la nostra idea.

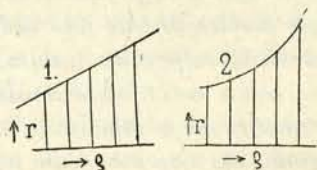



Fig. 143.

9. In quello che precede abbiamo tentato di dare alla legge d'inerzia un'altra espressione, oltre quella comune. Da molto tempo alcuni corpi in sufficiente numero sembrarono fissi nello spazio; questa nuova espressione condurrà agli stessi risultati che l'antica. Essa è tanto facile ad applicarsi, ma incontra le stesse difficoltà. Nel primo caso si presenta uno spazio assoluto, che non possiamo distinguere. Nel secondo non avvi che un numero limitato di masse nel campo delle nostre conoscenze, e la somma indicata non può essere effettuata. È impossibile di affermare che la nuova espressione rappresenterebbe ancora il vero stato delle cose, se le stelle si muovessero sensibilmente le une verso le altre. Non possiamo costruire l'esperienza generale mediante i casi particolari che possediamo. Dovremo *aspettare* al contrario, che questa esperienza si presenti. Forse colla estensione delle nostre conoscenze fisiche ed astronomiche un giorno essa ci offrirà qualche parte negli spazi celesti, in cui i moti saranno più forti e più complicati, che in tutto ciò che ci circonda. Tuttavia il più importante dei risultati, cui siamo giunti, è che: *precisamente i principî meccanici in apparenza più semplici sono di una natura assai complicata; che essi si fondano sopra esperienze non realizzate ed anche non realizzabili; che sono invero sufficientemente stabiliti dal punto di vista pratico per servire di base alla deduzione matematica, essendo data la stabilità sufficiente di tutto ciò che ci circonda; che non possono in alcun modo essere considerati in se stessi come verità matematicamonte dimostrate, ma per lo contrario come proposizioni, che non solamente ammettono, ma richiedono ancora il controllo perpetuo dell'esperienza,* Questo modo di vedere ha il gran merito di favorire molto il progresso della scienza.

10. Parecchie opere pubblicate dopo il 1883 sulla legge d'inerzia mostrano ad evidenza il grande interessamento che si ha per questa questione. Io debbo subito ricordare rapidamente di Streintz (*Physikalische Grundlagen der Mechanik,* Leipzig, 1883) e quello di L. Lange (*Die geschichtliche Entwickelung Der Bewegungsbegriff*, Lipsia, 1886).

Streintz pensa con ragione che l'espressione " movimento assoluto „ di traslazione è priva di senso, e perciò egli considera come superflue certe deduzioni analitiche, cui essa serve di base. In quanto alla *rotazione* Streintz crede con Newton di poter distinguere una rotazione *assoluta* da una rotazione relativa. Da questo punto di vista si può dunque scegliere un corpo qualunque non animato da una rotazione assoluta, come corpo di riferimento per l'espressione della legge di inerzia.

Io non posso condividere questa opinione; secondo me tutto sommato non esiste che un moto relativo (cfr. *Erhaltung der Arbeit*, pag. 48 alinea 2; *Meccanica*, pag. 222; 4) e non scorgo a questo riguardo *alcuna* distinzione fra la rotazione e la traslazione. Una rotazione relativa alle *stelle fisse* dà origine in un corpo a delle forze di allontanamento dall'asse. Se la rotazione non è relativa alle stelle fisse, queste forze di allontanamento non esistono. Io non mi oppongo a ciò che si dà alla prima rotazione il nome di assoluto, poichè non si deve dimenticare, che essa non è altro che una rotazione relativa rispetto alle *stelle fisse*. Possiamo fissare il vaso d'acqua di Newton, poi fare girare il cielo delle stelle fisse e *provare allora* che queste forze d'allontanamento non esistono. Questa esperienza è irrealizzabile; questa idea è priva di senso, poichè i due casi sono indiscernibili fra loro nella percezione sensibile. Dunque io considero questi due casi come ne formassero uno solo, e la distinzione che ne fa Newton come illusoria (vedi cap. II, n. 6, § 5).

Ma si può dire a tutto rigore che si può, in un areostato avvolto da nubi, orientarsi per mezzo di un corpo che non ruota relativamente alle stelle fisse; ciò che d'altra parte non è altro che una orientazione indiretta rispetto alle stelle fisse, semplicemente una orientazione meccanica sostituita ad una orientazione ottica.

Alle obbiezioni di Streintz io opporrò ancora le osservazioni seguenti. La mia opinione non deve essere confusa con quella di Eulero (Streintz, pp. 7, 50). Come Lange l'ha assai ben di-

mostrato, Eulero non ebbe di questo soggetto alcuna concezione intelligibile ben fondata. — *Io non ho supposto* (Streintz, pag. 7), che le sole masse allontanate, e non anche le masse riavvicinate, partecipino alla determinazione dell'accelerazione di un corpo; io non parlo che di una influenza indipendente dalla distanza. Io stento a credere che secondo la mia esposizione (vedi cap. II, n. IV, § 5 e n. VI, § 8) un lettore imparziale ed attento manterrebbe con Streintz (pag. 50) che, senza conoscere nè Newton nè Eulero, e molto tempo dopo essi, io sia stato condotto solo ad opinioni, che questi investigatori possedevano già, e che non furono accettate più tardi in parte da essi stessi e in parte da altri. Streintz conosceva solo le mie osservazioni del 1872, ma esse non giustificano questa critica. Queste osservazioni erano brevissime, e ciò per buonissime ragioni. Ma esse non erano in alcuna maniera tanto meschine quanto possono sembrare a chi le conosca solo per mezzo della critica di Streintz. Sino da questa epoca avevo espressamente respinto il punto di vista, in cui si pone Streintz.

L'opera di Lange mi pareva che fosse una delle migliori, che siano state pubblicate su questo argomento. Essa è scritta con un metodo che ne rende la lettura assai piacevole. La sua analisi vigile e la sua esposizione storica e critica del concetto di moto lo conducono a risultati, che mi sembrano siano di un valore duraturo. Io considero come d'un gran merito la posizione chiara e la *designazione giudiziosa* del principio di “ determinazione particolare, „ benchè il principio stesso non mi sembri *nuovo* più che le sue applicazioni. Questo principio è invero la base di ogni misura. La scelta di ogni unità di misura è convenzionale; il numero, che dà la misura, è il risultato di una ricerca. L'investigatore, che si rende chiaramente conto, che tutto consiste (come io l'ho detto già da tempo, nel 1865 e 1866) a scoprire la dipendenza reciproca dei *fenomeni*, fa uso di questo principio. Allorchè, per esempio, (vedi cap. II, n. V, § 3 e seguenti) si chiama per definizione rapporto delle masse di due corpi il rapporto inverso delle loro accelerazioni reciproche, prese

col segno contrario, si fa espressamente e volontariamente una *convenzione;* ma il fatto che questi rapporti siano *indipendenti* in un modo o nell'altro dalle combinazioni di due corpi, è il *risultato di una ricerca.* Potrei dare altri esempî presi dalla teoria del calore o dell'elettricità, come anche da altri campi.

Secondo Lange la legge d'inerzia, sotto la sua forma più semplice e più chiara, si enuncerebbe così:

" Tre punti materiali P_1, P_2, P_3 sono lanciati simultaneamente dallo stesso punto dello spazio, e poi abbandonati a sè stessi. Poichè ci siamo assicurati, che essi non sono posti in linea retta, li congiungiamo con un quarto punto Q *interamente arbitrario.* Siano G_1, G_2, G_3 le congiungenti, che formano un triedro. *Solidifichiamo* questo triedro, e supponiamo che, *conservando così la sua forma*, prenda in ciascun istante una posizione tale, che i punti P_1, P_2, P_3 continuino a muoversi continuamente sulle linee Q_1, Q_2, Q_3. Gli spigoli di questo triedro si potranno prendere per assi di un sistema di coordinate (sistema d'inerzia) rispetto al quale ogni punto materiale abbandonato a se stesso descriverà una linea retta. Gli spazi percorsi dai punti abbandonati a loro stessi sulle traiettorie così determinate, sono proporzionali fra loro.

Con le restrizioni poste Lange considera dunque che un sistema di coordinate relativamente al quale tre punti materiali si muovono in linea retta, è una semplice convenzione. Che in un sistema di questa specie un quarto punto, e molto più un punto materiale qualunque, abbandonato a se stesso, si muova in *linea retta*, è il *risultato d'una ricerca*, come il fatto della proporzionalità dei segmenti percorsi da questi punti.

Incontanente non si può costatare che la legge d'inerzia possa essere riferita a un sistema simile di coordinate di tempo e di spazio ed essere posta sotto questa forma. Questa concezione è meno acconcia per la pratica, che quella di Streintz; ma essa ha su questa una superiorità notevole dal punto di vista del metodo. Per me individualmente essa ha una attrattiva particolare, poichè appena da anni io mi sono preoccupato di *tenta-*

tivi analoghi; non ne resta in questo libro, per così dire, che dei ricordi (vedi cap. II, n. VI, § 7); e se io li ho abbandonati, l'ho fatto dopo avere acquistato la convinzione, che tutti questi modi di espressione, compresi quelli di Streintz e di Lange, non evitano che *in apparenza* di riferirsi alle stelle fisse e all'angolo di rotazione della Terra.

Infatti fu per l'osservazione delle stelle fisse e per la rotazione della Terra che siamo arrivati alla conoscenza della legge d'inerzia nel suo campo attuale di validità. Senza queste *basi fondamentali mai si sarebbe pensato a questi tentativi,* di cui abbiamo parlato. La considerazione di alcuni punti isolati dal resto del mondo è per me inammissibile (vedi cap. II, n. VI, § 6 e 7).

Poichè si suppongono le stelle fisse non esistenti, o non invariabili, o tali che non si possa con una approssimazione sufficiente tenerle per invariabili, mi sembra *assai dubbio* che un quarto punto, abbandonato a se stesso, in un " sistema d'inerzia " di Lange si muova con un moto rettilineo uniforme.

Considerare subito la legge d'inerzia come un'approssimazione sufficiente, riferirla alle stelle fisse nello spazio e alla rotazione della Terra nel tempo e ripromettersi che una esperienza più estesa permetta di precisare le nostre conoscenze su questa questione, è ancora il punto di vista più naturale per l'investigatore sincero come io l'ho fatta vedere più sopra (vedi cap. II, n. VI, § 10).

11. A proposito della legge d'inerzia ci rimane da citare alcuni trattati pubblicati dopo il 1889. Accenno anzitutto al trattato di K. Pearson (*Grammar of Science*, Londra, 1892, pag. 477) che, fatta astrazione dalla terminalogia, concorda col mio. B. e J. Friedländer (*Absolute und relative Bewegung*, Berlino, 1896) studiano il problema mediante un'esperienza di cui ho dato il disegno (vedi cap. II, n. VI, § 5); ma io temo che essa non possa servire alla soluzione quantitativa del problema. Io sottoscrivo interamente alla discussione di Johannesson (*Das Beharrungsgesetz*, Berlino, 1896) quantunque la questione

di sapere con che criteri si *determina* il moto di un corpo *non* accelerato mediante gli altri corpi resti inesplicata. Per essere completi io citerò ancora le importanti considerazioni dialettiche di M. E. Vicaire (*Société Scientifique de Bruxelles*, 1895), come le ricerche di J. G. Mac-Gregor (*Royal Society of Canada*, 1895), benchè queste ultime non siano che in relazione lontana con la quistione di cui ci occupiamo. Non ho nulla da obbiettare al modo di vedere di Budde, che concepisce lo spazio come una specie di mezzo (vedi Cap. II, n. VI, § 5); ma penso che le proprietà di questo si possano scoprire con un processo fisico qualunque e non devono essere attribuite *ad hoc*. Giacchè si considerano tutte le azioni in apparenza a distanza, accelerazioni, ecc., come dovute all'intervento di un mezzo, il problema si presenta sotto una luce diversa, e la soluzione forse deve essere ricercata nelle considerazioni esposte nel Cap. II, n. VI, § 5.

12. Le questioni sopra il significato della legge d'inerzia vengono oggi discusse molto più generalmente e con più gran libertà da pregiudizî di quello, che non avvenisse all'epoca della prima edizione di questo libro. Il pubblico scientifico ha subìto un mutamento non indifferente da quell'epoca. Il problema potrebbe dunque presentemente (1903) essere di nuovo esposto, tralasciando qualche polemica, che allora era necessaria. Io però, e si capisce facilmente il motivo, ho preferito di lasciare il testo antico; quindi mi permetterò di aggiungere come complemento ciò che oggi ho da dire.

L'opinione che il moto assoluto sia un concetto senza senso, privo di contenuto e scientificamente non applicabile, modo codesto di vedere che vent'anni fa suscitava quasi generale sorpresa, viene oggi sostenuta da molti celebri scienziati. Basta che io riporti come decisamente relativisti: Stallo, J. Thomson, Ludwig, Lange, Love, J. G. Mac-Gregor, Pearson, Mansion, Keinpeter. Il numero dei relativisti è in rapido aumento; e certo il precedente elenco non è del tutto completo. Presto probabilmente non ci sarà più nessun sostenitore importante della ipotesi opposta. Se però le ipotesi dello spazio assoluto e del tempo

assoluto non sono più sostenibili, sorge la domanda: In qual modo possiamo noi dare un significato chiaro alla legge d'inerzia? Mac-Gregor in un'eccellente Memoria, scritta con molta chiarezza, (*Philos. Magaz. XXXVI.* 1893, p 233) indica due vie: 1° la via storico-critica, la quale considera di nuovo i fatti, su cui si basa la legge d'inerzia, e considera i suoi limiti di validità ed eventualmente un nuovo modo di formularla; 2° la supposizione che la legge d'inerzia nella sua forma antica insegna a conoscere sufficientemente i movimenti e la deduzione, da questi movimenti stessi, del giusto sistema di coordinate.

L'esposizione che io qui farò è un esempio del 1° metodo. Essa contiene già l'accenno a modificazioni, che vanno diventando necessarie, grazie all'allargamento dell'esperienza. La seconda via è certo psicologicamente la più naturale, data la grande fiducia, che gode la meccanica, come la scienza maggiormente esatta. Difatti questa via fu spesso battuta con maggiore o minor successo, ed io stesso l'ho tentata prima che io credessi di dover preferire l'altra.

W. Thomson e Tait (*Treatise on Natural Philosophy*, Parte I, Vol. I, 1879, § 249) osservano che due punti materiali lanciati contemporaneamente da uno stesso luogo e poi abbandonati a sè stessi si muovono in modo che la retta che li congiunge rimane parallela a sè stessa. Se dunque quattro punti O, P, Q, R, vengono lanciati contemporaneamente dallo stesso luogo, e poi non soggiacciono a nessuna forza, le linee OP, OQ, OR stabiliscono direzioni sempre fisse. J. Thomson (*Proc. R. S. T.* 1884, pp. 568-730), cerca in due articoli di costruire il sistema di riferimento corrispondente alla legge d'inerzia, ed in essi riconosce già che le ipotesi sulla uniformità e sulla rettilineità sono in parte convenzionali. Spinto da J. Thomson anche Tait (opera cit. § 743) si dedica alla soluzione dello stesso problema mediante i quaternioni; e sulla stessa via troviamo anche Mac-Gregor nel suo discorso presidenziale (*Transactions R. Society of Canadà*, R. S. X 1892, Sez. III, particolarmente p. 56).

Gli stessi motivi psicologici agirono anche su Lange, il quale è stato il più felice nel suo tentativo d'interpretare la legge d'inerzia newtoniana, e già nel 1885 (confronta i suoi due articoli nei *Philos. studienti Wundt* 1895). Nel secondo articolo Lange mostra che rispetto ad un punto P_1, anche moventesi secondo una linea curva, può muoversi un sistema di coordinate in modo che il punto in questo sistema descriva una retta data G_1. Se consideriamo un punto qualunque P_2 in moto, quel sistema si può sempre muovere in guisa che una seconda retta G_2, in generale obliqua rispetto a G_1, sia descritta da P_2 purchè la minima distanza G_1 G_2 non superi mai la minima distanza, alla quale vengono a trovarsi P_1 e P_2, ma sempre però il sistema può ruotare intorno a P_1 P_2. Scegliamo ora una terza retta G_3 in maniera che tutti i triangoli P_1 P_2 P_3, che si possono formare mediante un terzo punto P_3 in moto, siano rappresentati mediante punti sulle G_1, G_2, G_3; allora anche P_3 può muoversi in G_3; dunque per tre punti al massimo un sistema di coordinate nel quale questi punti si muovono rettilineamente, è una pura convenzione. Il Lange vede allora il contenuto essenziale della legge d'inerzia nel fatto che con l'aiuto di tre punti materiali abbandonati a loro stessi si può trovare un sistema di coordinate rispetto al quale quattro o quanti se ne voglian punti lasciati a loro stessi si muovono rettilineamente, descrivendo segmenti di traiettoria proporzionali fra di loro. Il caso che si dà in natura sarebbe dunque una semplificazione ed una limitazione delle varietà possibili. Cinematicamente questa considerazione è veramente molto giusta, poichè ogni scoperta di una legge significa sempre una restrizione dei casi che si possono immaginare come possibili. Aggiungerò ora questo a spiegazione dell'esposizione di Lange sopra ricordata. Kleinpeter che si pone a un punto di vista alquanto diverso (*Arch. f. Syst. Philos., VII*, 1900, p. 461) enunciò il contenuto della legge d'inerzia con le parole: " È possibile definire un sistema di coordinate ed un movimento normale rispetto ai quali si muovono rettilineamente ed uniformemente tutti quei corpi pei quali una deviazione da questa

norma non si può definire in modo univoco e corrispondente alle nostre usuali ipotesi fisiche „.

Recentemente il Lange ha pubblicato una Memoria (*Philos. Studien*, di Wundt. XX. 1902) critica, nella quale espone come secondo i suoi principii si potrebbe ottenere un nuovo sistema di coordinate, quando il volgare e rozzo riferirsi al cielo delle stelle fisse, in seguito ad osservazioni astronomiche più precise, non dovesse più convenire. Rispetto al valore formale teorico delle espressioni di Lange nel fatto, che presentemente il cielo delle stelle fisse sia l'unico sistema di riferimento usato nella pratica, e rispetto al metodo per ottenere un nuovo sistema di riferimento mediante graduali correzioni, non sussiste alcuna differenza di opinione tra Lange e me. La differenza che ancora sussiste, e forse continuerà a sussistere, sta nel fatto che Lange ha considerato la questione come matematica, mentre io ne ho considerato il lato fisico.

Lange presuppone, con una certa fiducia, che anche se il cielo si movesse, il suo enunciato si conserverebbe egualmente. Io non posso dividere questa fiducia. L'ambiente, in cui viviamo, presentante angoli quasi invariabili fra direzioni verso le stelle, mi sembra un caso oltremodo speciale, ed io non oserei da questo trarre conclusioni rispetto ad un caso molto diverso, sebbene anch'io mi aspetti che le osservazioni astronomiche potranno rendere per ora necessarie solo correzioni piccolissime. Io ritengo però per possibile che la legge d'inerzia nella sua forma semplice newtoniana ha per noi uomini un significato solo temporaneo e locale.

Permettiamoci ancora una considerazione più ardita. Noi misuriamo il nostro tempo secondo l'angolo di rotazione della Terra, e potremmo invece misurarlo anche con l'angolo di rotazione di un altro pianeta qualunque. Ma noi non crederemo perciò che lo svolgersi di tutti i fenomeni fisici col tempo debba immediamente essere disturbato, se la Terra o quel lontano pianeta subissero una eventuale improvvisa variazione della velocità angolare. Così anche nessuno crederà che in un sistema di corpi

abbandonati a sè stessi, sottratti ad ogni influenza, muoventisi rettilineamente, la eventuale perturbazione, per es., per un urto di uno di questi che ha servito a fissare il sistema di coordinate, abbia per conseguenza una immediata perturbazione dei rimanenti. L'orientazione è anche qui esteriore, per quanto si debba essere riconoscenti per essa specialmente, quando sia purgata da tutte le assurdità; tuttavia sempre lo scienziato sentirà il bisogno di un esame più intimo e più esteso, il bisogno di riconoscere le relazioni immediate, per esempio delle masse dell'universo. Come ideale egli si proporrà un'intuizione fondamentale dalla quale si deducano in guisa uguale i moti accelerati ed i moti d'inerzia. Il progresso dalla scoperta di Keplero alla legge della gravitazione newtoniana e da questa ad un concetto fisico, come quello delle azioni elettriche a distanza, può qui servire di modello. Noi dobbiamo perfino lasciar posto all'idea che le masse che noi vediamo e rispetto alle quali noi per un caso ci orientiamo, forse non sono quelle propriamente decisive. Perciò non si devono disprezzare le idee sperimentali, come quelle dei signori Friedländer, anche se non si ha subito un processo immediato. Se anche lo studioso si afferra anzitutto con gioia a ciò che gli è accessibile, pure non gli nuoce di dare di tanto in tanto uno sguardo nella profondità dello ignoto. Lo scambio d'idee fra persone, che discutono una questione, è molto importante per la spiegazione e lo studio di essa, e ne illumina i differenti aspetti.

Durante il corso della pubblicazione di questa edizione trovo nel Holtzmann-Festschift, appunto ora pubblicato, la nuova comunicazione di Newmann sopra il così detto moto assoluto. Essa contiene la proposizione " il sistema alfa (sistema d'inerzia) cui si debbono riferire tutti i moti, rappresenta evidentemente una certa correlazione indiretta di tutti i processi, che si manifestano nello intero universo, e si può dire che contenga quindi una enigmatica e complicata legge universale ".

Io credo che ciò sarà da ognuno ammesso, e si poteva anche chiaramente esprimerlo, dicendo che tale orientazione era desi-

gnata come non immediata. Se Newmann sente ora il bisogno di provare l'alfa astronomica, egli così segue secondo la via indicata da Mac-Gregor, via che fu tenuta anche da Lange. Ma io opino che lo scienziato si augurerà sempre di stabilire delle correlazioni dirette anzi che le indirette. Ho presente uno scritto chiaro e molto popolare di M. Hoffmann *(Bewegung und Trägheit*, Vienna 1904), in cui l'autore dà a vedere di non conoscere la contraversia; e cerca la soluzione seguendo la stessa via, come a suo tempo ho fatto io. L'interesse che presenta una tal questione si manifesta così sempre di nuovo. Gli scrittori francesi amano eludere simili questioni moleste, facendo una sottile distinzione fra meccanica fisica e meccanica razionale. La prima fornisce i punti sperimentali di appoggio per l'ipotesi ideate dalla seconda, le cui logiche conseguenze rimangono senza dubbio intatte, finchè resta fermo ciò che fu ammesso. L'interesse principale della meccanica consiste nella possibilità dell'applicazione; onde è certamente necessario di mano in mano che la teoria si sviluppa riesaminare, alla luce di essa, i fatti fondamentali della meccanica fisica. Se si tiene ferma la suddetta separazione, essa trae seco allora in ambedue i campi il pericolo dell'inerzia. Le scienze fisiche abbisognano di un continuo scambio reciproco fra la teorica e l'esperimento. (Vedi il bel lavoro di P. Mansion (*Sur les principes fondamentaux de la géometrie, de la mécanique et de l'astronomie*, Parigi 1863).

Mansion riguarda, del resto come noi, il moto assoluto come un non-senso e opina che il sistema tolemaico e il copernicano siano cinematicamente equivalenti. Lo scambio di vedute di persone che discutono una questione è molto importante per la chiarezza e per il progresso di essa e serve ad illuminare le diverse sue parti (Vedi Appendice n. 6).

VII. *Critica sinottica degli enunciati di Newton.*

1. Ora che abbiamo discusso abbastanza particolareggiatamente la forma e la disposizione degli enunciati di Newton, sarà utile di farne complessivamente una rivista. Newton pre-

mise alla sua opera parecchie definizioni, facendole seguire dalle leggi del moto. Anzitutto occupiamoci delle prime:

Definizione I. *La quantità di una materia si misura per mezzo della densità e del volume presi insieme.* Indico la quantità di materia colle parole *corpo* o *massa.* Questa quantità si conosce mediante il peso dei corpi, poichè ha trovato per mezzo di esperimenti esattissimi, fatti coi pendoli, che i pesi dei corpi sono proporzionali alle loro masse. Citerò queste esperienze in seguito.

Definizione II. *La quantità di moto è il prodotto della massa per la velocità.*

Definizione III. *La forza che risiede nella materia* (vis insita cioè l'inerzia) *è il potere che essa ha di resistere, pel quale ogni corpo persiste da sè stesso nel suo stato attuale di riposo o di moto in linea retta.*

Definizione IV. *La forza impressa* (vis impressa) *è l'azione, per cui lo stato di un corpo è cambiato tanto se questo stato è di riposo o di moto uniforme in linea retta.*

Definizione V. *La forza centripeta è quella che fa tendere i corpi verso quel punto come verso un centro, tanto che essi siano attratti o respinti verso questo punto o che essi vi tendano in un modo qualunqae.*

Definizione VI. *La grandezza assoluta della forza centripeta è maggiore o minore secondo l'efficacia della causa, che la propaga dal centro attraverso lo spazio circostante.*

Definizione VII. *La grandezza della forza acceleratrice centripeta è proporzionale alla velocità, che essa produce in un tempo dato.*

Definizione VIII. *La grandezza della forza motrice centripeta è proporzionale al moto che essa produce in un tempo dato.*

" Io chiamo queste differenti quantità della forza *motrici, acceleratrici* ed *assolute* per brevità.

Si può, per distinguerle, riferirle *ai corpi,* che sono attratti verso un centro, *ai luoghi* di questi corpi, ed *al centro* delle forze.

Si può riferire la forza centripeta motrice al corpo, considerandola come lo sforzo che fa l'intiero corpo per avvicinarsi al centro, il quale sforzo è composto di quello di tutte le sue parti.

La forza centripeta acceleratrice può riferirsi al luogo del

corpo, considerando questa forza in quanto essa si diffonde dal centro in tutti i luoghi, che la circondano per muovere i corpi che vi si trovano.

Infine si riferisce la forza centripeta assoluta al centro, come ad una certa causa senza la quale le forze motrici non si propagherebbero in tutti i luoghi intorno al centro, tanto se questa causa è un corpo centrale qualunque (come la calamita nel centro della forza magnetica e la Terra nel centro della forza di gravità), quanto se è un'altra causa qualunque non visibile. Questo modo di considerare la forza centripeta è puramente matematico, e non pretendo di darne la causa fisica.

La forza centripeta acceleratrice è perciò alla forza motrice acceleratrice, ciò che la velocità è al moto; poichè parimente la quantità di moto è il prodotto della massa per la velocità, la quantità di forza centripeta motrice è il prodotto della forza motrice acceleratrice per la massa; poichè la somma di tutte le azioni della forza centripeta acceleratrice su ciascuna molecola del corpo è la forza centripeta motrice dell'intero corpo. Dunque alla superficie della Terra, ove la forza centripeta acceleratrice è la stessa su tutti i corpi, la gravità motrice o il peso dei corpi è proporzionale alla loro massa; e se si elevassimo in regioni più alte, ove la forza acceleratrice della gravità è minore, diminuirà pure il peso dei corpi; così esso è sempre come il prodotto della massa per la forza centripeta acceleratrice. Nelle regioni, in cui la forza centripeta acceleratrice fosse due volte minore, il peso di un corpo metà od il terzo sarà quattro o sei volte minore, cioè diminuisce della metà.

Inoltre prendo qui nello stesso senso le attrazioni e le repulsioni acceleratrici e motrici, e mi servo indifferentemente delle parole *impulso, attrazione* o *propensione* qualunque verso un centro, poichè considero queste forze matematicamente e non fisicamente; così il lettore deve ben guardarsi di credere che io abbia voluto designare con queste parole una specie di azione, di causa o di ragione fisica; e quando dico che i centri attirano, quando parlo delle loro forze, non si deve pensare che io abbia

voluto attribuire alcuna forza reale a questi centri, che considero come punti matematici „.

2. Come l'abbiamo già spiegato particolarmente, la definizione I non è altro che l'apparenza di una definizione (pseudo definizione). Il concetto di massa non è più chiaro, perchè lo si definisce come il prodotto del volume per la massa, giacchè la densità non rappresenta per se stessa che la massa dell'unità di volume. La vera definizione della massa non può essere dedotta che dalle relazioni dinamiche dei corpi.

Non havvi da fare alcuna obbiezione alla definizione I che spiega semplicemente un'espressione di calcolo. La definizione III (inerzia) non serve a nulla mediante le definizioni IV e VIII di forza; infatti, per la natura acceleratrice della forza, l'inerzia è già data.

La definizione IV dice che la forza è la causa dell'accelerazione o la tendenza all'accelerazione di un corpo. Quest'ultima parte della definizione è giustificata dal fatto, che, se l'accelerazione non si può produrre, sopravvengono altri cambiamenti corrispondenti come le pressioni, le deformazioni del corpo, ecc. La causa dell'accelerazione verso un centro determinato si chiama forza centripeta per la definizione V; le definizioni VI, VII e VIII la distinguono in assoluta, acceleratrice e motrice. L'esporre il concetto di forza in una o più definizioni è questione di forma e di gusto; dal punto di vista logico non vi è nulla da osservare nelle definizioni di Newton.

3. Ora vengono gli assiomi o le leggi del moto. Newton ne stabilisce tre:

I legge. — *Ogni corpo persevera nello stato di riposo o di moto uniforme in linea retta in cui si trova, eccetto che qualche forza non agisca su di esso e non lo costringa a cambiare stato.*

II legge. — *I cambiamenti che si verificano nel moto sono proporzionali alle forze motrici e avvengono nella linea retta, in cui questa forza è stata impressa.*

III legge. — *L'azione è sempre uguale ed opposta alla reazione, cioè che le azioni di due corpi l'uno sull'altro sono sempre uguali e in direzioni contrarie.*

Newton fa seguire a queste leggi parecchi corollari. Il primo ed il secondo si riferiscono al principio del parallelogramma delle forze; il terzo alla quantità di moto generata dall'azione reciproca dei corpi fra loro; il quarto riguarda la conservazione del moto del centro di gravità qualunque siano le azioni reciproche; il quinto e il sesto si riferiscono al moto relativo.

4. Si riconosce facilmente che le leggi I e II sono contenute nelle definizioni della forza precedentemente date. Secondo queste non può esistere infatti, in mancanza di ogni forza, che il riposo e il moto rettilineo uniforme. Inoltre sarebbe una tautologia del tutto inutile ripetere che il cambiamento di moto è proporzionale alla forza dopo aver stabilito che l'accelerazione è la misura di questa. Basterebbe dire che le definizioni date non erano definizioni arbitrarie e matematiche, ma corrispondevano a proprietà sperimentali dei corpi. La III legge contiene in apparenza una cosa nuova; ma si è già veduto che essa non si può comprendere che dietro una chiara nozione di massa, la quale non si può ottenere che mediante esperienze dinamiche e che rendono questa legge inutile.

Il corollario I contiene realmente qualche cosa di nuovo; esso considera le accelerazioni determinate da diversi corpi M, N, P su un corpo K come *evidentemente* indipendenti fra loro, laddove questo fatto dovrebbe essere precisamente riconosciuto come un *fatto di esperienza*. Il II corollario è una semplice applicazione delle leggi enunciate nel I e tutti gli altri sono conseguenze matematiche delle concezioni e delle leggi precedenti.

5. Anche se ci attenessimo strettamente al punto di vista Newtoniano e facessimo astrazione completa delle difficoltà e delle oscurità, e che abbiamo già notato, e delle denominazioni abbreviate di *tempo* e di *spazio*, che non fanno che *nasconderle* senza *rimuoverle*, sarebbe possibile di semplificare molto l'espo-

sizione di Newton ed introdurvi maggior ordine e metodo. Secondo il nostro modo di vedere potremmo esprimerci così:

A. *Principio sperimentale.* Due corpi in presenza l'uno dell'altro determinano l'uno sull'altro in circostanze che debbono essere date alla fisica sperimentale, *accelerazioni* opposte secondo la direzione della retta che li congiunge. (Il principio d'inerzia è già compreso in questa proposizione).

B. *Definizione.* Si chiama rapporto delle masse di due corpi l'inverso, preso col segno contrario, del rapporto delle loro reciproche accelerazioni.

C. *Principio sperimenlale.* I rapporti delle masse dei corpi sono indipendenti dalle circostanze fisiche (che esse siano elettriche, magnetiche od altre) che determinano le loro accelerazioni reciproche; ed inoltre essi rimangono gli stessi, tanto se queste accelerazioni sono ricevute direttamente o indirettamente.

D. *Principio sperimentale.* Le accelerazioni, che parecchi corpi A, B, C... determinano sul punto K, sono indipendenti fra loro. (Il teorema del parallelogramma delle forze è una conseguenza immediata di questo principio).

E. *Definizione.* La forza motrice è il prodotto del valore della massa di un corpo per l'accelerazione determinata su questo corpo.

Ora si potrebbero definire le espressioni algebriche chiamate quantità di moto, forza viva, ecc.; ma ciò non è punto necessario. Queste proposizioni soddisfano alle condizioni di semplicità e di parsimonia, che per ragioni di economia debbono essere imposte alle basi fondamentali della scienza. Esse sono chiare, lucide e non possono quindi lasciar sussistere alcun dubbio, nè rispetto al loro significato, nè rispetto alla loro origine, nè rispetto a sapere se esse esprimono una verità d'esperienza o una convenzione arbitraria.

6. Come giudizio complessivo possiamo dire che il genio di Newton ha trovato quali erano i concetti e i principii *abbastanza sicuri* per servire di base alle ulteriori costruzioni. Fu costretto davanti ai suoi contemporanei, in gran parte per

la difficoltà e la novità del soggetto, ad una grande prolissità e quindi ad una presentazione frammentaria; ed è per questo, per esempio, che egli enuncia spesse volte la stessa proprietà dei fenomeni meccanici. D'altra parte si può provare che egli stesso non aveva una nozione perfettamente chiara del senso e specialmente dell'origine dei suoi principii; ma ciò non getta la più piccola ombra sullo splendore del suo genio intellettuale. Chi deve conseguire un punto di vista nuovo non può naturalmente possederlo *a priori;* colla stessa sicurezza, nella stessa integrità di chi lo riceve senza fatica. La sua opera è assai grande, se egli ha trovato le verità, sulle quali possiamo fondarci; ciascuna nuova conseguenza permetterà infatti un nuovo esame, un nuovo controllo, un'allargamento dell'orizzonte, la clarificazione del punto di vista. Come il generale d'armata, il grande inventore non può fare un'inchiesta minuziosa sul diritto, ch'egli ha di occupare qualche nuova posizione ch'egli conquista. La grandezza del problema da risolvere non lascia il tempo di far ciò. Ma più tardi il caso è differente. Newton poteva aspettare due secoli per procedere all'esame più serrato e alla conferma dei fondamenti della sua opera. In epoche di maggior tranquillità scientifica i principii possono offrire infatti maggiore interessamento filosofico delle costruzioni che si sono fabbricate su esse. Allora si presentano le questioni della specie di quelle, che formano l'argomento di questo libro; e non pensiamo di avere apportato altra cosa all'infuori di una debole contribuzione alla loro soluzione. Dunque ci associamo volontieri agli illustri fisici W. Thomson e Tait nel rispetto e nell'ammirazione che essi hanno per Newton; ma non possiamo comprendere come ancora oggi essi considerino le dottrine newtoniane come le migliori e le più filosofiche.

VII. *Esame retrospettivo dello sviluppo della dinamica.*

1. Il periodo di sviluppo della dinamica fu inaugurato da Galileo, continuato da Huygens e chiuso da Newton. Esaminandolo complessivamente si riconosce che esso si può riassumere in due punti principali: il fatto che i corpi mediante una mutua azione si comunicano fra loro le *accelerazioni* che dipendono dalle circostanze speciali e materiali, ed il fatto che vi sono delle *masse*. Il riconoscimento di questi fatti è incorporato in un gran numero di proposizioni, ma vi è in ciò una ragione puramente storica: essi non furono acquistati in una sola volta, ma lentamente ed a grado a grado. Un *solo* gran fatto fu in realtà saldamente stabilito. Diverse coppie di corpi determinano su se stessi, ed indipendentemente l'uno dall'altro, delle coppie di accelerazioni tali, che le due accelerazioni di una medesima coppia sono in un rapporto invariabile, che caratterizza la coppia corrispondente di corpi. Fu impossibile, anche al genio intellettuale di Galileo, di Huygens e di Newton, di concepire questo fatto in una volta; non si può riconoscere che a poco a poco, come lo si vede nella legge della caduta dei gravi, nella legge particolare d'inerzia, nel principio del parallelogramma delle forze, nel concetto di massa, ecc. Presentemente possiamo senza difficoltà alcuna comprendere l'*unità* di questo *fatto* nel suo complesso e solo le necessità pratiche della comunicazione possono giustificare la sua presentazione frammentaria — poichè questa presentazione ordinariamente si fa in parecchie proposizioni, il cui numero è determinato da ciò che si potrebbe chiamare il gusto scientifico. Ci convinceremo, del resto, riferendoci alle spiegazioni che abbiamo date sulle nozioni di tempo, d'inerzia, ecc., che in realtà l'integrità del fatto in questione non è stata ancora appieno riconosciuta sotto tutti i suoi aspetti.

Come l'ha detto espressamente Newton, questo punto di vista non ha nulla in comune con le " cause ignote „ dei fenomeni della natura. Ciò che presentemente in meccanica si chiama *forza*

non è un principio nascosto nel fenomeno, ma invece un fatto, una circostanza di moto che può esser misurato: il prodotto della massa per l'accelerazione. Anche quando si parla di attrazione o di repulsione dei corpi non è necessario di pensare a qualche causa nascosta dei fenomeni; la parola *attrazione* non serve ad altro che a ricordare la *similitudine del fatto*, che esiste fra il fenomeno determinato dalla circostanza del moto e il risultato di un impulso volontario. In questi due casi si verifica un vero moto, o, quando questo moto è distrutto da un'altra circostanza motrice si verifica una pressione, una distorsione od un altro fenomeno.

2. Il lavoro che appartiene propriamente al genio consiste qui nell'osservazione della dipendenza di certe determinanti parziali dei fenomeni meccanici. L'enunciato formale ed esatto di questa dipendenza fu al contrario il frutto del lavoro circospetto, che creò i diversi concetti ed i diversi principii della meccanica. Noi possiamo determinare il vero valore e il significato di questi principii e concetti solo coll'investigazione della loro origine storica. Inoltre questa ricerca mostra chiaramente, che talvolta le circostanze accidentali han dato al processo dello sviluppo della scienza una direzione speciale, mentre altre circostanze egualmente possibili avrebbero obbligato la scienza a procedere su tutt'altra via. Ora ne daremo un esempio.

Prima di fare l'ipotesi della dipendenza ben nota tra la velocità acquisita e la durata della caduta e di sottoporla all'esperienza, Galileo fece un'altra ipotesi. Come lo si è detto più sopra, egli suppose che le velocità acquistate fossero proporzionali ai cammini percorsi. Egli immaginò di avere stabilito, mediante un ragionamento sbagliato, di cui si è pure parlato, che questa ipotesi conduceva ad una contraddizione. Il suo ragionamento era questo: poichè la velocità finale conseguita al termine di un cammino doppio è doppia, la durata del percorso di questo cammino doppio sarà la stessa di quella del percorso del cammino semplice; ma siccome quest'ultimo è forzatamente percorso nello stesso tempo, poichè esso è la prima metà dello spazio doppio

considerato, la seconda metà dovrà essere descritta istantaneamente (in una durata non misurabile). Quindi ne risultava facilmente che la caduta dei gravi doveva essere in generale istantanea.

L'errore è manifesto. Galileo non era naturalmente versato nelle integrazioni mentali; non possedeva alcun metodo e perciò doveva necessariamente cadere in errore anche quando le relazioni fossero poco complicate. Indichiamo con s il cammino e con t il tempo. Nell'odierno linguaggio l'ipotesi di Galileo si esprimerebbe coll'equazione $\frac{ds}{dt} = as$, che dà $s = Ae^{at}$, in cui a è una costante sperimentale ed A una costante d'integrazione. Questa conseguenza dell'ipotesi è intieramente differente da quella che ha tratto da essa Galileo. È vero che questo risultato non è confermato dall'esperienza ed è probabile che Galileo avrebbe trovato assai strana questa condizione generale del moto, che s sia differente da o per $t = o$; ma in se stessa non è contradditoria.

Supponiamo che Keplero siasi posta la stessa questione. Galileo avrebbe sempre ricercato la soluzione più semplice ed avrebbe subito abbandonato un'ipotesi, che non avesse rivestito questo carattere di semplicità; ma la natura intellettuale di Keplero era totalmente differente. La storia della scoperta delle leggi del moto dei pianeti fa vedere che egli non temeva la complessività delle ipotesi e che egli raggiunge il suo scopo con successive e graduali modificazioni di queste ipotesi. È assai verosimile che, dopo aver riconosciuto che l'ipotesi $\frac{ds}{dt} = as$ non era conveniente, Keplero avrebbe messo alla prova un certo numero di altre ipotesi e, fra queste, probabilmente anche l'ipotesi esatta:

$$\frac{ds}{dt} = a\sqrt{s}.$$

Ma allora il processo di sviluppo della dinamica sarebbe stato del tutto diverso.

Fu solo gradatamente e con gran difficoltà che venne riconosciuta l'importanza scientifica del concetto di " lavoro „; e vediamo che questo fatto ha semplicemente per causa la circostanza storica accidentale, di cui ora si è parlato. Il caso ha fatto sì che la dipendenza fra la velocità ed il tempo fosse scoperta per la prima; e si ebbe per risultato che la relazione $v = gt$ apparisse come primordiale e la relazione $s = \frac{1}{2} gt^2$ come immediatamente successiva, mentre che la relazione $gs = \frac{1}{2} v^2$ sembrò una conseguenza lontana. Introducendo il concetto di massa (m) e di forza (p) con $p = mg$, si ottengono moltiplicando per m le tre equazioni pendenti:

$$mv = pt\ ,\ ms = \frac{1}{2} pt^2\ , ps = \frac{1}{2} mv^2,$$

che sono le equazioni fondamentali della meccanica. I concetti di *forza* e di *quantità di moto* devono dunque necessariamente sembrare più primordiali che quelli del *lavoro* (ps) e di *forza viva* (mv^2); quindi non bisogna meravigliarsi di ciò che si cercò, per conseguenza, a sostituire, ciascuna volta che lo si incontrerebbe, il concetto di lavoro con i concetti storicamente più antichi. Tutta la disputa dei *Cartesiani* e dei *Leibniziani*, che fu in qualche modo sviluppata per la prima volta da D'Alembert, qui trova la sua spiegazione compiuta.

Giudicando imparzialmente, si ha esattamente lo stesso diritto di ricercare tanto la dipendenza tra la velocità acquistata ed il tempo, quanto la dipendenza fra la velocità acquistata e il cammino, e di rispondere a queste due questioni coll'esperienza. La prima conduce al principio sperimentale seguente: due corpi dati, messi in presenza l'uno dell'altro, si comunicano in tempi dati aumenti di velocità determinati. La seconda questione ci insegna che corpi dati, messi in presenza l'uno dell'altro, si comunicano per spostamenti reciproci determinati aumenti di velocità determinati. Queste due proposizioni sono egualmente fondate e possono egualmente considerarsi primordiali.

L'esattezza di questo modo di vedere è stata dimostrata presentemente dall'esempio di I. R. Mayer. Mayer era uno spirito moderno dello stampo di Galileo, scevro da qualsiasi influenza scolastica; indipendentemente s'incamminò nella seconda via, e così fece fare alla scienza dei progressi, a cui le scuole non pervennero che più tardi in un modo ancora meno completo e meno semplice. Per Mayer il concetto fondamentale è quello di lavoro. Egli chiama forza ciò che si denomina lavoro nella meccanica delle scuole. L'errore ch'egli fa consiste nel credere che il suo metodo sia il solo esatto.

3. È egualmente lecito considerare la *durata della caduta* o *l'altezza della caduta* come determinante della velocità. Se fissiamo l'attenzione sulla prima circostanza, la forza si presenta come concetto primitivo, e il lavoro come concetto derivato; se si ricerca invece subito l'influenza della seconda circostanza, il lavoro ci appare come concetto primordiale. Trasportando ai fenomeni più complicati le nozioni acquistate con la considerazione della caduta dei gravi, si riconoscerebbe che la forza dipende dalla distanza dei corpi, cioè che essa è una funzione $f(r)$ di questa; il lavoro eseguito in un percorso dr è dunque $f(r) \cdot dr$. Il secondo metodo fa vedere che il lavoro è una funzione $F(r)$ della distanza e la forza allora è nota solo sotto la forma $\frac{dF(r)}{dr}$, cioè come valore limite del rapporto $\frac{\text{incremento del lavoro}}{\text{incremento della distanza}}$.

Galileo preferì di seguire la prima di queste due vie, e così Newton. Huygens seguì piuttosto il secondo metodo senza porsi alcuna restrizione. Descartes rimaneggiò a suo modo le idee di Galileo; ma le sue contribuzioni sono senza importanza, paragonate con quelle di Newton e di Huygens; e la loro influenza si dileguò immediatamente. Secondo Huygens e Newton i due modi di pensare si confondono; la loro indipendenza e la loro equivalenza non furono sempre riconosciute; e questa confusione diede origine a molti errori, di cui si è già dato un esempio

nella disputa fra la scuola di Descartes e quella di Leibniz, riguardo alla misura delle forze. Sino a questi ultimi tempi i meccanici impiegavano l'uno o l'altro dei due metodi secondo la loro preferenza. Così le idee di Galileo-Newton furono coltivate dalla scuola di Poinsot; quelle di Galileo-Huygens dalla scuola di Poncelet.

4. Newton si servì quasi esclusivamente delle nozioni di forza, massa e quantità di moto. L'opinione ch'egli ebbe del valore del concetto di massa lo colloca al di sopra dei suoi predecessori e dei suoi contemporanei. Non venne in mente a Galileo che la massa e il peso fossero due cose distinte. Anche Huygens introdusse in tutti i suoi studii il peso invece della massa, per esempio nelle sue ricerche sul centro di oscillazione. Anche nel suo trattato “ *De percussione* „ parlò sempre del corpo maggiore “ corpus majus „ e del corpo minore “ corpus minus „, quando doveva dire massa maggiore e massa minore. I fisici non furono condotti a formare il concetto di massa fino a che non si osservò che la gravità poteva imprimere allo stesso corpo accelerazioni diverse. Questo fatto si notò per la prima volta nell'osservazione del pendolo di Richer (1671-1673), — da cui Huygens trasse subito la conseguenza esatta, — e nell'estensione delle leggi della dinamica ai corpi celesti. L'importanza del primo punto emerge nettamente dal fatto, che Newton stabilì per mezzo di esperienze sue proprie, fatte con pendoli formati di materiali diversi, la proporzionalità fra il peso e la massa nello stesso luogo della Terra (*Principia*, Lib. II, Sect. VI “ *De motu et resistentia corporum funependulorum* „). Questa osservazione che lo stesso corpo può ricevere accelerazioni differenti, dovute alla gravità, condusse anche Giovanni Bernoulli a fare per la prima volta una distinzione fra la massa e il peso (*Meditatio de natura centri oscillationis;* Opera omnia. Genevae et Lausannae, II, p. 168). Newton tratta dunque tutte le questioni di dinamica che hanno relazione coi corpi, che si trovano in presenza gli uni degli altri, mediante il concetto di forza, massa e quantità di moto.

5. Huygens seguì un'altro metodo nella risoluzione di questi problemi. Galileo sapeva già che, per la velocità acquistata, un corpo può risalire all'altezza da cui è caduto. Nel suo trattato: "*Horologium oscillatorium*," Huygens generalizzò questa proposizione così: Per la velocità acquistata nella caduta il centro di gravità di un sistema di corpi risale ad una altezza eguale a quella della sua caduta. Questa generalizzazione lo condusse a scoprire l'equivalenza del lavoro e della forza viva, per quanto i nomi per le quantità che figurano nelle sue formule siano stati introdotti solo più tardi.

Il principio del lavoro dato da Huygens fu accolto dai suoi contemporanei con generale diffidenza; essi si accontentarono di utilizzare i suoi brillanti risultati, ma cercarono sempre di sostituire altre dimostrazioni a quelle ch'egli aveva date. Anche dopo che Giovanni e Daniele Bernoulli ebbero esteso questo principio, il suo valore dipese sempre più dalla sua fecondità che dalla sua evidenza.

Noi vediamo che sempre le proposizioni di Galileo-Newton furono preferite a quelle di Galileo-Huygens a causa della loro semplicità e la loro evidenza in apparenza superiore. Non s'impiegarono le ultime che quando vi si era costretti, allorchè faticose considerazioni di particolari rendevano impossibile l'uso delle prime, come avvenne per il caso della teoria del moto dei fluidi di Giovanni e Daniele Bernoulli.

Ma se uno li considera più da vicino, i principii di Huygens e quelli di Newton si presentano sotto la stessa semplicità e la stessa evidenza. È anche naturale e semplice supporre che la velocità acquistata da un corpo sia determinata tanto dalla *durata* della caduta, quanto dall'*altezza* della caduta, ed in entrambi i casi la *forma* della legge deve essere data dalla *esperienza*. È egualmente esatto di prendere per punto di partenza l'una o l'altra delle relazioni

$$p\,t = m\,v \quad \text{o} \quad p\,s = \frac{1}{2}\,m\,v^2 .$$

6. Per potere intraprendere lo studio dei moti di parecchi corpi si è condotti nei due casi a fare una estensione che si presenta con lo stesso grado di certezza. Il concetto newtoniano di massa si giustifica col fatto che, se lo si abbandona, tutte le nostre leggi dei fenomeni cessano di esser vere, che noi dobbiamo subito aspettarci di essere in contraddizione colle nostre esperienze più comuni ed ordinarie, che tutta la fisonomia del nostro intorno meccanico ne è totalmente cambiata; ma la stessa osservazione si può fare per il principio di osservazione di Huygens. Se noi non accettiamo il teorema $\Sigma p s = \frac{1}{1} \Sigma m v^2$ dobbiamo ammettere che i corpi pesanti possono elevarsi mediante il loro proprio peso, e respingere tutte le leggi conosciute dalla meccanica. Abbiamo già parlato partitamente dei fattori istintivi, che entrano del pari nelle scoperte di questi due concetti.

Queste due nozioni si sarebbero naturalmente potute sviluppare assai più indipendentemente l'una dall'altra. Ma, siccome esse si sono trovate costantemente a contatto, non è da meravigliarsi se esse siano fuse in parte l'una coll'altra, e se quella di Huygens sembri meno completa. La forza, la massa e la quantità di moto bastarono interamente a Newton. Il lavoro, la massa e la forza viva avrebbero potuto anche bastare a Huygens. Ma Huygens non aveva conseguito il pieno possesso del concetto di massa, e per le ulteriori applicazioni questa dovè essere presa a prestito da un altro modo di vedere. Questo imprestito si sarebbe potuto evitare; se nella concezione newtoniana il rapporto delle masse si poteva definire come il rapporto inverso delle velocità, generate dalla stessa forza, in quella di Huygens poteva essere logicamente definito col rapporto inverso dei quadrati delle velocità generate dallo stesso lavoro.

Queste due concezioni considerano la dipendenza reciproca di aspetti differentissimi del *medesimo* fenomeno. La concezione di Newton è più completa, perchè essa ci informa riguardo al moto di ciascuna massa, ma perciò essa deve discendere a molti particolari. La concezione di Huygens fornisce una

legge per l'intero sistema. Essa è comoda sol quando il *rapporto delle velocità* delle masse sia stato previamente determinato, ma allora essa è assai comoda.

7. Così siamo condotti a vedere che nello svolgimento della dinamica, precisamente come nello sviluppo della statica, il nesso delle caratteristiche differentissime dei fenomeni meccanici richiamarono a differenti epoche l'attenzione degli investigatori. Si può considerare la quantità di moto di un sistema come determinata dalla forza, ma si può anche considerare la forza viva come determinata dal lavoro. La personalità dell'investigatore ha una gran parte nella scelta di queste caratteristiche. Gli argomenti, che abbiamo più sopra addotti, mostrano che è possibilissimo, che il sistema dei nostri concetti meccanici fosse stato diverso, se le prime ricerche relative alla caduta dei corpi fossero state fatte da Keplero, o se Galileo non si fosse sbagliato nelle sue prime speculazioni. D'altra parte per la comprensione storica di una scienza non avvi solo la conoscenza delle idee adottate e coltivate dai successori che sia importante; è anche assai interessante ed istruttivo di conoscere le idee transitorie degli investigatori, anche quando esse siano state abbandonate, anche quando esse sembrino essere errori. Lo studio storico del processo dello sviluppo della scienza è indispensabile, se non si vuole che l'insieme dei principî, che essa ha riunito, non degeneri a poco a poco in un sistema di cose acquisite, che non si comprendono che a metà, o anche interamente in un sistema di meri *pregiudizî*. Non solamente questa ricerca storica fa comprender meglio lo stato odierno della scienza; ma mostrando che essa è in parte *convenzionale* ed *accidentale*, mette in evidenza nuove possibilità. Da un punto di vista superiore, cui si arriva per vie diverse, si può abbracciare con lo sguardo più libero la totalità della scienza, e riconoscere vie non ancora percorse. (V. appendice 7).

In tutte le proposizioni della dinamica che abbiamo discusse, la velocità ha una parte preponderante. Secondo noi la causa di questo fatto è che, se vi si osserva più da vicino ciascun corpo

è in relazione con tutti gli altri, e che quindi è impossibile considerare un corpo — e per conseguenza parecchi corpi — come completamente isolati. La nostra incapacità di considerare il tutto in *una volta*, ci obbliga a considerare un piccolo numero di corpi, ed a fare provvisoriamente *astrazione* degli altri sotto molti rapporti; od arriviamo a ciò mediante l'introduzione della nozione di velocità, che contiene quella di tempo. Non è impossibile che un giorno *leggi integrali*, per adoperare una espressione di C. Neumann, sostituiscano le *leggi elementari*, che formano la meccanica attuale, e che noi possiamo così avere una conoscenza diretta della dipendenza reciproca delle posizioni dei corpi. Allora il concetto di *forza* sarà divenuto superfluo.

IX. *La meccanica di Hertz.*

1. Il capitolo precedente, scritto nel 1883, contiene specialmente nel suo paragrafo VII il programma, senza dubbio assai generale, di una meccanica futura. La meccanica di Hertz (1), pubblicata nel 1894, segna un progresso essenziale nell'indirizzo sopra indicato. I limiti della nostra opera non ci permettono di dedicare in questo libro che ben poche linee per dare una giusta idea del suo valore. Qui non abbiamo da esporre un nuovo sistema di meccanica, ma semplicemente lo svolgimento delle concezioni, che riguardano questa scienza. Tutti quelli che hanno qualche interessamento per essa devono conoscere il libro di Hertz.

2. La critica dell'esposizione odierna della meccanica, che Hertz pone a capo del suo libro, contiene osservazioni assai interessanti sulla teoria della conoscenza; ma il nostro punto di vista, che non si accorda nè con quello di Kant, nè colle concezioni meccanico-atomiche della maggior parte dei fisici, ci ob-

(1) Hertz, *Die Principien der Mechanick in neuem Zusammenhange dargestellt.* Lipsia, 1894.

bliga evidentemente a modificarle. Le " immagini „ (o forse meglio i concetti) che ci facciamo degli oggetti, devono essere scelti in modo che le loro " conseguenze mentali necessarie „ corrispondano alle " conseguenze naturali necessarie „ degli oggetti stessi. Si deve esigere da questi concetti che essi siano logicamente ammissibili, vale a dire non contradditorii in se stessi; — che essi siano inoltre giusti — vale a dire che essi corrispondano alle relazioni degli oggetti fra loro, — ed infine che essi siano pratici e contengano il meno possibile di superfluo. I nostri concetti si sono infatti *creati essi stessi;* ma questa creazione non è per ciò interamente *arbitraria;* essa ha la sua radice in una *lotta per l'adattamento* al nostro ambiente sensibile. La concordanza reciproca dei concetti è una esigenza logica necessaria, esigenza, che è anche la sola che conosciamo. La credenza in una necessità naturale non si mostra che a partire dal momento, in cui le nostre concezioni della natura sono sufficientemente adattate per far concordare le loro conseguenze coi fenomeni. Ma questa ipotesi dell'adattamento sufficiente delle nostre cognizioni può essere infirmato a ciascun istante dall'esperienza. L'esigenza di comodità di Hertz coincide col nostro criterio di economia.

Hertz fece alla meccanica di Galileo e di Newton e specialmente al concetto di forza il rimprovero di mancare di chiarezza (pp. 7, 14, 15). Questo rimprovero è secondo il nostro modo di vedere giustificato solo rispetto alle esposizioni di questo sistema, le quali sono difettose dal punto di vista logico, e di cui Hertz deve senza dubbio aver conservato un cattivo ricordo, avanzo dei primi tempi de' suoi studî universitari. Egli non mantiene del resto completamente questo rimprovero, e per lo meno l'attenua in seguito (pag. 9-47). Non si può pertanto attribuire ad un *sistema* il difetto di logica di un'esposizione *individuale* di questo. Non è oggi certamente permesso (pag. 7) di parlare di una forza " unilateralmente „ effettiva o a proposito della forza centrifuga, " di tener conto due volte dell'azione d'inerzia, una volta come massa ed una volta come forza „. Non è d'altronde

neppure necessario che Newton e Huygens fossero stati già su questo punto di una chiarezza perfetta. È appena permesso di paragonare le forze a ruote superflue (*leergehende Räder*) o di dire che è spesso impossibile di dimostrare la loro esistenza sensibile. In tutti i casi le forze hanno su questo punto un vantaggio sulle " masse nascoste e sui " moti nascosti ". Quando un pezzo di ferro giace sopra una tavola, vi sono due forze in equilibrio: il peso del ferro e l'elasticità della tavola, e si può facilmente *mettere* queste due forze in *evidenza*.

Hertz trattò anche la meccanica energetica molto più meccanicamente che non convenga. Egli fa all'uso dei principii del minimo l'obbiezione, che questi principii contengono l'espressione di uno *scopo*, di una *finalità*, e suppongono una tendenza verso il *futuro*. Si vedrà più tardi in altri luoghi di questo libro, che i principii del minimo hanno un significato semplice tutto differente dalla circostanza della finalità. Ogni meccanica d'altronde è in relazione coll'idea del futuro, poichè deve necessariamente servirsi delle nozioni di *tempo*, di *velocità*, ecc.

3. Se sembrasse difficile accettare in tutta la sua severità questa critica del sistema attuale di meccanica, la concezione nuova e originale di Hertz non deve essere per questo meno considerata come un grandissimo progresso. Hertz si propose di introdurre nelle formule solo quelle grandezze che possono essere effettivamente *osservate*, e con questo scopo essendo eliminato il concetto di forza, egli non si serve che dei concetti di tempo, di spazio e di massa. Non fa uso che di un principio fondamentale unico, che può essere considerato come una combinazione del principio d'inerzia e del principio del minimo sforzo di Gauss. Le masse libere si muovono uniformemente in linea retta. Se esse sono assoggettate a legami qualunque, il principio di Gauss richiede che esse si scostino il meno possibile dal moto rettilineo uniforme. Il loro moto *reale* è più vicino al moto *libero* di ogni altro moto *immaginabile*. Hertz dice che essendo dati i loro legami, il moto delle masse è *il più rettilineo possibile*. Quando una massa si scosta in un modo qualunque da

questo moto rettilineo uniforme, Hertz non attribuisce questo scostamento a una *forza*, ma sibbene a un *legame* (indeformabile) con altre masse. Quando questi non sono visibili, Hertz immagina masse *nascoste*, animate da moti *nascosti*. Tutte le forze fisiche si suppongono essere l'effetto di legami di questa specie. Nella sua esposizione la forza, la funzione di forze, l'energia non sono che concetti ausiliari ed accessori.

Riprendiamo ad uno ad uno i punti più importanti di questa teoria per cercarne le origini. Si può arrivare come segue all'idea di eliminare la nozione di forza: nella meccanica di Galileo e di Newton è naturale di sostituire ogni legame con forze, che determinano il moto, che esso impone. Ma si può procedere altrimenti, e rappresentarsi tutto ciò, che ci sembra una forza, come l'effetto di un legame. La prima di queste concezioni prevalse negli antichi trattati; essa è storicamente la più semplice e la più comune. Hertz dà la preferenza alla seconda. Nei due casi, nell'ipotesi delle forze ed in quella dei legami, *il fatto della dipendenza* reciproca dei moti delle masse, per ogni conformazione istantanea del sistema, si esprime mediante equazioni differenziali lineari fra le coordinate di queste masse. Si può dunque considerare l'esistenza di quest'ultime equazioni come il *punto essenziale*, come il punto sperimentalmente stabilito. La fisica si abitua d'altronde gradatamente a considerare come il suo vero scopo la descrizione dei fatti mediante equazioni differenziali (1). La possibilità di un *uso pratico generale* delle espressioni matematiche di Hertz si trova così stabilita senza che sia d'altra parte necessario d'avventurarsi nell'interpretazione ulteriore delle forze o dei legami.

Il principio fondamentale di Hertz si può considerare come una legge d'inerzia generalizzata e modificata dal moto delle masse. Nei casi semplici questa concezione s'acquista facilmente; è possibile ch'essa si sia spesso imposta. Nel cap. III di questo

---

(1) Vedi a questo proposito il cap. V, n. I, § 1 e seg.

libro è considerato il teorema della conservazione del moto del centro di gravità e quello della conservazione delle aree come generalizzazioni della legge d'inerzia. Ora, secondo il principio di Gauss, i *legami* delle masse determinano per ciascuna di esse un minimo di scostamento rispetto al moto che essa prenderebbe da sè stessa. Perciò se si concepiscono *tutte le forze* come effetti di legami si giunge alla legge fondamentale di Hertz. Se si sopprimono tutti i legami, gli elementi *ultimi*, che restano, sono masse isolate, il cui moto segue la legge d'inerzia. Il legame dunque determina un moto, che si scosta il meno possibile dal moto rettilineo uniforme.

Gauss aveva già assai nettamente affermato l'impossibilità di scoprire un principio meccanico essenzialmente (materialmente) nuovo. In sostanza la *forma* sola del principio di Hertz è nuova, poichè esso è identico alle equazioni di Lagrange. La condizione del minimo, che contiene, non si riferisce ad un fine enigmatico; bisogna attribuirgli lo stesso senso che a tutte le leggi del minimo: si verifica ciò che è dinamicamente determinato (cap. III). La deviazione dall'attuale moto non è dinamicamente determinata; perciò non si produrrà; il moto reale è dunque *ben* determinato (eindeutig), o meglio, esso è determinato *in un modo unico* (einzigartig), secondo l'espressione così esatta di Petzoldt (1).

È appena necessario fare osservare espressamente, che questo sistema formale di meccanica matematica, non solo non spiega i problemi fisico-meccanici, ma invece li *trascura* intieramente. Le masse libere si muovono uniformemente in linea retta. Le masse collegate fra loro, animate di velocità differenti in grandezze e direzioni, modificano reciprocamente le loro velocità; in

(1) Petzoldt, *Das Gesetz der Eindeutigkeit* (*Vierteljahrsschrift für wissensch. Philos.*, XIX, p. 146; v. specialmente p. 186). A questo riguardo conviene di citare anche R. Hencke che nella sua Memoria (*Ueber die Methode der kleinsten Quadrate,* Lipsia, 1894), si avvicina alle concezioni di Hertz.

altre parole esse determinano reciprocamente delle accelerazioni le une sulle altre. Questi principii prettamente fisici s'introducono *per la stessa ragione*, che i principii puramente geometrici ed aritmetici nello sviluppo formale della scienza. Questo tanto è impossibile, se si partisse solo dalla geometria e dal numero, poichè una cosa determinata in un modo unico dal punto di vista matematico e geometrico, non è per ciò ben determinata dal punto di vista meccanico. Ora i paragrafi precedenti di questo capitolo mostrano abbastanza che questi principii fisici, di cui parliamo, non sono di una comprensione immediata, e che non è nemmeno facile di stabilire con qualche esattezza il loro significato preciso.

4. Nella bella costruzione ideale della meccanica, che Hertz ha svolto, gli elementi fisici sono talmente raccolti e ridotti ad una espressione così semplice, che sono *in apparenza* appena percettibili. Descartes, se ora vivesse, riconoscerebbe senza dubbio il suo proprio ideale nella meccanica di Hertz, ancora meglio che in quella di Lagrange, cioè nella " geometria analitica a quattro dimensioni ". Descartes, nella sua opposizione contro le quantità nascoste della filosofia scolastica, rifiutò di attribuire alla materia altre proprietà oltre l'*estensione* ed il *moto*; e voleva fondare la meccanica e la fisica intieramente sopra una geometria del moto, non ammettendo altre ipotesi all'infuori dell'ipotesi iniziale di un moto *indistruttibile*.

5. Non è difficile di rendersi conto delle circostanze psicologiche, che hanno condotto Hertz al suo sistema. Dopo aver dimostrato che le azioni elettriche e magnetiche *a distanza* erano conseguenza dei moti in un mezzo, era naturale che Hertz cercasse di stabilire la stessa cosa per le forze di gravitazione; e, se era possibile, per *tutte* le forze. Si presenta allora naturalissima l'idea di vedere se sia possibile di eliminare il concetto di forza in generale. Non si può negare che quando noi, mediante un'unica completa rappresentazione, possiamo comprendere tutti i fenomeni, che avvengono in un mezzo, insieme con le grandi masse contenute in essa, i nostri concetti sono in un ordine affatto differente da quello, in cui si troverebbero,

quando noi conoscessimo solo le relazioni di queste masse, prese isolatamente, per ciò che riguarda l'accelerazione. Qnesto sarà volentieri concesso anche da quelli che son convinti che l'azione fra le parti a contatto non è più intelligibile dell'azione a distanza. Tale tendenza è altresì quella della intiera scienza fisica odierna.

Quando non si vuole semplicemente accettare in modo generale l'ipotesi delle masse e dei moti occulti, ma si cerca invece di utilizzarla praticamente nei problemi *particolari,* si deve, almeno nello stato presente delle nostre conoscenze fisiche, giungere a finzioni così straordinarie e spesso fantastiche, che l'uso delle accelerazioni *date* sarebbe di gran lunga preferibile. Ad esempio si supponga che una massa m si muova uniformemente con una velocità v in un cerchio di raggio r, moto che ordinariamente si riferisce ad una forza centripeta $\frac{mv^2}{r}$, si potrà immaginare questa massa m invariabilmente connessa ad una massa eguale, di velocità opposta, posta alla distanza $2r$. La spinta centripeta di Huygens sarebbe un altro esempio della sostituzione di un legame ad una forza. Come *programma ideale*, la meccanica di Hertz è più semplice e più bella e di una unità maggiore della meccanica ordinaria, ma questa la supera nelle applicazioni, come Hertz stesso ebbe a riconoscerlo (pag. 47) con quella grande sincerità che lo caratterizza (1).

X. *Esame di alcune obbiezioni.*

1. Le vedute che io ho esposto nei due primi capitoli di questo libro erano già state maturate da tempo. Sulle prime furono quasi senza eccezione bruscamente respinte; e solo gradatamente guadagnarono amici. Io ho esposto originariamente

(1) Cfr. anche J. Classen, *Die Principien der Mechanik bei Hertz und Boltzmann* (" Jahrb. d. Hamburg. wissensch. Anstalten, XV, p. 1, Amburgo, 1898).

in nove pagine in ottavo tutti i caratteri essenziali della mia " Meccanica „ in una breve comunicazione, che aveva per titolo: *Sulla definizione di massa.* Sono le proposizioni contenute nel cap. II, n. VII, § 1 di quest'opera. La comunicazione fu respinta dagli *Annalen* di Poggendorff, ed essa non comparve fino al successivo anno (1868) nel *Repertorium* di Carle. In una comunicazione, fatta nel 1871, io delineai il mio punto di vista epistemologico nelle scienze della natura in generale e con speciale applicazione alla fisica. Il concetto di causa è qui sostituito dal concetto di funzione; la determinante della dipendenza dei fenomeni fra loro, la esposizione economica dei fatti reali, è proclamato come l'oggetto ed i concetti fisici come un mezzo ad un fine soltanto. Io presentemente non mi curavo di sobbarcare qualche editore della responsabilità per la pubblicazione del contenuto di questa comunicazione, e la stessa fu pubblicata in un opuscolo separato nel 1872 (1). Nel 1874, quando Kirchhoff nella sua " Meccanica „ diede in luce la sua teoria di " descrizione „, e di altre dottrine, chè erano analoghe in parte solo alle mie vedute, e tuttavia suscitarono l' " universale stupore „ dei suoi colleghi, io mi rassegnai al mio fato. Ma la grande autorità di Kirchhoff si fece a poco a poco sentire, e la conseguenza di ciò era anche senza dubbio che nel suo comparire nel 1883 la mia " Meccanica „ non suscitò tanta sorpresa. In vista del grande appoggio dato da Kirchhoff, è del tutto per me indifferente che il pubblico avesse riguardato ed in parte faccia ancora così, la mia interpretazione dei principii della fisica come una continuazione ed elaborazione delle vedute di Kirchhoff; mentre infatti la mia non era solo più antica rispetto alla data della pubblicazione, ma anche più radicale. L'accordo col mio punto di vista sembra nel suo complesso essere aumentato, ed a poco a poco estendersi in più ampie proporzioni della mia opera. Per avversione a tutte le polemiche io preferisco di astenermi da

---

(1) *Erhaltung der Arbeit*, Praga, 1872.

ogni discussione ed aspettare in silenzio la parte che per lo avvenire è riserbato alle idee sviluppate in quest'opera. Ma non posso non rendere edotto il lettore delle opposizioni che esse sollevano, e devo fargli vedere come potrà, mediante questo libro, orientarsi fra esse, astrazione fatta in oltre da ciò che la stima, che si ha per un contradditore, richieda che si considerino le sue obbiezioni. Questi contradditori sono molti e di ogni maniera: storici, filosofi, metafisici, pedagogisti, matematici e fisici. Io non ho alcuna pretesa di aspirare, in modo rilevante, a qualcuno di questi titoli. Qui non posso che presentar di nuovo le obbiezioni più importanti e rispondere ad esse coll'intendimento di chi desidera vivamente e sinceramente di far comprendere lo sviluppo del pensiero fisico, felice di potere ad un tempo venire in aiuto di altri nel trovare la loro via e nel formarsi un'opinione personale.

P. Volkmann nei suoi scritti sulla critica della conoscenza nelle scienze fisiche (1) manifesta una tendenza opposta alla mia; non solo per le molte obbiezioni di punti speciali, ma sopratutto per la sua fedeltà agli antichi e la sua predilezione per le loro idee. Solo su questo ultimo punto dissentiamo realmente, poichè spesso il suo modo di vedere ha molto di comune col mio. Egli accetta l' " adattamento del pensiero ", il " principio della economia " e quello della " comparazione ", quantunque la sua esposizione differisca dalla mia pei caratteri individuali e vari per la terminologia. D'altronde trovo che il principio importante dell' " isolamento " e della " superposizione " è chiaramente messo in evidenza ed esattamente caratterizzato; anche io l'accetto volontieri. Accetto anche volontieri che i concetti, poco determinati in principio, devono subito subire un " consolidamento retroattivo " mediante una " circolazione della conoscenza " od una

(1) *Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft*, Lipsia, 1896. — *Ueber Newton's Philosophia naturalis*, Königsberg, 1898. — *Einführung in das Studium der theoretischen Physik*, Lipsia, 1900. In seguito citeremo gli ultimi scritti.

" oscillazione „ dell'attenzione. D'accordo in questo con Volkmann ho sempre riconosciuto che, se le consideriamo da questo punto di vista, le contribuzioni di Newton sono indubbiamente le migliori possibili ai suoi tempi. Ma non posso ammettere la sua opinione, quando con W. Thomson e Tait trova che l'esposizione di Newton può servire ancora di modello, ad onta delle esigenze dei tempi odierni, che sono sostanzialmente cambiati rispetto alla critica della conoscenza. Io penso al contrario che il processo di consolidazione condurrà sempre ad un sistema, che non differirà dal mio, all'infuori che nei punti secondarii. Io segno con vero piacere le deduzioni chiare e positive di G. Heymans (1); ma il mio punto di vista antimetafisico, sia esso o no legittimo, mi separa nettamente da lui. Importanti *divergenze di particolari* mi mettono in contraddizione con Höfler (2) e Poske (3). Sono al contrario perfettamente d'accordo con Petzoldt (4) rispetto ai principii, e ciò che ci divide è costituito da questioni di poca importanza. Per riguardo verso il lettore mi asterrò dal rispondere in particolare a numerose considerazioni di altri critici, che si fondano sugli argomenti di quelli che abbiamo ora citato o su ragioni analoghe. Basterà spiegare la *natura della divergenza*, mettendo in evidenza alcuni punti importanti.

2. Sembra che la mia definizione di massa sia ancora sempre molto difficile ad essere accettata. Streintz le ha rimproverato di non essere fondata che sulla gravitazione (vedi cap. II, n. V, § 3°); ma ciò era già espressamente escluso nella mia prima esposizione (1868). Ciò non impedisce che si riprenda continuamente questa obbiezione, come lo ha fatto ancora recente-

---

(1) *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens*, Lipsia, 1894.

(2) *Studien zur gegenwärtigen Philosophie der mathematischen Mechanik*, Lipsia, 1900.

(3) *Vierteljahrsschr. f. wissenschaftl. Philosophie*, Lipsia, 1884, p. 385.

(4) *Das Gesetz der Eindeutigkeit* (" Vierteljahrsschr. f. wissenschaftliche Philosophie, „ XIX, pag. 146).

mente Volkmann (*op. cit.*, p. 18). La mia definizione tien conto unicamente del fatto che i corpi trovandosi in relazioni reciproche, sia mediante le azioni a distanza, sia mediante i legami rigidi od elastici, determinano l'uno sull'altro cambiamenti di velocità (accelerazioni). È inutile di saperne di più per potere stabilire le definizioni con tutta sicurezza senza timore di fabbricare sulla sabbia. Höfler erra quando dice (*op. cit.*, p. 77) che la mia definizione ammette tacitamente che *una sola e stessa forza* agisce sulle due masse: al contrario essa non presuppone in nulla la nozione di forza che non è formulata, che dietro il concetto di massa, e che allora ci dà subito, sfuggendo a tutti i circoli viziosi di Newton, il principio di eguaglianza dell'azione e della reazione. Questa disposizione ci evita di appoggiare sopra un altro un sistema di concetti, che cede sotto il primo; e precisamente sta in questo, secondo il mio modo di vedere, l'unico scopo legittimo della circolazione e della oscillazione di Volkmann. Se le masse sono definite mediante le accelerazioni, è facile di trarne concetti in *apparenza nuovi*, come, ad esempio, la capacità d'azione o la capacità dell'energia di moto (Höfler, *op. cit.*, p. 70). Se si vuole un concetto di massa, che permetta di trattare i problemi dinamici, riterrò sempre fermamente che ciò deve essere un concetto *dinamico*. Sulla quantità di materia in sè la dinamica non può essere edificata; tutto al più può esserle arbitrariamente appropriata. La quantità di materia in sè non è mai una massa, ma non è nemmeno una capacità calorifica, nè un calore di combustione, nè un valore nutritivo, ecc. Anche “ la *massa* „ non è una rappresentazione termica, ma unicamente *dinamica*. Ma le diverse grandezze fisiche sono proporzionali fra loro. Riunendo due o tre corpi, aventi ciascuno l'unità di massa, si forma un corpo, la cui massa ha il valore 2 o 3, e ciò avviene mercè la definizione dinamica; si verifica la stessa cosa per la capacità calorifica, mercè la definizione termica. Il bisogno istintivo di una rappresentazione comune (secondo l'espressione di Höfler, *op. cit.*, pag. 72) non sarà conte-

stato da alcuno; ciò per altro basta per l'uso ordinario. Dalla proporzionalità di queste grandezze fisiche particolari possiamo precisamente dedurre un primo concetto scientifico di " quantità di materia, " lungi di poter costruire su quest'ultimo il concetto di massa. La misura della massa mediante il peso è una conseguenza naturale della mia definizione, quando nella concezione ordinaria della massa si deve o semplicemente supporre la misurabilità della quantità di materia mediante una stessa *unità dinamica* (v. cap. II, n. V, §§ 2 e 6) ovvero dimostrare precedentemente mediante una ricerca particolare, che *pesi* eguali si comportano effettivamente in *tutte* le circostanze come masse eguali; io penso che sta di fatto che il concetto di massa è stato qui per la prima volta da Newton in poi sottoposto ad un'analisi critica particolareggiata. Gli storici, i matematici ed i fisici sembra che abbiano considerato questa questione poco importante e di una comprensione quasi immediata. Essa per lo contrario è di un'importanza fondamentale e merita l'attenzione dei miei avversari.

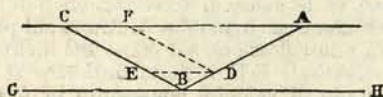
3. Molte obbiezioni sono state fatte alla mia esposizione della legge d'inerzia. D'accordo in questo punto con Poske (1884) io credo di aver dimostrato (1868) che è inammissibile di voler far discendere questa legge da un principio più generale, come per esempio quello di causalità, e questo modo di vedere presentemente va acquistando terreno (confr. Heymans, *op. cit.*, p. 432). È chiaro che non si può ritenere per evidente *a priori* un principio, la cui validità non è generalmente riconosciuta, che da sì poco tempo. Heymans (*op. cit.*, pag. 427) osserva anche con ragione, che era alla proposizione contraria che si attribuiva una certezza assiomatica da un certo numero di anni. Per lui la legge d'inerzia non sorpassa l'empirismo che in ciò, che la si riferisce ad uno spazio *assoluto,* e che come la sua opposta forma antica essa implica l'ipotesi di una *costante* nella condizione di un corpo abbandonato a sè stesso (*op. cit.*, pag. 433). Abbiamo discusso partitamente il primo punto; in quanto al secondo è psicologicamente assai intelligibile senza l'aiuto della metafisica; ricer-

chiamo le *permanenze* precisamente perchè esse sole ci offrono un aiuto intellettuale e pratico. Ma, allorchè la si esamina imparzialmente, questa *certezza assiomatica* si presenta sotto una luce singolare. Inutilmente si vorrebbe, con Aristotile, far credere ad una persona senza istruzione, che una pietra lanciata deve subito rimanere per sè stessa immobile, poichè non continua nel suo moto, che mediante la pressione dell'aria rimasta indietro. Ma non si presterà più fede al moto uniforme indefinito di Galileo. Al contrario la concezione di Benedetti, che ammette un “ *vis impressa* „ che va a poco a poco diminuendo, la quale appartiene anche all'epoca del pensiero indipendente e della emancipazione dei pregiudizi antichi, sarà accettata senza contestazione anche da un ignorante. Quest'ultima concezione è invero un'immagine diretta del fatto; mentre le altre due, idealizzando l'esperienza in direzioni opposte, sono prodotti del pensiero, del ragionamento tecnico professionale. D'altronde le altre due non producono l'illusione di sicurezza assiomatica, che presso uomini *istruiti,* di cui l'intiero sistema abituale di pensieri sarebbe messo a soqquadro dalla distruzione di questi elementi. Queste osservazioni mi sembrano spiegare psicologicamente in maniera soddisfacente il modo di comportarsi degli investigatori davanti alla legge d'inerzia, e mi sembra che io possa lasciar da banda la questione di sapere se bisogna dare a questa il nome d'assioma, di postulato o di proposizione. Heymans, Poske e Petzoldt sono d'accordo nel trovare in questa legge un lato empirico, ed un lato per cui essa supera l'empirico. Secondo Heymans (*op. cit.*, pag. 438) l'esperienza offre solo l'occasione d'impiegare una legge valida *a priori*. Poske crede che l'origine sperimentale non escluda la validità *a priori* (*op. cit.*, pp. 401-402). Petzoldt pure (*op. cit.*, pag. 188) deduce una parte della legge d'inerzia dall'esperienza, ma per l'altra parte egli la considera come data dal principio della determinazione univoca. Io non credo di trovarmi in contraddizione con Petzoldt, formulando le cose come segue: l'esperienza deve innanzi tutto insegnarci *quale* è la dipendenza reciproca che esiste fra i fenomeni. e *qual'* è la

circostanza determinante; e *non è che* l'esperienza che può illuminarci su questi punti. Se noi siamo convinti, che siamo stati sufficientemente istruiti a questo riguardo, allora consideriamo, poichè i dati sono sufficienti, che è inutile ricorrere a nuove esperienze: il fenomeno per noi è determinato, e veramente (poichè è solo in ciò che consiste in generale la determinazione) determinato in un modo unico. Così quando avrò dimostrato che i corpi determinarono gli uni sugli altri delle accelerazioni, io mi riprometterò una certezza esatta ogni volta, che tali corpi determinanti verran meno al moto uniforme in linea retta. In questo modo si ottiene la legge d'inerzia in tutta la sua generalità senza che occorra darne un enunciato speciale (ciò che fa Petzoldt), poichè ogni deviazione dalla uniformità e dalla linea retta presuppone un'accelerazione. Io credo di aver ragione nel ritenere che nel teorema delle forze determinanti delle accelerazioni e nella legge d'inerzia *lo stesso fatto sia espresso due volte* (v. cap. II, n. I, § 11). Ciò ammesso, la questione di sapere se l'uso della legge d'inerzia contenga o no una petizione di principio (Poske e Höfler) cade da sè stessa.

Un luogo del terzo dialogo di Galileo, che io ho integralmente citato nella mia Memoria: *Ueber die Erhaltung der Arbeit* (La conservazione dell'energia) secondo l'edizione di Padova 1744, tomo III, pag. 124 (1) m'ha permesso di comprendere in

---

(1) " Constat jam quod mobile ex quiete in A descendens per AB, gradus acquirit velocitatis juxta temporis ipsius incrementum; gradum vero in B esse maximum acquisitorum, et suapte natura immutabiliter impressum, sublatis scilicet causis accelerationis novae, aut retardationis; accelerationis inquam, si adhuc super extenso plano ulterius progrederetur; retardationis vero, dum super planum acclive BC fit reflexio; in horizontali autem GH aequabilis motus juxta gradum velocitatis ex A in B acquisitae in infinitum extenderetur ".

qual modo Galileo fosse senza dubbio giunto alla chiarezza nella sua comprensione della legge d'inerzia.

Immaginando un corpo che discende lungo un piano inclinato, e condotto su altri piani diversamente inclinati ascendenti, perfettamente levigati, si deve osservare subito il ritardo minore sui piani meno inclinati, e un ritardo nullo cioè un moto uniforme indefinito sul piano orizzontale. Wohlwill per il primo si è opposto a questo modo di vedere (cap. II, n. I, § 8), ed altri l'hanno seguito. Wohlwill osserva, insistendovi, che Galileo attribuiva ancora un significato speciale al moto circolare uniforme e al moto orizzontale, e che affezionatissimo alle rappresentazioni antiche, se ne emancipò solo a gran fatica. Certamente per uno storico, tutte le *fasi* dello sviluppo dei suoi grandi investigatori sono interessanti, ma *una* di esse può offuscarsi dirimpetto alle *altre*. Bisognerebbe essere un cattivissimo psicologo, e non conoscere neppur sè stesso, per non sapere quanto sia difficile liberarsi dalle opinioni ricevute, e come, dopo che uno se ne sia liberato, i resti delle concezioni antiche galleggino ancora nella coscienza, e causino delle ricadute, in casi particolari. Non dev'essere avvenuto diversamente per Galileo. Ma il punto, che desta maggiore interesse per il fisico, è precisamente *il primo lampo di una nuova concezione*, ed è questo che egli ricerca. Precisamente è questo primo lampo che io ho cercato e credo di averlo trovato ed opino che esso abbia lasciato la sua *traccia* nel luogo citato più sopra. Poske (*op. cit.*, pag. 393) e Höfler (*op. cit.*, pagg. 111, 112) credono di non poter sottoscrivere all'interpretazione che io ne do, poichè Galileo non si riferisce espressa-

---

(È già certo che il mobile scendendo dal riposo in A per AB acquista un grado di velocità, che aumenta secondo il tempo; il grado conseguito in B essendo massimo, e per sua natura invariabilmente impresso, se le cause di accelerazione o di ritardo sono soppresse; di accelerazione se il mobile continua sul piano prolungato; di ritardo se si fa una riflessione sul piano BC inclinato verso l'asta; ma, sul piano orizzontale GH il moto uniforme si estende all'infinito secondo il grado di velocità conseguito in A e B).

mente al caso limite del passaggio dal piano inclinato al piano orizzontale. Tuttavia Poske riconosceva che Galileo usa spesso il caso limite (passaggio al limite), e Höfler (*op. cit.*, pag. 113) ammette di aver dimostrato nella pratica dell'insegnamento l'efficacia didattica di questa spiegazione. Sarebbe assai sorprendente che Galileo, il quale può essere considerato come l'inventore di questo principio di continuità, non abbia applicato questo principio nella sua lunga carriera intellettuale a questo problema, che era per lui il più importante. È conveniente osservare ancora che il passo citato non fa parte del dialogo in italiano ampiamente sviluppato, ma che egli espone brevemente un *risultato* in una forma dogmatica latina. Si può, dunque, anche congetturare che " la velocità immutabilmente impressa „ possa essere stata introdotta nello stesso modo (1).

---

(1) Vedi Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. - Giornata seconda.

SAGR. Ma quando l'artiglieria si piantasse non a perpendicolo, ma inclinata verso qualche parte, qual dovrebbe essere il moto della palla? Andrebbe ella forse, come nell'altro tiro, per la linea perpendicolare, e ritardando anche poi per l'istessa?

SIMPL. Questo non farebbe essa, ma uscita dal pezzo seguiterebbe il suo moto per la linea retta, che continua la dirittura della canna, se non in quanto il proprio peso la farebbe declinar da tal dirittura verso terra.

SAGR. Talchè la dirittura della canna è la regolatrice del moto della palla: nè fuori di tal linea si muove o muoverebbe, se il peso proprio non la facesse declinare in giù...

Vedi " Discorsi e dimostrazioni matematiche. Dialogo terzo „.

Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperietur est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit; nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum; si enim est aequabilis, non debiliatur aut remittitur et multo minus tollitur.

Traduz. (Bisogna osservare inoltre che il grado di velocità, conseguito da un mobile, gli è per sua natura immutabilmente impresso, purchè le cause esterne di accelerazione o di ritardo siano soppresse; ciò che si verifica nel solo piano orizzontale; poichè nei piani di

L'insegnamento della fisica, che io ho subìto, era probabilmente in complesso altrettanto cattivo e dogmatico che quello, di cui si sono dovuti accontentare i più vecchi de' miei colleghi e de' miei contradditori. L'inerzia era esposta come un *dogma* adeguato al sistema. Potevo invero dirmi che si arrivava a questa legge trascurando gl'impedimenti del moto, cioè che si poteva scoprirla per *astrazione*, secondo l'espressione di Appelt. Essa non rimaneva meno isolata separatamente, visibile solo per un genio sovrumano. E dove era la garanzia che la diminuzione della velocità cessava nello stesso tempo in cui tutti gl'impedimenti scomparivano? Poske (*op. cit.*, pag. 395), impiegando un termine, di cui mi sono spesso servito, è d'avviso che Galileo ha "*intuita*„ la legge d'inerzia. In che cosa consiste questa azione di *intuire?* Guardando qua e là si vede subito una cosa cercata od inattesa, che richiama l'attenzione. Ora io ho anche dimostrato come si produce questo intuire e in che cosa consista! Galileo paragonava diversi moti uniformemente *ritardati* e distinse ad un tratto fra essi un moto che era *uniforme*, *senza fine* e di un carattere così particolare, che lo si sarebbe creduto di una specie del tutto diversa, se lo si fosse osservato producentesi solo. Ma un piccolissimo cambiamento d'inclinazione lo cambiava in un moto uniformemente ritardato e finito, come noi spesso ne vediamo. Ed ora non esisteva più alcuna difficoltà nel riconoscere l'identità di tutti gl'impedimenti del moto col ritardo, dovuto alla gravità, e così veniva acquistata la concezione astratta di un moto non influenzato, indefinito ed uniforme. Quando io lessi per la prima volta, allorchè ero ancora giovane, questo luogo delle opere di Galileo, una luce ben diversa da quella dell'insegnamento dogmatico fece vedere ai miei occhi la necessità

---

scendenti esiste già una causa di accelerazione maggiore, e nei piani ascendenti al contrario esiste una causa di ritardo; quindi ne segue egualmente che il moto nel piano orizzontale è anche eterno; se, infatti, esso è uniforme, non è diminuito nè attenuato e molto meno annullato).

della presenza di questo elemento astratto nella nostra dinamica. Io credo che tutti quelli che leggeranno questo luogo, facilmente vedranno questa luce. Non posso dubitare che Galileo non l'abbia veduta prima di tutti gli altri.

4. Ora rimangono da discutersi alcuni punti importanti. In opposizione a C. Neumann, la cui Memoria ben nota (1) su questo argomento ha alquanto preceduto la mia (2), ho obbiettato che la velocità e la direzione, che intervengono nella legge d'inerzia, non hanno alcun significato comprensibile, quando la legge si riferisce allo spazio assoluto. Infatti non possiamo *determinare* direzioni che in uno spazio, i cui punti siano direttamente od indirettamente caratterizzati dai corpi dati. Lo scritto di Neumann e il mio hanno avuto per effetto di richiamare di nuovo l'attenzione su questo punto che aveva già presentato a Newton e ad Eulero grandi difficoltà intellettuali; non si può dire che siano state date più che delle mezze soluzioni, come, per esempio, quella di Streintz. Sino ad ora io sono il *solo* che riferisca, in tutta la sua semplicità, la legge d'inerzia alla Terra, e per moti di maggiore estensione nello spazio e nel tempo al *cielo delle stelle fisse*. La speranza di essere d'accordo con la maggior parte dei miei contradditori è assai poca, considerate le profonde divergenze nei punti di vista. Tuttavia risponderò alle obbiezioni in quanto, in generale, io abbia potuto comprenderle.

Höfler (*op. cit.*, pagg. 120-164) è d'avviso che si neghi il moto *assoluto* per la ragione che si crede di non poterlo *rappresentare*. Ma un fatto di una " *auto-osservazione più sottile* „ sarebbe che esistono rappresentazioni del moto assoluto. La *rappresentabilità* e la *riconoscibilità* del moto assoluto non devono confondersi; solo la seconda manca...„. Ma l'investigatore della natura non s'occupa precisamente che della riconoscibilità. Ciò che non è riconoscibile, ciò che non ha carattere sensibile, non ha *signifi-*

(1) *Die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*. Lipsia. 1870.

(2) *Erhaltung der Arbeit*. Praga, 1872.

cato nella scienza. Del resto non mi viene in mente di segnare dei limiti all'immaginazione d'un uomo. Ho bene un lieve sospetto che chi si rappresenta un moto " assoluto „ pensi *ordinariamente* a un immagine (esistente nella memoria) di un moto relativo veduto internamente. È precisamente per ciò che queste rappresentazioni non dimostrano nulla. Io lo ritengo ancora assai più fermamente che Höfler. Esistono ancora illusioni sensibili di uno spazio assoluto, che possono sempre essere riprodotte nella rappresentazione. Chi ha ripetuto le mie ricerche sulle sensazioni del moto, ha potuto constatare il potere che hanno le illusioni di questa specie sui sensi. S'immagina che con tutto ciò che ci circonda, che rimane in riposo davanti al nostro proprio corpo, si trasporti o ruoti in uno spazio, che non è caratterizzato da nulla di sensibile. Ma non si può misurare mediante alcune unità di misura lo spazio dell'*illusione*. Non si può dimostrarlo ad un altro, nè servirsene per la descrizione metrica astratta dei fatti meccanici. Non avvi nulla di comune con lo spazio geometrico in generale (1). Finalmente all'argomento finale di Höfler (*op. cit.*, pag. 133), che è questo: " nel moto relativo, tutt'al più l'uno dei due corpi, che si muovono l'uno rispetto all'altro, deve avere anche un moto assoluto „, non posso rispondere che una cosa: cioè, che questo argomento è senza alcun valore per chi considera il moto assoluto come privo di ogni significato fisico. Non mi occuperò più ulteriormente di questioni filosofiche. Sarebbe inutile, rispetto all'accordo delle parti essenziali, di discutere i punti di carattere particolare, accennati da Höfler (*op. cit.*, pagg. 124, 126).

Heymans (*op. cit.*, pagg. 412-448) è d'avviso che una mec-

---

(1) Si crederà forse che io voglia terminare scherzando questa discussione seria; ma involontariamente mi ricorda sempre, a proposito di questo soggetto, questa questione, che cioè uomo assai piacevole e alquanto paradossale discuteva un giorno con la maggior serenità del mondo: cioè se una canna che si vedeva in sogno avesse la stessa lunghezza di una reale. Si dovrebbe introdurre la canna dei sogni come misura normale nella meccanica?

canica induttiva-empirica si *sarebbe potuta formare,* ma che *di fatto* si sarebbe formata un'altra meccanica, sul concetto *non empirico* del moto assoluto. Il fatto che in ogni tempo (?) si è considerato la legge d'inerzia come valida nello " spazio assoluto „ non dimostrabile, invece che riferirla ad un sistema qualunque di coordinate, dimostrabile, gli sembra costituire una difficoltà che la teoria empirica può a stento risolvere. Heymans considera questo punto come un *problema* che può essere risolto solo colla *metafisica.* Non posso accettare questo modo di vedere. Heymans ammette che, nella esperienza, di dato non avvi che i moti relativi. Questa concessione e quella della possibilità di una meccanica empirica mi soddisfano pienamente. Penso di potere spiegare il rimanente senza l'aiuto della metafisica. I primi teoremi dinamici sono stati indubitatamente stabiliti sopra una base empirica. La Terra era il corpo di riferimento. Il passaggio ad altri sistemi di coordinate si produsse intieramente a grado a grado. Huygens vide che egli poteva, colla stessa facilità, riferire i corpi, che si urtavano alla barca su cui questi si trovavano, o, alla Terra. Lo sviluppo della astronomia precedè notevolmente quella della meccanica. Inoltre, allorchè si osservarono moti che, riferiti alla Terra, non erano in armonia colle leggi note della meccanica, si trovò inutile di abbandonare ancora queste leggi. Il cielo delle stelle fisse era già preparato per ristabilire quest'accordo con un minimo di cambiamenti, nelle concezioni, cui si era abituati. Si può facilmente immaginare le singolarità e le difficoltà che si sarebbero incontrate di nuovo, se il sistema di Tolomeo fosse ancora stato in voga all'epoca di un grande sviluppo della meccanica e della fisica sperimentale.

Ma Newton ha ovunque riferito la meccanica allo spazio assoluto. Veramente una personalità potente! Non occorre molto rispetto all'autorità per soggiacere ad essa in questo caso. Pure anch'esso va sottoposto al critico. Non si concepisce alcuna differenza a riferire le leggi del moto allo spazio *assoluto,* o ad esprimerle astrattamente senza riferirle esattamente ad un sistema di riferimento. L'ultimo processo è naturale ed anche interamente

pratico, poichè il meccanico, che studia un problema determinato qualunque, considera sempre un sistema di riferimento utilizzabile. Per il fatto che il primo procedimento, ogni volta che potrebbe avere un'influenza *seria*, è sempre preso nel senso del secondo, l'errore di Newton ha prodotto così poco danno, e si è mantenuto per sì lungo tempo. È assai comprensibile istoricamente e psicologicamente, che leggi empiriche abbiano potuto essere estese sino al punto da perdere *significato;* in un'epoca, in cui si preoccupavano ben poco della critica teorica della conoscenza. Parrebbe preferibile di correggere gli errori e le inesattezze dei nostri antenati scientifici, siano essi delle piccole o delle grandi personalità piuttosto che farne dei problemi metafisici.

Non voglio dire che ciò non sia mai avvenuto. Petzoldt (*op. cit.*, p. 192 e seg.) è d'accordo con me nel respingere il moto assoluto; ma egli invoca un principio d'Avenarius, (1) mediante il quale egli crede d'evitare tutte le difficoltà nella considerazione del moto relativo. Io credo di comprendere il principio d'Avenarius; esso non mi è nuovo, ma che tutte le difficoltà siano rimosse, se ci riferiamo al nostro corpo, mi rimane incomprensibile. Al contrario bisogna nella formulazione d'una dipendenza fisica fare astrazione del suo proprio corpo, fin tanto che esso sia senza influenza (2).

La ragione più seducente a favore d'un moto assoluto è stata data da C. Neumann da oltre trent'anni fa (*op. cit.*, pag. 27). Se immaginiamo un corpo celeste, animato di un moto di rotazione intorno al suo asse e quindi sottoposto "a forze centrifughe e schiacciato, non possiamo cambiar nulla in queste circostanze, supponendo la scomparsa di tutti gli altri astri „; il corpo celeste considerato continua a ruotore e resta schiacciato. Ma se il moto è semplicemente relativo, il caso di rotazione non si distingue da quello di riposo. Tutte le parti di quest'astro sono in riposo le une rispetto alle altre, e lo schiacciamento quindi

(1) *Der menschliche Weltbegriff*, Lipsia, 1891, p. 130.

(2) *Analyse der Empfindungen*, 2ª ediz., Jena, 1900, pagg. 11, 12, 33, 38, 208; 1ª ediz. pagg. 12, 13 e seg.

dovrebbe scomparire contemporaneamente al resto dell'universo. Ma a ciò si possono obbiettare due cose. In primo luogo mi sembra che non si è guadagnato nulla, se, per evitare una contraddizione si fa un'ipotesi, che è per se stessa priva di senso. Inoltre mi sembra che il grande matematico C. Neumann qui faccia un uso assai troppo libero del metodo, assai fecondo certamente, dell'esperimento intellettuale. Nell'esperimento mentale si possono modificare le circostanze accessorie onde permettere a nuovi aspetti d'un fenomeno di staccarsi dal complesso; ma non si può supporre *a priori* che l'universo intero sia senza influenza. Se lo si esclude, si arriva a delle contraddizioni, e quindi abbiamo una prova di più in favore del moto relativo, il quale, se anche solleva delle difficoltà, almeno non conduce a nessuna contraddizione.

Volkmann (*op. cit.*, pag. 53) crede a un'orientazione " assoluta „ per mezzo dell'etere. Ho già espressa la mia opinione in proposito (vedi cap. II, n. VI, § 5 e 11); ma mi domando: come si potrebbero distinguere le molecole di etere fra loro? Sino a che non siasi trovato questo mezzo, preferiremo attenerci al cielo delle stelle fisse; e se questo venisse a mancare, bisognerebbe ben riconoscere che la prima cosa da fare sarebbe di *cercare* un mezzo d'orientazione.

5. Tutto considerato debbo osservare che io non veggo ciò che potrei cambiare nella mia esposizione. I diversi punti particolari hanno fra loro una dipendenza necessaria. Non si può dare che *una* definizione naturale della massa, dopo aver riconosciuto la proprietà che hanno i corpi di determinare reciprocamente gli uni sugli altri le accelerazioni, proprietà che è stata enunciata due volte da Galileo e da Newton, una volta sotto forma *generale*, ed una volta sotto forma particolare come legge d'inerzia; e questa definizione non può essere che dinamica. Non posso considerare ciò come una questione di gusto (1). La

(1) La mia definizione della massa si adatta anche perfettamente alla meccanica di Hertz ed anche molto più naturalmente della sua, poichè essa contiene già il germe della " legge fondamentale „.

nozione di forza e l'eguaglianza dell'azione e della reazione ne conseguono immantinente. Escludere il moto assoluto equivale ad eliminare ciò che è privo di significato fisico.

Sarebbe non solo una veduta breve e molto soggettiva, ma piuttosto una veduta assai temeraria che io avrei se mi aspettassi che le mie rappresentazioni si adagiassero senza difficoltà ai sistemi di pensiero dei miei contemporanei. Certo la storia della scienza fa vedere che le concezioni scientifiche soggettive dell'universo, che si formano gl'individui, sono sempre corrette e generalizzate dagli altri. Nella concezione dell'universo, che l'umanità si forma, si possono ancora per lungo tempo riconoscere soltanto i tratti più caratteristici delle concezioni anche degli uomini più illustri. L'individuo non può fare altro che delineare fortemente i tratti della concezione che è sua propria.

CAPITOLO TERZO

Estensione dei principî e sviluppo deduttivo della meccanica

I. *Scopo dei principî di Newton.*

1. I principî di Newton bastano da soli, senza che sia necessario di introdurre nuove leggi, per risolvere tutti i problemi della meccanica, che si possono incontrare nella pratica tanto in dinamica, quanto in statica. Le difficoltà che s'incontrano nelle loro soluzioni sono di un carattere puramente matematico o formale; essi non hanno alcuna relazione coi principî.

Supponiamo che sia dato un numero qualunque di punti di masse $m_1, m_2, m_3 \ldots$ distribuiti in un modo qualunque nello spazio ed animati dalle velocità iniziali $v_1, v_2, v_3 \ldots$ Inoltre supponiamo che nelle direzioni delle rette congiungenti queste masse fra loro si producano mutue accelerazioni, le quali sono funzioni delle distanze reciproche dei punti e la cui dipendenza è data dalla fisica. In un piccolissimo elemento di tempo τ la massa m_5 percorre: 1° nella direzione della sua velocità iniziale lo spazio $v_5 \tau$; e 2° secondo le rette congiungenti $m_5 m_1$, $m_5 m_2 \ldots$, gli spazi $\frac{1}{2} \varphi_{15} \tau^2$, $\frac{1}{2} \varphi_{25} \tau^2 \ldots$, essendo

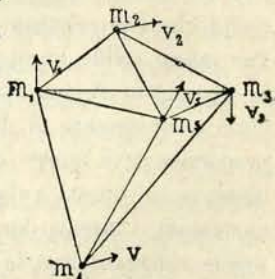



Fig. 144.

le accelerazioni corrispondenti delle masse in quelle direzioni $\varphi_{15}, \varphi_{25} \ldots$ L'ipotesi, che questi moti si compiano indipendentemente gli uni dagli altri, ci dà la nuova posizione alla fine del tempo τ, e la risultante delle velocità $v_5, \varphi_{15}\tau, \varphi_{25}\tau \ldots$ è

la nuova velocità iniziale alla fine dello stesso tempo. Per continuare in questo modo lo studio del moto basta considerare successivamente un nuovo elemento di tempo τ_1, tenendo conto delle nuove relazioni spaziali fra le masse. Nello stesso modo possiamo procedere con ogni altra massa del sistema. Perciò si vede che non può essere questione di alcuna difficoltà di principio, ma solamente di difficoltà matematiche, che sorgeranno, allorchè si chiederà la formulazione precisa della soluzione esatta del problema, e non più soltanto l'andamento del fenomeno da un istante all' istante successivo. Se le accelerazioni impresse alla massa m_5 o a parecchie altre si fanno equilibrio, la massa m_5 e queste altre masse sono in equilibrio, ed il loro moto è un moto uniforme, la cui velocità è la velocità iniziale. Quando questa velocità iniziale è nulla, la massa è in *equilibrio* e in *riposo*.

Allorchè il volume occupato da una o più masse m_1, m_2 . . . è troppo grande, talchè è impossibile di parlare ancora di *una* linea retta, che congiunge fra loro due di esse, la difficoltà del principio non diviene maggiore. Basta allora dividere la massa maggiore in un numero grandissimo di parti piccolissime e di condurre le rette congiungenti queste particelle due a due fra loro. In questo caso bisognerà inoltre tener conto delle relazioni reciproche che esistono fra le parti di una stessa grande massa. Per masse solide questa relazione consiste in ciò, che le parti si oppongono ad ogni cambiamento delle loro reciproche distanze. Ogni cambiamento di distanza dà origine ad un'accelerazione proporzionale a questo cambiamento, che tende ad aumentare la distanza, se questa è stata diminuita, a diminuirla se essa è stata aumentata. Ciascuno spostamento relativo di due di queste particelle ridestano così le forze conosciute col nome di elasticità. Quando si scontrano delle masse, nel fenomeno dell'urto, le forze di elasticità non incominciano a manifestarsi che quando ha luogo il contatto, ed allora si verifica un' incipiente cambiamento di forma.

2. In una colonna pesante verticale, che poggia sul suolo, isoliamo col pensiero una particella qualunque m nell'interno; questa particella è in equilibrio ed in riposo. La Terra le imprime un'accelerazione verticale g diretta verso il basso. La particella segue questa accelerazione e si avvicina alle parti inferiori; allora le forze elastiche sono destate e le imprimono un'accelerazione verticale verso l'alto, che diviene eguale a g, allorchè l'avvicinamento è sufficiente. L'accelerazione g, agendo egualmente sulle parti poste sopra m, le avvicina ad m, e di nuovo ne consegue un'accelerazione ed una contro-accelerazione, che conferiscono alle parti superiori il riposo, ma che avvicinano m di più alle parti inferiori, finchè questa nuova accelerazione, aumentata di g, divenga uguale all'accelerazione verso l'alto, dovuta alle parti inferiori. Si verifica la stessa cosa per ciascuna delle parti della colonna come per quella che poggia sul terreno. Si vede facilmente che le parti inferiori si avvicinano e si comprimono reciprocamente di più delle parti superiori. Ciascuna parte della colonna è posta fra una parte meno compressa al di sopra ed una parte più compressa al di sotto, e l'accelerazione g, che essa ha, è distrutta dall'eccesso di accelerazione, che riceve dalla parte su cui riposa. Per comprendere l'equilibrio ed il riposo di una parte della colonna si immagina che tutti i moti accelerati, determinati dalle azioni reciproche della Terra e delle parti di colonna, si compiono simultaneamente. L'apparente sterilità matematica di questa concezione svanisce, ed assume subito una forma animata, quando riflettiamo che nessun corpo in realtà è compiutamente in riposo; invece sotto l'apparenza del riposo si nascondono sempre piccole trepidazioni e perturbazioni, prodotte dai piccoli eccessi ora dalle accelerazioni elastiche, ora dalle accelerazioni di discesa. Il caso di riposo non è dunque che un caso particolare del moto, caso rarissimo e mai perfettamente realizzato. Questo fenomeno delle trepidazioni, di cui abbiam parlato, è d'altra parte ben noto. Quindi nella considerazione di un caso qualunque di equilibrio trattasi semplicemente di una rappresentazione *schematica* mentale del fenomeno mec-

canico. Questi piccoli fenomeni, perturbazioni, spostamenti, deformazioni e trepidazioni, non c'interessano maggiormente; e *deliberatamente* trascuriamo il loro studio, che appartiene alla *teoria della elasticità*.

Il risultato delle contribuzioni di Newton perciò consiste in questo: che un'idea unica e sempre la stessa conduce sempre allo scopo ed offre il mezzo di risolvere e di rappresentarsi tutti i casi di equilibrio e di moto. Tutti i fenomeni meccanici così ci sembrano come perfettamente simili e formati degli stessi elementi.

3. Consideriamo un altro esempio. Due masse m, m sono poste ad una distanza a fra loro (fig. 145). Supponiamo che ogni spostamento di una di esse rispetto all'altra desti forze elastiche proporzionali al cambiamento della distanza. Si prenda a per asse delle x e siano x_1, x_2 le ascisse delle due masse. Inoltre supponiamo che una forza f sia applicata al punto x_2, e indichiamo con p la forza che le masse esercitano l'una sull'altra, quando la loro distanza varia dell'unità di lunghezza. Le equazioni del moto sono:

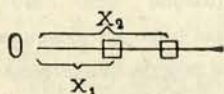



Fig. 145.

$$m \cdot \frac{d^2 x_1}{d t^2} = p\left[(x_2 - x_1) - a\right] \tag{1}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x_1}{d t_2} = -p\left[(x_2 - x_1) - a\right] + f. \tag{2}$$

Queste equazioni determinano tutte le proprietà quantitative del fenomeno meccanico. Basta integrarle per avere queste proprietà sotto una forma più comprensibile. Ordinariamente si eseguisce questa integrazione, per derivazione ed eliminazione di una delle due funzioni x_1 o x_2; noi adopreremo un altro metodo. Sottraendo dalla (2) la (1) e ponendo $x_2 - x_1 = u$ avremo:

$$m \cdot \frac{d^2 u}{d t^2} = -2p(u - a) + f; \tag{3}$$

poi sommando la (1) e (2) membro a membro e ponendo $x_1 + x_2 = v$, avremo:

$$m \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} = f. \tag{4}$$

Gli integrali delle equazioni (3) e (4) sono rispettivamente:

$$u = \mathrm{A} \text{ sen} \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t + \mathrm{B} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t + a + \frac{f}{2p}$$

$$v = \frac{f}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \mathrm{C}t + \mathrm{D};$$

d'onde:

$$x_1 = -\frac{\mathrm{A}}{2} \text{ sen} \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t - \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t + \frac{f}{2m} \cdot \frac{t^2}{2} +$$

$$+ \mathrm{C}t - \frac{a}{2} - \frac{t}{4p} + \frac{\mathrm{D}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{A}}{2} \text{ sen} \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t + \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}}\, t + \frac{f}{2m} \cdot \frac{t^2}{2} +$$

$$+ \mathrm{C}t + \frac{a}{2} + \frac{t}{4p} + \frac{\mathrm{D}}{2}.$$

Le costanti d'integrazione sono determinate dalle condizioni iniziali di posizione e di velocità; per fissare le idee supponiamo che la forza f incominci ad agire quando è $t = o$, e che a questo istante si abbia:

$$x_1 = o \;,\; x_2 = a \;,\; \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = o.$$

Allora abbiamo:

$$x_1 = \frac{f}{4p} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}} \cdot t + \frac{f}{2m} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{f}{4p}, \tag{5}$$

$$(6) \qquad x_2 = -\frac{f}{4p} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}} \, . \, t + \frac{f}{2m} \, . \, \frac{t^2}{2} + a + \frac{f}{4p} \, ,$$

$$(7) \qquad x_2 - x_1 = -\frac{f}{2p} \cos \sqrt{\frac{2p}{m}} \, . \, t + a + \frac{f}{2p} \, .$$

L'equazioni (5) e (6) fanno vedere che ciascuna delle due masse è animata da due movimenti; il primo di essi è uniformemente accelerato; la sua accelerazione è la metà di quella, che la forza f produrrebbe, se agisse sopra una sola delle due masse; il secondo è un moto oscillatorio simmetrico rispetto al centro di gravità. La durata e l'ampiezza di questa oscillazione sono rispettivamente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}} \qquad \text{e} \qquad a = \frac{f}{2p} \, .$$

Quindi esse sono altrettanto minori, quanto è maggiore la forza risvegliata dallo spostamento, cioè (se per esempio le masse appartengono ad un solido) tanto minori, quanto è più duro il corpo. L'equazione (7) dà i cambiamenti periodici della distanza di due masse. Quindi il moto di un corpo elastico è un movimento vermicolare. Per i corpi duri il numero delle oscillazioni è così grande e le loro ampiezze così piccole, che esse rimangono impercettibili e si possono trascurare. Il moto oscillatorio svanirà a poco a poco, se il mezzo presenta una certa resistenza; nè si produrrà se al momento, in cui la forza f incomincia ad agire, le due masse hanno velocità eguali e sono ad una distanza $a + \frac{f}{2p}$, che è precisamente la distanza delle due masse nell'istante nel quale cessa l'oscillazione, eguale alla distanza a della posizione di equilibrio aumentata di $\frac{f}{2p}$. Onde si vede che f dà origine ad una tensione y, per cui l'accelerazione della massa che precede si riduce a metà, mentre quella della massa che segue

aumenta precisamente di questo valore. Allora in accordo colla ipotesi abbiamo:

$$\frac{py}{m}=\frac{f}{2m} \quad \text{o} \quad y=\frac{f}{2p}.$$

Quindi i principî di Newton sono sufficienti per analizzare nei suoi minuti particolari ogni moto di questa specie. Quando si immagina un corpo diviso in un gran numero di parti, tenute unite fra loro mediante legami elastici, la ricerca si può complicare maggiormente dal punto di vista matematico, ma non dal punto di vista dei principii. Una sufficiente durezza dei corpi ci può far ignorare l'esistenza di queste oscillazioni. Si dà il nome di *corpi solidi* (o rigidi) a quei corpi pei quali si può, *a priori*, fare astrazione degli spostamenti reciproci delle parti.

4. Ora considereremo un caso che rappresenta lo *schema di una leva*. Immaginiamo le masse M, m_1, m_2 poste nei vertici di un triangolo e congiunte fra loro mediante legami elastici. Ogni cambiamento dei lati, e quindi anche degli angoli, dà origine ad accelerazioni, le quali tendono a ridare al triangolo la sua forma e la sua grandezza primitive. Inoltre si suppone che la massa M sia grandissima, o, ciò che è lo stesso, che essa sia legata per mezzo di potenti forze elastiche a masse grandissime (come la Terra, per esempio). Il punto M (fig. 146) si può allora considerare come un *centro immobile di rotazione*. I principî di Newton permettono di dedurre da questo schema le leggi della leva. Se si passasse da questa leva *schematica*, formata di tre masse, alla leva *reale*, questa deduzione si complicherebbe immensamente, ma la sua *forma* rimarrebbe pertanto valida.

Ora abbiasi la massa m_1, la quale riceva da una forza esterna un'accelerazione f perpendicolare alla retta congiungente $Mm_2 = c+d$. Immediatamente i lati $m_1 m_2 = b$ e $m_1 M = a$ si allungano, e si producono secondo le loro direzioni le accelerazioni s

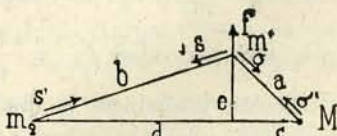



Fig. 146.

e σ ancora incognite. Sia e l'altezza del triangolo; le componenti di queste accelerazioni, nella direzione contraria ad f sono $s \,.\, \frac{e}{b}$ e $\sigma \,.\, \frac{e}{a}$. La massa m_2 riceve un'accelerazione s' che si può scomporre in $s' \,.\, \frac{d}{b}$ diretta verso M ed in $s' \,.\, \frac{e}{b}$ parallela ad f. La prima di queste componenti determina un piccolo avvicinamento di m_2 verso M. Trascuriamo le accelerazioni comunicate ad M dalle reazioni di m_1 ed m_2, poichè sono in ragione inversa della grandissima massa M.

Onde la massa m_1 riceve l'accelerazione $f - s \frac{e}{b} - \sigma \frac{e}{a}$ e la massa m_2 l'accelerazione parallela $s' \frac{e}{b}$. Ora fra s e σ esiste una relazione assai semplice; infatti se i legami sono *assai rigidi*, allora la deformazione del triangolo è impercettibile; le componenti di s e di σ *perpendicolari* ad f si distruggono; poichè se supponiamo per un momento che ciò non si verifichi, si vedrà che la maggiore di queste due componenti produrrà subito una ulteriore deformazione, che avrà per effetto di distruggere l'eccesso di questa componente maggiore sull'altra. Dunque la risultante di σ ed s è direttamente opposta ad f, e quindi si può scrivere $\sigma \,.\, \frac{c}{a} = s \,.\, \frac{d}{b}$. Inoltre fra s ed s' esiste la relazione comune $m_1 \,.\, s = m_2 \,.\, s'$ ovvero $s = s' \frac{m_2}{m_1}$. Le accelerazioni ricevute da m_2 ed m_1 sono perciò rispettivamente: $s' \frac{e}{b}$ ed $f - s' \,.\, \frac{e}{b} \,.\, \frac{m_2}{m_1} \,.\, \frac{c+d}{c}$; o rappresentando con φ la prima, la seconda avrà per valore $f - \varphi \,.\, \frac{m_2}{m_1} \,.\, \frac{c+d}{c}$.

Allorchè incomincia la deformazione, l'accelerazione di m_1 diminuisce, poichè φ cresce, mentre quella di m_2 aumenta. Ora supponiamo che l'altezza del triangolo sia piccolissima: ancora rimane applicabile il nostro ragionamento; ma in questo caso si

può porre: $a = c = r_1$ ed $a + b = c + d = r_2$. La deformazione continuerà, aumentando l'accelerazione φ e diminuendo quella del punto m_1, finchè le accelerazioni dei punti m_1 ed m_2 siano nel rapporto $r_1 : r_2$. Questo rapporto corrisponde ad una *rotazione* dell'intiero triangolo intorno ad M senza ulteriore deformazione, essendo del resto la massa M in riposo in causa della sua accelerazione che va annullandosi. Tosto che è principiata la rotazione, ogni ragione di cambiamento ulteriore di φ scompare; si ha dunque:

$$\varphi = \frac{r_2}{r_1}\left\{f - \varphi \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{r_2}{r_1}\right\};$$

d'onde:

$$\varphi = r_2 \cdot \frac{r_1 m_1 f}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2};$$

e quindi per l'accelerazione angolare ψ della leva abbiamo:

$$\psi = \frac{\varphi}{r} = \frac{r_1 m_1 f}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}.$$

Se vogliamo confinare il fenomeno fra limiti più ristretti, si terrà conto degli spostamenti e delle oscillazioni reciproche delle parti, che si possono trascurare nel caso di legami sufficientemente rigidi.

L'uso dei principî di Newton perciò ci porta allo stesso risultato di quello cui si sarebbe giunti per mezzo dei metodi di Huygens; e ciò è ben naturale, poichè queste due concezioni distinte derivano da differenti aspetti di una stessa cosa e sono perfettamente *equivalenti*. Il metodo di Huygens mena più speditamente allo scopo, ma dà una conoscenza meno chiara dei particolari del fenomeno. Per risolvere questo problema con questo metodo basta esprimere le forze vive di m_1 ed m_2 mediante il lavoro eseguito in uno spostamento qualunque di m_1, supponendo del resto che le velocità v_1 e v_2 siano nel rapporto $r_1 : r_2$.

Questo esempio è assai acconcio per mettere in evidenza il significato di un'equazione di condizione come la seguente: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Questa equazione dice semplicemente che tostochè il rapporto $\frac{v_1}{v_2}$ si allontana alquanto da $\frac{r_1}{r_2}$, sono *effettivamente* messe in azione forze considerevoli, che si oppongono ad ogni ulteriore deviazione. Naturalmente i corpi obbediscono alle *forze* e non alle *equazioni*.

5. Nell'esempio precedente facciamo $m_1 = m_2 = m$ ed $a = b$ (fig. 147). Lo stato dinamico del sistema cessa allora di cambiare, quando è $\varphi = 2\,(f - 2\varphi)$, cioè quando le accelerazioni delle masse alla base ed al vertice sono date rispettivamente da $\frac{2f}{5}$ e $\frac{f}{5}$. Appena principia la deformazione φ aumenta, e l'accelerazione della massa posta nel vertice diminuisce di una quantità doppia; la deformazione continua, finchè le due accelerazioni non si trovino nel rapporto 2 : 1.

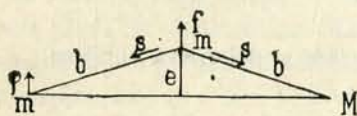



Fig. 147.

Consideriamo ora un caso di *equilibrio*. Abbiasi una leva schematica formata di tre masse (fig. 148) m_1, m_2, M, di cui l'ultima M si suppone anche grandissima o connessa da potenti legami elastici a masse grandissime. Immaginiamo due forze eguali

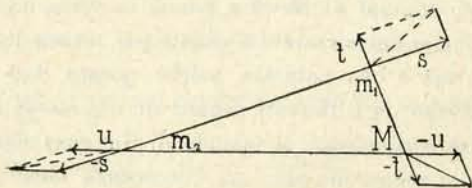



Fig. 148.

e direttamente opposte s, $-s$ agiscano sulle masse m_1 ed m_2, cioè che queste masse posseggano delle accelerazioni, che siano

inversamente proporzionali. Lo stiramento del legame m_1 m_2 imprime anche a queste due masse delle accelerazioni che sono nello stesso rapporto inverso, che distruggono le prime e ristabiliscono l'equilibrio. Inoltre supponiamo che due coppie di forze eguali e direttamente opposte t, $-t$, ed u, $-u$ agiscano rispettivamente sulle masse m_1, M ed m_2, M; vi è anche in questo caso equilibrio. Quando M è connessa mediante legami elastici a masse sufficientemente grandi, è inutile applicare direttamente le forze $-t$ e $-u$, poichè esse nascono spontaneamente, quando incomincia l'equilibrio e lo mantengono. L'apparato perciò resta in equilibrio, quando le due forze eguali s, $-s$ e le due forze qualunque t ed u agiscono su di esso. In realtà le forze s, $-s$ si distruggono e le forze t, u passano per la massa fissa M e sono distrutte dall'effetto della deformazione.

La condizione di equilibrio si può facilmente ricondurre alla forma ordinaria; a tal uopo componiamo le due forze t ed s in una forza p e le forze u, $-s$ in una forza q. Il teorema geometrico del parallelogramma di Varignon dice che i momenti di p e q sono rispettivamente eguali alle somme dei momenti delle loro componenti. Ora le forze t ed u, che passano per M, rispetto a questo punto hanno i momenti nulli; i momenti delle forze s e $-s$ sono eguali e di segni contrari; quindi si verifica la stessa cosa pei momenti di p e q rispetto al punto M. Due forze qualunque p e q si faranno perciò *equilibrio*, quando le loro componenti secondo m_1 m_2 saranno eguali ed opposte, ovvero quando i loro momenti rispetto ad M saranno eguali e di segni opposti. Queste due condizioni sono equivalenti. Si vede anche che in questo caso la risultante delle forze p e q passa per M, poichè s e $-s$ si elidono, e t, u concorrono nel punto M.

6. Questo esempio fa vedere che le concezioni meccaniche di Varignon sono comprese in quelle di Newton. Perciò era giusto dire (cap. I, n. III, § 3) che la statica di Varignon è una statica *dinamica*, che parte dalle nozioni fondamentali della dinamica moderna e si limita volontariamente al caso di equilibrio. Tuttavia aggiungiamo che nella statica di Varignon la *forma*

astratta della esposizione fa sì, che il significato di molte operazioni, come ad esempio la traslazione di una forza secondo la sua propria direzione, non sembra così chiara come nell'esempio precedente.

Le considerazioni svolte in questo paragrafo ci convinceranno che i principii di Newton bastano per risolvere qualunque problema meccanico, purchè si abbia cura di scendere abbastanza nei particolari. Allora occorre, per *delucidare* un caso qualunque di equilibrio o di moto, di *considerare* tutte le accelerazioni prodotte dalle reazioni reciproche delle masse come effettivamente applicate a queste. Si può riconoscere questo stesso gran fatto nei fenomeni più disparati; esso conferisce alle concezioni fisiche da un canto un'unità, un'omogeneità ed una economia grandissime, dall'altro una fecondità, cui prima di Newton era impossibile sognare.

La meccanica non ha il suo unico scopo *in sè stessa;* essa deve anche *risolvere problemi* diversi sia per i bisogni della vita pratica, sia in appoggio ad altre scienze. In generale si possono assai vantaggiosamente risolvere questi problemi con altri metodi diversi da quelli di Newton. Abbiamo già detto che questi differenti procedimenti in sostanza sono equivalenti; ma sarebbe assai incomodo di volere costantemente ritornare alle concezioni puramente newtoniane, sdegnando i vantaggi che possono offrire gli altri: basta avere acquistata la convinzione che questo ritorno sia sempre possibile. È conveniente di aggiungere che le concezioni di Newton sono certamente *le più soddisfacenti* e *le più limpide.* Poinsot dimostra un senso elevato della chiarezza e della semplicità scientifiche, volendo porle come *sole* basi della scienza.

II. *Le formule e le unità della meccanica.*

1. Tutte le formule importanti della meccanica moderna furono scoperte ed impiegate sino dall'epoca di Galileo e di Newton. La frequenza del loro uso rese conveniente dare ad esse speciali denominazioni; ma gran parte di esse ebbero stabilità solo molto tempo dopo. Più tardi ancora si pensò di introdurre nella meccanica un insieme sistematico di unità; ed infatti quest'ultimo perfezionamento non è stato ancora compiutamente conseguito.

2. Consideriamo un moto uniformemente accelerato, la cui accelerazione è φ. Indichiamo con s la distanza, con t il tempo, con v la velocità corrispondente. Dalle ricerche di Galileo e di Huygens abbiamo tratto le equazioni seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} v = \varphi t \\ s = \frac{1}{2} \varphi t^2 \\ \varphi s = \frac{v^2}{2} \end{cases}$$

Moltiplicando le (1) per m si hanno le seguenti:

$$m v = m \varphi t$$
$$m s = \frac{m \varphi}{2} t^2$$
$$m \varphi s = \frac{m v^2}{2},$$

ed indicando con p la forza motrice $m \varphi$ abbiamo:

$$(2) \quad \begin{cases} m v = p t \\ m s = \frac{p t^2}{2} \\ p s = \frac{m v^2}{2} \end{cases}$$

Tutte le equazioni (1) contengono la grandezza φ; inoltre ciascuna di esse contiene due delle tre grandezze s, t, v; quindi si possono rappresentare colla tabella seguente:

$$\varphi \begin{cases} v, t \\ s, t \\ s, v. \end{cases}$$

Le equazioni (2) contengono le grandezze m, p, t, s, v; ciascuna di esse contiene m, p ed inoltre due delle altre tre s, t, v, secondo la tabella seguente:

$$m, p \begin{cases} v, t \\ s, t \\ s, v. \end{cases}$$

Si può fare uso delle equazioni (2) per rispondere a questioni assai differenti, riguardanti il moto prodotto da una forza costante. Se per esempio vogliamo conoscere la velocità v, che una massa m acquista durante un tempo t sotto l'azione di una forza p, la prima equazione dà $v = \frac{pt}{m}$. Se d'altra parte si vuole il *tempo* t, durante il quale una massa m colla velocità v si può muovere in senso contrario alla forza costante p, che la sollecita, la stessa equazione ci dà: $t = \frac{mv}{p}$. Inoltre se vogliamo poi lo spazio percorso dalla massa m in senso contrario a p, allora esso è dato dalla terza equazione: $s = \frac{mv^2}{2p}$. Osserveremo incidentalmente che queste due ultime questioni fan ben vedere la futilità della disputa fra la scuola di Leibniz e quella di Descartes sulla misura della forza di un corpo in moto. L'uso di queste equazioni contribuisce grandemente a conferire sicurezza al trattamento dei concetti meccanici. Se per esempio ci domandiamo qual'è la forza p capace di comunicare la velocità v alla massa m, si scorge subito che tra le sole m, p, v non esiste

alcuna relazione, talchè s o t debbono essere in qualche modo fornite; e quindi la questione è *indeterminata*. Subito s'impara a riconoscere e ad evitare i casi indeterminati di questa specie. Lo spazio descritto nel tempo t da una massa m, la cui velocità iniziale è zero, e su cui agisce la forza p, è data dalla seconda equazione: $s = \frac{p t^2}{2m}$.

3. Parecchie formule contenute nelle equazioni sopra discusse hanno ricevuto nomi speciali. Galileo già parla della forza di un corpo che si muove e la chiama ora " momento „, ora " impulso „, ora " energia „. Egli considera questo momento come proporzionale al prodotto della massa del corpo per la sua velocità (o piuttosto del peso per la velocità, poichè ancora Galileo non ha alcun' idea di massa più chiara di quella che non l'abbia Descartes e Leibniz). Descartes accettò questa veduta; e pose la forza di un corpo in moto eguale a mv, che chiamò *quantità di moto;* ed affermò che la somma totale delle quantità di moto nell'universo rimane costante; sicchè se un corpo perde la sua quantità di moto, essa viene acquistata da altri corpi. Newton dà anche alla espressione mv il nome di quantità di moto, che è stato conservato. Belanger nel 1847 diede il nome di *impulso* (1) all'espressione pt, che forma il secondo membro della prima equazione. Le espressioni della seconda equazione non hanno ricevuto alcun nome particolare. Leibniz (1695) diede il nome di *forza viva* (vis viva) all'espressione mv^2, che entra nella terza; contrariamente a Descartes egli la considerò come la vera misura della forza di un corpo in moto; e chiamò *forza morta* (vis mortua) la pressione esercitata dalla forza di un corpo in riposo. Coriolis trovò più conveniente di dare il nome di forza viva a $\frac{1}{2} m v^2$;

---

(1) Vedi pure *Matter and Motion* di Maxwell: a p 72 "ma questa parola è ordinariamente usata in un senso diverso, cioè come "il limite di una forza che è infinitamente grande e che agisce solo durante un tempo infinitamente breve „.

n. d. t.

per evitare ogni confusione Belanger propose di chiamare *forza viva* il prodotto mv^2 e *potenza viva* il prodotto $\frac{1}{2} mv^2$. Per l'espressione ps Coriolis adoprò il nome di *lavoro*. Poncelet ha diffuso l'uso di quest'ultima denominazione, ed ha scelto per *unità di lavoro* il *chilogrammetro*, cioè il lavoro prodotto da una forza eguale al peso di 1 chilogrammo, che sposta il suo punto di applicazione di un metro nella sua direzione.

4. Dobbiamo a Descartes il concetto di " quantità di moto „ ed a Leibniz quello di " forza viva „. Ora per conoscere alcuni particolari storici intorno all'origine di questi concetti, è utile passare rapidamente in esame le idee, che presero a guida Descartes e Leibniz. Nei suoi *Principia Philosophiae* pubblicati nel 1644 Descartes si esprime così (II, 36):

" Motus natura sic animadversa considerare oportet eius causam, eamque duplicem; primo scilicet universalem et primariam quae est causa generalis omnium motuum qui sunt in mundo; ac deinde particularem a qua fit ut singulae materiae partes motus quos prius non habuerunt, acquirant. Et generalem quod attinet, manifestum mihi videtur illam non aliam esse, quam Deum ipsum qui materiam simul cum motu et quiete in principio creavit iamque per solum suum concursum ordinarium tantundem motus et quietis in ea tota quantum tunc potuit conservat. Nam quamvis ille motus nihil aliud sit in materia mota quam eius modus; certam tamen et determinatam habet quantitatem, quam facile intelligemus eandem semper in tota rerum universitate esse posse, quamvis in singulis eius partibus mutetur. Ita scilicet ut putemus, cum una pars materiae duplo celerius movetur quam altera et haec altera duplo maior est quam prior tantundem motus esse in minore quam in maiore ac quanto motus unius partis lentior sit, tanto motum alicuius alterius ipsi aequalis fieri celeriorem. Intelligimus etiam perfectionem esse in Deo, non solum quod in se ipso sit immutabilis sed etiam quod modo quam maxime constanti et immutabili operetur:

adeo ut iis mutationibus exceptis quos evidens experientia vel divina revelatio certas reddit quasque sine ulla in creatore mutatione fieri percipimus aut credimus, nullas alias in eius operibus supponere debeamus, ne quae inde incostantia in ipso arguatur. Unde sequitur quam maxime rationi esse consentaneum ut putemus ex hoc solo quod Deus diversimode moverit partes materiae, cum primum illas creavit iamque totam istam materiam conservet, eodem plane modo, eademque ratione qua prius creavit, eum etiam tantundem motus in ipsa semper conservare „.

Eccone la traduzione:

“ Dopo avere esaminata la natura del moto, bisogna considerarne la causa; e poichè essa può concepirsi in due modi: incominceremo colla prima come universale, che produce generalmente tutti i moti che esistono al mondo; e la seconda, come causa speciale, da cui le parti singole della materia ricevono il moto che prima esse non avevano. In quanto alla prima mi sembra evidente non essere altro che Iddio, che mediante la sua onnipotenza sin dal principio creò la materia con il moto ed il riposo delle sue parti, e che ora conserva nell'universo per mezzo del suo semplice concorso ordinario altrettanto moto e riposo, quanto ne ha creato in origine. Poichè, quantunque il moto non sia che solo una condizione della materia in moto, tuttavia essa ne ha una certa quantità, che non aumenta, nè diminuisce mai, benchè ve ne sia nelle singole parti ora più ed ora meno; quindi allorchè una parte della materia si muove due volte più velocemente di un'altra, e che quest'altra è due volte maggiore della prima, dobbiamo supporre che avvi la stessa quantità di moto tanto nella minore quanto nella maggiore, e tutte le volte ed ogni qual volta il moto di una parte diminuisce, quella di qualunque altra parte aumenta in proporzione. Inoltre riconosciamo in ciò una perfezione di Dio, non solo in ciò che è immutabile nella sua natura, ma ancora in ciò che opera in un modo assai rigoroso e costante; cosicchè, ad eccezione dei cambiamenti che vediamo nel mondo e di quelli che crediamo quali rivelazioni

di Dio, e che sappiamo verificarsi od essersi verificati nella natura senza alcun cambiamento da parte del Creatore, non dobbiamo supporne nessun altro nella sua opera, per timore di attribuirgli l'incostanza. D'onde consegue che, giacchè nella creazione della materia egli ha impartito differenti moti alle sue parti, e che li preserva tutti nello stesso modo e con le stesse leggi che le ha fatto osservare nella loro creazione, egli conserva incessantemente in questa materia una *stessa quantità di moto* „.

Benchè Descartes abbia risolto problemi assai importanti, ad esempio negli studî sull'arco-baleno e sulla legge della rifrazione, tuttavia la vera importanza della sua opera si deve ricercare principalmente nelle sue grandi idee generali e rivoluzionarie sulla filosofia, sulle matematiche e nelle scienze naturali. La massima di dubitare di tutto ciò che sino allora era stato ritenuto per stabilito non sarà mai abbastanza apprezzata nel suo giusto valore; tuttavia essa fu messa in pratica assai più dai suoi successori che da lui stesso, e fu allora che essa apparve sì feconda. La geometria analitica ed i metodi moderni son dovuti all'idea di rendere inutile, mediante l'uso dell'algebra, la considerazione particolare delle figure e di ridurre tutto alla misura delle distanze. Descartes era nemico pronunciato di ammettere nella fisica le qualità nascoste, e si sforzava di basare questa scienza totalmente sulla meccanica, che egli considerava come una pura geometria di movimento. Egli ha dimostrato, mediante le sue ricerche, con questo metodo, che non riteneva alcun problema di fisica per insolubile. Descartes non ha sufficientemente notato il fatto, che una meccanica è solo possibile, quando le posizioni dei corpi nella loro *dipendenza* reciproca siano determinate da una relazione tra forze, che sono funzioni del tempo; e Leibniz spesso ha insistito in questa deficienna di prova. I concetti meccanici, che sviluppa Descartes sopra una base incompleta e poco determinata, non si possono considerare come rappresentazioni della natura, ma sono stati ritenuti anche da Pascal, Huygens e Leibniz come semplici immaginazioni. Però abbiamo

osservato più sopra molte volte quanto sia stata grande e come sovravviva anche al presente l'influenza esercitata dalle idee cartesiane. Anche in fisiologia Descartes ha eesrcitato una potente influenza per mezzo della sua teoria della visione, e considerando gli animali come semplici macchine (opinione che non ha avuto naturalmente il coraggio di estendere all'uomo), e con ciò ha anticipato l'idea dei moti riflessi (cfr. Duhem, *L'évolution des théories physiques*, Louvain, 1896).

Non si può negare a Descartes il merito di avere, per il *primo, cercato* in meccanica un punto di vista *più generale* e più fecondo. In ciò per tanto consiste il compito peculiare del *filosofo;* ed in ciò bisogna ricercare la ragione della loro influenza scientifica fecondante e stimolante. Ma Descartes ebbe tutti gli errori comuni del filosofo. Aveva una confidenza assoluta nelle sue proprie idee e non si preoccupava punto di verificarle sperimentalmente. A lui al contrario bastava un minimo di esperienza per un massimo di conseguenze. Bisogna aggiungere a ciò l'oscurità delle sue concezioni. Descartes non aveva un'idea chiara del concetto di massa. Sarebbe assai arrischiato il dire che Descartes definì mv come quantità di moto, quantunque i suoi successori scientifici abbiano adottato questa definizione, allorchè sentirono il bisogno di concetti meglio determinati. Il maggiore errore di Descartes, quello che vizia tutte le sue ricerche fisiche, consiste nel considerare i principii, per cui può decidere solo l'esperienza, come *a priori* evidenti per se stessi. Così ad esempio nei paragrafi (37, 39) successivi a quello che abbiamo sopra citato, ammette che un corpo canserva *evidentemente* la sua velocità e la sua direzione. Le esperienze, che cita al § 38, avrebbero dovuto servire non come una conferma del principio d'inerzia, ammesso *a priori* come evidente, ma bensì come base per stabilire quest'ultimo.

Le vedute di Descartes furono combattute da Leibniz in un piccolo trattato, comparso negli *Acta eruditorum* (1686, p. 161) sotto il titolo seguente: *Brevis demonstratio erroris memorabili Cartesii et aliorum circa legem natura, secundum quam*

volunt a Deo eamdem semper quantitatem motus conservari; qua et in re mechanica abutuntur, ossia " Breve dimostrazione di un memorabile errore di Descartes e di altri a proposito di una legge della natura, secondo la quale essi vogliono che la quantità di moto sia conservata costante da Dio, del quale abusano anche in meccanica „.

Leibniz osserva che nelle macchine in equilibrio i *carichi* sono in ragione inversa delle velocità di spostamento; e che da ciò può esser nata l'idea che il prodotto di un *corpo* (corpus, moles) per la *velocità* sia la misura della forza. Descartes considerava questo prodotto come una quantità costante. Però Leibniz pensava che questa misura della forza è solo accidentalmente la misura esatta nel caso delle macchine. Per lui la vera misura della forza è diversa, e deve essere determinata seguendo la via per cui s'eran posti Galileo ed Huygens. Ogni corpo risale in virtù della velocità acquistata nella sua caduta precisamente alla stessa altezza d'onde è caduto. Se perciò supponiamo che la " stessa „ forza richiedesi per innalzare un peso m all'altezza $4\,h$ od un peso $4\,m$ all'altezza h, si deve prendere per *misura della forza* il prodotto del " corpo „ per il quadrato della sua velocità, poichè nel primo caso la velocità acquistata è solo doppia di quella conseguita nel secondo.

In un trattato successivo (1695) Leibniz ritornò sullo stesso soggetto. Fece in esso una distinzione fra la semplice pressione (*vis mortua* ossia forza morta) e la forza di un corpo che si muove (*vis viva* ossia forza viva), la quale ultima è la somma degli impulsi delle pressioni. Questi impulsi producono infatti un " impetus „ mv; ma esso non è in alcun modo la vera misura della forza, e poichè la *causa* deve corrispondere all'*effetto*, questa vera misura è invece determinata, in conformità delle precedenti considerazioni, dal prodotto mv^2. Leibniz osserva inoltre che la possibilità del *moto perpetuo* è esclusa soltanto dall'accettazione della sua misura di forza.

Leibniz non possedeva più di Descartes un concetto esatto di massa. Egli parlava di corpo (*corpus*), di carico (*moles*), di

corpi di diversa grandezza aventi lo stesso peso specifico, ecc. Solamente nel secondo trattato, e qui una sola volta, s'incontra l'espressione di " massa „; ed assai probabilmente è stata presa a prestito da Newton. Per poter ricavare un concetto ben definito dalle espressioni di Leibniz, dobbiamo associare alle sue espressioni la nozione di massa, come realmente fecero i suoi successori. Del resto il metodo di Leibniz è assai più scientifico di quello di Descartes. Tuttavia vi ha confusione fra due cose: il problema della *misura della forza* e quello della *invariabilità* Σmv o di Σmv^2. Queste due questioni non hanno in realtà nulla di comune. Rispetto alla prima si è già visto che le misure cartesiana e leibniziana, o della capacità d'azione di un corpo mobile, sono ciascuna, in senso differente, esatte. Inoltre Leibniz osservò espressamente che non bisogna confondere queste due misure con la misura ordinaria newtoniana della forza.

Rispetto alla seconda questione le ulteriori ricerche di Newton hanno dimostrato che la somma cartesiana Σmv è realmente costante per i sistemi materiali *liberi*, che non subiscono alcuna azione esterna; e le ricerche di Huygens hanno dimostrato che la somma Σmv^2 rimane egualmente costante, quando il *lavoro* fatto dalle forze non l'altera. Quindi la disputa iniziata da Leibniz si fondava soltanto sopra *molteplici malintesi* e ciò non ostante essa durò cinquantasette anni, fino alla pubblicazione del *Traité de dynamique* di D'Alembert nel 1743. Più innanzi discorreremo delle idee teologiche di Descartes e di Leibniz.

5. Le tre equazioni che abbiamo più sopra discusse, quantunque siano applicabili solo al moto *rettilineo*, prodotto da una forza *costante*, tuttavia esse si possono considerare come le *equazioni fondamentali* della meccanica. Se il moto, rimanendo del tutto rettilineo, è prodotto da una forza variabile, insensibili modificazioni, e quasi per sè stesse evidenti, trasformano queste equazioni in altre, che qui indicheremo solo brevemente, poichè gli sviluppi matematici sono del tutto accessorii per lo scopo propostoci.

Per una forza variabile la prima equazione dà:

$$mv = \int p\,dt + C,$$

ove p è la forza variabile, dt l'elemento di tempo dell'azione, $\int p\,dt$ la somma dei prodotti $p\,dt$ durante *la durata dell'azione* e C una quantità costante, la quale è eguale al valore di mv all'istante, in cui incomincia ad agire la forza.

La seconda equazione fornisce la seguente, che contiene due costanti d'integrazione:

$$s = \int dt \int \frac{p}{m}\,dt + Ct + D.$$

Infine la terza equazione deve essere sostituita dalla:

$$\frac{mv^2}{2} = \int p\,ds + C.$$

Il moto rettilineo si può sempre considerare come una combinazione di tre moti rettilinei simultanei, le cui direzioni comunemente si scelgono per comodità fra loro ortogonali. In questo caso, che è il più generale, le equazioni date più sopra conservono per i tre moti componenti il loro significato.

6. Le operazioni matematiche di addizione, sottrazione e di eguaglianza di due grandezze hanno un significato fuorchè sol quando queste grandezze siano della stessa specie. Non si può addizionare, nè eguagliare una massa con un tempo, una massa con una velocità, ma solo masse con masse, ecc. Perciò rispetto a ciascuna delle equazioni della meccanica si presenta subito e da se stessa la questione di sapere se i suoi due membri veramente rappresentino grandezze della *stessa specie*, cioè grandezze misurabili colla *stessa unità*, o in altre parole, come si dice comunemente, se l'equazione è *omogenea*. In questo modo siamo condotti ad occuparci delle unità delle grandezze della meccanica.

La scelta delle unità, che naturalmente sono, come sappiamo, quantità della stessa specie di quelle che debbonsi misurare, è in molti casi arbitraria. Così si userà una massa arbitraria per unità di massa, una lunghezza e un tempo arbitrari per unità di lunghezza e di tempo. Si possono conservare come prototipi le grandezze scelte per unità di massa e di lunghezza; l'unità di tempo si può sempre riprodurre tanto coll'uso del pendolo, quanto mediante le osservazioni astronomiche. Ma certe unità, come ad esempio quelle di velocità o di accelerazione, non si possono conservare ed è sempre assai difficile riprodurle. Onde queste quantità sono così collegate colle unità fondamentali arbitrarie di massa, di lunghezza e di tempo, che esse possono facilmente e subito essere dedotte da queste. Queste unità sono chiamate *derivate* od *assolute*. Quest'ultima denominazione è dovuta a Gauss, che per il primo fece dipendere le unità magnetiche dalle unità meccaniche, e così fu possibile un *confronto universale* delle misure magnetiche. Essa ha dunque una ragione storica.

Come unità di velocità possiamo scegliere la velocità, che farebbe percorrere q unità di lunghezza nell'unità di tempo. Ma allora la relazione fra il tempo t, lo spazio s e la velocità v non si potrebbe più scrivere sotto la forma ordinaria $s = vt$, ma sarebbe sostituita dalla $s = qvt$. Per potere conservare la forma $s = vt$ bisogna definire l'unità di velocità come la velocità che fa percorrere l'unità di lunghezza nell'unità di tempo. Si scelgono le unità derivate in modo che ne risultino le relazioni più semplici fra le grandezze che esse servono a misurare; così ad esempio come unità di superficie e di volume si sceglierà sempre il quadrato ed il cubo costruiti sopra l'unità di misura presa come lato.

Quindi, secondo questo principio, ammettiamo che l'unità di velocità fa percorrere l'unità di lunghezza nell'unità di tempo, che l'unità di accelerazione aumenta la velocità dell'unità di velocità nell'unità di tempo, che l'unità di forza imprime all'unità di massa l'unità di accelerazione, ecc.

Le unità derivate dipendono dalle unità fondamentali arbitrarie; esse sono funzioni di queste; la funzione particolare che corrisponde ad un'unità derivata data si chiama la sua *dimensione*. La teoria delle dimensioni fu stabilita da Fourier nella sua teoria del calore (1822). Rappresentando la lunghezza, il tempo e la massa rispettivamente con l, t ed m, la dimensione dell'unità di velocità ad esempio sarà $\frac{l}{t}$ ossia lt^{-1} Dopo questa spiegazione si comprenderà facilmente la tabella seguente:

Nomi	Simboli	Dimensioni
Velocità	v	lt^{-1}
Accelerazione . .	φ	lt^{-2}
Forza	p	mlt^{-2}
Quantità di moto	mv	mlt^{-1}
Impulso	pt	mlt^{-1}
Lavoro	ps	ml^2t^{-2}
Forza viva	$\frac{1}{2}mv^2$	ml^2t^{-2}
Momento d'inerzia	Θ	ml^2
Momento statico	D	ml^2t^{-2}.

La semplice ispezione di questa tabella mostra che le equazioni, di cui si è parlato più sopra, sono effettivamente *omogenee*, cioè che i due membri sono *della stessa specie*. Similmente riuscirà facile di trovare la dimensione di ogni nuova espressione che s'introducesse in meccanica.

7. La conoscenza delle dimensioni di una quantità è importante anche per un'altra ragione. Il valore numerico di una grandezza essendo noto per certe unità fondamentali determinate, la conoscenza della dimensione ci farà trovare facilmente il suo nuovo valore, quando si cambieranno le unità fondamentali. La dimensione di un'accelerazione, che ad esempio ha il valore numerico φ, è lt^{-2}. Se si cambiano le unità, e se prendiamo per

unità di lunghezza e di tempo rispettivamente γ e τ volte maggiori delle precedenti, nella dimensione lt^{-2} si dovrà sostituire ad l ed a t de' numeri rispettivamente λ e τ volte minori. Il valore numerico della stessa accelerazione nelle nuove unità fondamentali sarà dunque $\frac{\varphi}{\lambda \tau^{-2}} = \frac{\tau^2}{\lambda} \cdot \varphi$. Si sa che se si prende il metro ed il minuto secondo per unità di lunghezza e di tempo, l'accelerazione della gravità è rappresentata dal numero 9,81, o, come ordinariamente la si scrive, indicando ad un tempo la dimensione e le unità fondamentali: $9{,}81 \cdot \frac{\text{metro}}{\text{secondo}^2}$. Ora si prenda il chilometro per unità di lunghezza ($\lambda = 1000$), ed il minuto primo per unità di tempo ($\tau = 60$), il valore numerico dell'accelerazione della gravità diviene $\frac{60 \cdot 60}{1000} \cdot 9{,}81$ o $35{,}316 \cdot \frac{\text{Km.}}{\text{Minuto}^2}$.

8. L'unità di lunghezza, il cui uso presentemente è più generale, è il *metro* (lunghezza a 0° C. di un regolo di platino conservato a Parigi, circa $\frac{1}{10^7}$ di un quadrante del meridiano terrestre). Come unità di tempo si adopera il *secondo* (di tempo solare medio, qualche volta anche di tempo siderale). Secondo le considerazioni che precedono, si prenderanno quindi per unità di velocità e di accelerazione, la velocità per cui 1 metro è percorso in 1 secondo e l'accelerazione che corrisponde ad un incremento di velocità di una unità per secondo.

Esistono delle divergenze rispetto alla scelta delle unità di *massa* e di *forza*. Se si prende per unità di *massa* il chilogrammo-massa (massa di un pezzo di platino conservato negli Archivi della Commissione internazionale dei pesi e misure nel padiglione di Breteuil — circa la massa di un decimetro cubo di acqua a 4° C.), la forza che attrae questo chilogrammo verso il centro della Terra non è 1, ma bensì g, poichè è $p = mg$; dunque a Parigi questa forza è 9,808; sotto altre latitudini è alquanto differente. L'unità di forza è allora la forza, che comunica alla massa di 1 kg. un incremento di velocità di 1 m.

per secondo; l'unità di lavoro è il lavoro fatto da questa forza sopra un percorso di 1 m. di lunghezza, ecc. Questo sistema logico di unità, in cui la *massa* del kg. si fa eguale ad 1, si chiama ordinariamento *assoluto*.

Il sistema di unità, cui si dà il nome di *terrestre*, assume come unità di forza la forza, con cui la massa del pezzo di platino, chiamato chilogrammo, è a Parigi attratto verso la Terra. Se si vuole allora conservare il rapporto semplice $p = mg$, non si può più considerare la massa di questo kg. come eguale ad 1: essa è uguale a $\frac{1}{g}$. Quindi bisogna prendere g ossia 9,808 volte questo kg. per formare una unità di massa. Lo stesso kg., trasportato in un altro luogo A della Terra, ove l'intensità della gravità è g', non è più attratta da una forza 1, ma da una forza $\frac{g'}{g}$. In questo luogo quindi occorre $\frac{g}{g'}$ di kg. per formare l'unità di forza. Se si prendono allora g' di questi corpi, che in A pesano 1 kg., si avrà di nuovo g volte la massa del kg., cioè la massa 1. Se in A si ha un corpo che a Parigi pesa 1 kg., evidentemente bisogna prendere g di questi corpi e non g' per formare una unità di massa.

Un corpo, che a Parigi nel vuoto pesa p kg., ha la massa $\frac{p}{g}$. Se pesa p kg. in A, esso ha la massa $\frac{p}{g'}$. La differenza fra g e g' può in molti casi passare inosservata, ma bisogna per altro tenerne conto, quando il problema richiede un po' di precisione.

Le altre unità del sistema terrestre sono naturalmente determinate dalla scelta delle unità di forza. L'unità di lavoro è quindi il lavoro di 1 kg. sopra un cammino di 1 m., ed è stato dato ad esso il nome di chilogrammetro. La forza viva unitaria è quella generata dall'unità di lavoro, ecc.

Si osservi alla latitudine di 45° ed al livello del mare la caduta di un corpo, che a Parigi pesa nel vuoto p kg. L'accele-

razione dovuta alla gravità è 9,806. Nel sistema assoluto si hanno p unità di massa, su cui agiscono 9,806 p unità di forza; ma nel sistema terrestre si ha una massa $\frac{p}{9,808}$, sollecitata da una forza $p \cdot \frac{9,806}{9,808}$ unità di forza. Per un'altezza di caduta di 1 m. il lavoro prodotto e la forza viva acquistata sono nel sistema assoluto $1,806 \cdot p$, e nel sistema terrestre $\frac{9,806}{9,808} \cdot p$. L'unità di forza del sistema terrestre è in cifre tonde 10 volte maggiore di quella del sistema assoluto; lo stesso rapporto esiste fra le unità di massa. La misura di un lavoro od una forza viva nota è data nel sistema terrestre da un numero circa 10 volte minore che nel sistema assoluto.

Inoltre osserveremo che invece del kg. e del m. per unità di massa e di lunghezza in Inghilterra ordinariamente si scelgono il g ed il cm., ed in Germania il mg. ed il mm. Ciò che si è detto più sopra permette di passare facilmente dall'uno all'altro di questi sistemi. La circostanza che in meccanica, come negli altri rami della fisica intimamente collegati ad essa, si debbono considerare solo tre grandezze fondamentali: lo spazio, il tempo e la massa, dà origine ad una semplificazione e ad una facilità notevoli per lo scopo generale.

III. *Teoremi sulla conservazione della quantità di moto sul moto del centro di gravità e sulla conservazione delle aree.*

1. Quantunque i principii di Newton siano sufficienti per risolvere tutti i problemi della meccanica, tuttavia è assai comodo di stabilire regole particolari, applicabili a frequenti casi, che esse permettono di trattare secondo un metodo uniforme, ma senza approfondirne i particolari. Molte di queote regole furono sviluppate da Newton stesso e dai suoi successori. Innanzi tutto

ci occuperemo dei teoremi di Newton sui sistemi materiali *intieramente liberi.*

2. Supponiamo che due masse libere m ed m' siano sottoposte a forze derivanti da *altre* masse e agenti secondo la retta congiungente $m\ m'$. Siano v e v' le velocità conseguite alla fine del tempo t. Sommando membro a membro le due equazioni:

$$p\,t = m\,v \quad \text{e} \quad p\,t' = m'v'$$

si ha:

$$(p + p')\,t = m\,v + m'v'.$$

In questa equazione le forze o velocità dirette in *direzioni opposte* sono affette da *segni contrari.* Il secondo membro $m\,v + m'v'$ ha ricevuto il nome di *quantità di moto* del sistema. Se ora supponiamo che, oltre le forze *esterne* p e p', le forze *interne* sollecitino le masse m ed m', cioè le forze provenienti dalle reazioni *reciproche* delle masse l'una sull'altra, queste forze sono eguali e direttamente opposte, e si possono rappresentare con q e $-q$. La somma degli impulsi è:

$$(p + p' + q - q)\,.\,t = (p + p')\,t;$$

si vede che essa è sempre la stessa, e quindi la quantità di moto del sistema rimane pure uguale. Onde consegue che la quantità di moto di un sistema è determinata unicamente dalle forze *esterne*, cioè dalle forze con cui le masse poste fuori del sistema sollecitano le masse del sistema.

Consideriamo parecchie masse libere m, m', m'' . . ., distribuite in un modo qualunque nello spazio, sottoposte alle forze esterne p, p', p'' . . . di direzioni arbitrarie, e siano v, v', v'' . . . le velocità rispettive conseguite alla fine del tempo t. Si immaginino le forze e le velocità scomposte secondo tre direzioni rettangolari x, y, z. La somma degli impulsi secondo l'asse delle x sarà eguale alla somma delle quantità di moto conseguite in questa direzione, e così per gli altri assi. Ora supponiamo che fra le masse m, m', m'' . . . agiscano inoltre delle coppie di forze

interne eguali ed opposte: q, $-q$; r, $-r$; s, $-s$; ...; queste ultime dànno secondo qualunque direzione coppie di componenti eguali ed opposte, e quindi non influiscono in nulla sulla somma degli impulsi. Dunque le forze esterne determinano esclusivamente la quantità di moto. Questa legge ha ricevuto il nome di *teorema della conservazione della quantità di moto.*

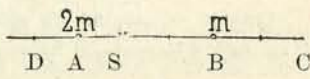
3. Un'altra forma dello stesso teorema è stata chiamata *teorema del moto del centro di gravità.* Immaginiamo (fig. 149) in A e B due masse $2m$ ed m, che agiscono l'una sull'altra; ad esempio per repulsione elettrica; sia S il loro baricentro, dato da BS = 2AS. Le accelerazioni che si comunicano queste masse fra loro sono opposte e nel rapporto inverso di queste stesse masse; dunque se questa repulsione fa descrivere a $2m$ lo spazio AD, essa farà descrivere ad m lo spazio BC; ma il punto S rimane sempre centro di gravità, poichè è CS = 2DS. Dunque due masse non possono *spostare* il loro centro di gravità comune mediante un'*azione reciproca* qualunque. Ora consideriamo parecchie masse distribuite in modo qualunque nello spazio; due qualunque di esse non possono spostare il loro centro di gravità; onde il centro di gravità dell'intiero sistema non può essere spostato dalle azioni reciproche.

2m m
D A S B C

Fig. 149.

Abbiasi un sistema di masse libere m, m', m'' ..., sottoposte a forze *esterne* qualunque. Riferiamo questo sistema e le forze, che agiscono su di esso, a tre assi coordinati rettangonali; ed indichiamo con x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; ... le coordinate dei punti. Quelle del baricentro sono allora:

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m g},$$

in cui x, y, z possono cambiare uniformemente, od in un modo uniformemente accelerato o con qualunque altra legge, secondo

che la massa corrispondente è sottoposta o ad una forza esterna nulla, o costante o variabile. In questi diversi casi il centro di gravità sarà animato da moti diversi, e nel primo può essere anche immobile. Se ora s'introducono forze *interne*, che ad esempio agiscono fra ogni coppia di masse m' ed m'', queste forze generano gli spostamenti opposti ω' e ω'', diretti secondo la retta congiungente $m'm''$, e tali che si ha, tenendo conto de' segni:

$$m' . \omega' + m'' . \omega'' = o .$$

Questa equazione ha luogo anche per le componenti x_1 ed x_2 di questi spostamenti secondo una direzione qualunque, cioè:

$$m'x_1 + m''x_2 = o .$$

Le forze interne quindi aggiungono alle espressioni di ξ, η, ζ solo termini di questa specie, che si distruggono fra loro. Le forze esterne perciò determinano unicamente il *moto del centro di gravità* del sistema.

La condizione delle accelerazioni dei punti del sistema ci offrono il mezzo per determinare l'accelerazione del baricentro. Siano φ, φ', φ'' ... le accelerazioni delle masse m, m', m'' ..., misurate secondo una direzione qualunque, e Φ l'accelerazione del loro baricentro, calcolata secondo la stessa direzione. Allora si ha:

$$\Phi = \frac{\Sigma m \varphi}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m \varphi}{M},$$

indicando con M la massa totale Σm del sistema. Onde per ottenere l'accelerazione del baricentro, secondo una direzione qualunque, basta dividere la somma delle componenti delle forze secondo questa direzione per l'intiera massa del sistema. Quindi il baricentro si muove come se tutte le forze e tutte le masse fossero concentrate in esso. Precisamente come una massa non può acquistare alcuna accelerazione senza l'intervento di una forza esterna, così se non avvi una forza esterna, il centro di gravità del sistema non può acquistare alcuna accelerazione.

4. Ora alcuni esempi ci permetteranno di comprendere chiaramente il significato del teorema del moto del baricentro. Immaginiamo un animale *libero* nello spazio. Quando esso mette una parte m della sua massa in moto in una certa direzione, il resto M di esso si muoverà subito in direzione contraria, talchè il baricentro resta nella sua posizione primitiva. Se l'animale ritira la massa m, anche la massa M invertirà il suo movimento. Senza l'intervento di un appoggio o di una forza esterna, l'animale non può da sè stesso cambiare di posto, nè cambiare i movimenti, che gli fossero impressi dal di fuori.

Un leggero veicolo A, carico di sassi, si muove sopra delle rotaie. Un operaio, che sta sopra di esso, getta via una dopo l'altra le pietre nella stessa direzione. Il baricentro del sistema (del veicolo + i sassi) rimane fisso nello stesso punto, finchè il moto non venga arrestato da ostacoli esterni. Se l'operaio prendesse sassi dal di fuori e li mettesse nel veicolo, il veicolo allora si porrebbe in moto, ma più lentamente, come lo vedremo nell'esempio seguente.

Un proietto di massa m esce con la velocità v da un cannone di massa M, che perciò consegue una velocità V tale, che si avrà, tenendo conto de' segni:

$$M \cdot V + mv = o;$$

ciò spiega il fenomeno del rinculo; dall'equazione precedente si ricava:

$$V = -\frac{m}{M} v;$$

quindi il rinculo è tanto minore, quanto è maggiore la massa del cannone rispetto a quella del proietto. Sia A il lavoro fatto dalla polvere; il teorema delle forze vive dà:

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 = A;$$

da cui, tenendo conto dell'equazione precedente, la quale ci dice che la somma delle quantità di moto è nulla, si ha:

$$V = \sqrt{\frac{2 \, . \, A \, . \, m}{M \, . \, (M + m)}} \, .$$

Quindi trascurando la massa della polvere il rinculo scompare quando si annulla la massa del proietto. Se la massa m non fosse emessa dal cannone, ma invece vi fosse introdotta, per esempio vi fosse aspirata, il rinculamento avverrebbe in direzione opposta; ma allora non avrebbe il tempo necessario per divenire percettibile, poichè prima che il cannone abbia percorso un cammino sensibile, la massa m sarebbe giunta in fondo. Ora, giacchè M ed m sono invariabilmente connesse fra loro, cioè sono in riposo *relativo* l'una rispetto all'altra, esse debbono essere per lo stesso fatto in riposo *assoluto*, poichè il centro di gravità del sistema dei due corpi non è animato da alcun moto. Per la stessa ragione non si può verificare nessun moto notevole, introducendo de' sassi nel veicolo dell'esempio precedente. Infatti, poichè i sassi ed il veicolo sono invariabilmente connessi fra loro, le quantità di moto di segni opposti, che erano state prodotte, si distruggono. Un cannone potrebbe ricevere un rinculo sensibile, aspirando un proiettile, solo quando quest'ultimo lo potesse attraversare da parte a parte, e potesse continuare il suo moto. L'operaio, di cui ora parliamo, potrebbe pure fare procedere notevolmente il suo carro, prendendo dalla parte davanti i sassi dal di fuori, e gettandoli lontano dalla parte posteriore.

S'immagini una locomotiva, che sia *liberamente sospesa* o si trovi sopra delle rotaie, che presentino un piccolissimo attrito. Mediante il teorema del moto del centro di gravità, appena le masse pesanti di ferro connesse con lo stantuffo incominciano ad oscillare, l'intiera massa della locomotiva si mette ad oscillare in direzione contraria. Ad evitare queste oscillazioni, che turberebbero di molto l'uniformità del moto in avanti della macchina,

si è pensato di compensare il moto delle masse connesse collo stantuffo per mezzo del moto in direzione contraria delle altre masse; talchè il baricentro del corpo della locomotiva rimane allo stesso punto, quando non avvi il moto in avanti. Nella pratica queste masse compensatrici consistono di pezzi di ferro fissati nei raggi delle ruote motrici.

L'elettromotore di Page (fig. 150) ci offre un fenomeno assai elegante di questo genere. Quando l'asse del rocchetto AB è

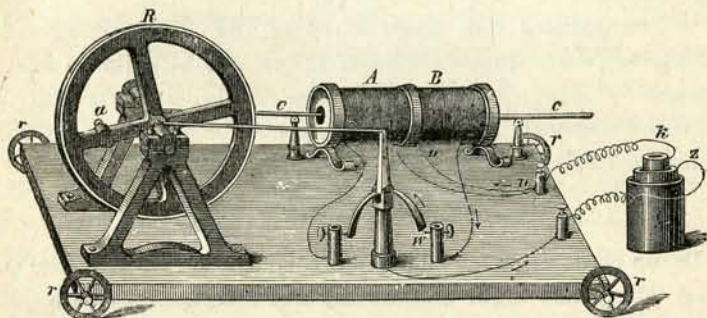



Fig. 150.

attratto verso destra dalle forze sviluppate fra il rocchetto e l'asse, l'intiero motore, che si trova sopra piccole ruote *rr*, si sposta dalla parte sinistra. Ma si può impedire questo movimento totale dell'apparato, disponendo convenientemente sopra uno dei raggi R della ruota un contrappeso mobile *a*, che si muove sempre in direzione contraria all'asse di ferro.

Non si conosce nessun particolare sul moto delle scheggie di una bomba, ma il teorema del moto del baricentro fa vedere che, fatta astrazione della resistenza dell'aria e di tutte le altre perturbazioni, il centro di gravità delle schegge continua a percorrere la traiettoria parabolica primitiva.

5. Il *teorema della conservazione delle aree* è intimamente connesso con quello del moto del baricentro, e si applica, come esso, ai sistemi *liberi*. Quantunque Newton abbia, per così dire,

avuto tra mani questo teorema, tuttavia assai dopo fu enunciato da Eulero, D'Arcy e Daniele Bernoulli. Eulero e D. Bernoulli lo scoprirono quasi contemporaneamente (1746) in occasione di un problema proposto da Eulero sul moto delle sfere in tubi che avevano un moto di rotazione. Essi vi furon condotti per mezzo della considerazione delle azioni e delle reazioni fra le sfere ed i tubi. D'Arcy (1747) prese le mosse dalle ricerche di Newton e generalizzò la legge dei settori, di cui si era servito Newton per ispiegare le leggi di Keplero.

Immaginiamo due masse m ed m' (fig. 151) che agiscono l'una sull'altra. Questa reciproca azione, che sollecita da *sola* le masse m ed m', le fa percorrere secondo la loro retta congiungente i segmenti AB e CD, che, tenendo conto dei segni, soddisfano l'equazione:

$$m \, . \, \mathrm{AB} + m' \, . \, \mathrm{CD} = o \, .$$

Da un punto esterno qualunque O conduciamo i raggi vettori OA ed OB; dando segni contrari alle aree descritte in sensi opposti dai raggi vettori, avremo:

$$m \, . \, \mathrm{OAB} + m' \, . \, \mathrm{OCD} = o \, .$$

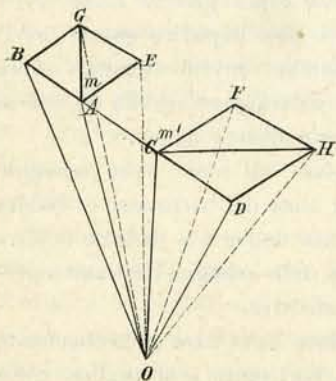



Fig. 151.

Quindi si vede che, quando due masse agiscono l'una sull' altra, e si conducono i raggi vettori, che le uniscono con un punto esterno qualunque, la somma dei prodotti delle aree dei settori descritti da questi raggi, moltiplicate per le masse corrispondenti, è uguale a zero. Ora supponiamo che delle forze esterne, che agiscono sui punti m ed m', facciano descrivere nello stesso lasso di tempo i settori OAE ed OCF. Le forze esterne ed interne, che agiscono contemporaneamente durante

un tempo piccolissimo, faranno descrivere i settori OAG ed OCH; e si avrà pel teorema di Varignon:

$$m \,.\, \mathrm{OAG} + m' \,.\, \mathrm{OCH} = m \,.\, \mathrm{OAE} + m' \,.\, \mathrm{OCF} + m \,.\, \mathrm{OAB} + \\ + m' \,.\, \mathrm{OCD} = m \,.\, \mathrm{OAE} + m' \,.\, \mathrm{OCF},$$

cioè: *la somma dei prodotti delle aree dei settori descritti, moltiplicate per le masse corrispondenti, non sono alterate dalle forze interne.*

Quando abbiamo parecchie masse, si può enunciare lo stesso teorema per le proiezioni dell'intiero movimento sopra un dato piano e rispetto a due qualunque delle masse del sistema considerate complessivamente. In questo caso se, a partire da un punto qualunque, si conducano i raggi vettori di tutte le masse del sistema, e se si proiettano sopra un piano qualunque le aree che essi descrivono, si vedrà che la somma dei prodotti di queste aree proiettate, moltiplicate per le masse corrispondenti, è indipendente dalle forze interne. Questo è il *teorema della conservazione delle aree.*

Se una massa isolata, su cui non agisce alcuna forza, si muove uniformemente in linea retta, l'area descritta dal raggio vettore, congiungente questo punto materiale ad un punto O qualunque, cresce proporzionalmente al tempo. Quando si muovono più masse, senza essere sottoposte a forze, questa stessa legge si verifica per Σmf, ove il segno Σ si estende a tutti i prodotti delle aree per le masse corrispondenti; a questa somma Σmf per brevità si darà il nome di *somma delle aree.* L'introduzione delle forze *interne*, che agiscono fra le diverse masse del sistema, non cambia nulla in questa proposizione. Le ricerche di Newton fanno vedere che questa relazione esiste ancora, quando i punti materiali sono sottoposti a forze *esterne,* la cui direzione passa costantemente per il *punto fisso* O.

Se una forza esterna agisce sopra un punto materiale, l'area f, descritta dal raggio vettore, cresce col tempo secondo la legge;

$$f = \frac{1}{2} at^2 + bt + c,$$

ove a dipende dall'accelerazione, b dalla velocità iniziale e c dalla posizione iniziale. La stessa legge si verifica per parecchie masse sottoposte a forze esterne, purchè queste possono essere riguardate come costanti, come sempre avviene per tempi abbastanza piccoli. In tal caso la legge delle aree consiste in questo: che le forze *interne* del sistema non hanno *nessuna influenza* sull'aumento della somma delle aree.

Si può considerare un corpo solido come un sistema di masse, i cui elementi sono mantenuti nelle posizioni relative fisse mediante forze interne. Quindi si può ad esso applicare il principio delle aree. La rotazione uniforme di un solido attorno ad un asse, che passa per il baricentro, ce ne porge un esempio assai semplice. Sia m un elemento di massa di questo corpo, r la sua distanza dall'asse, a la velocità angolare; la somma delle aree descritte nell'unità di tempo è:

$$\Sigma m \, . \, \frac{r}{2} \, . \, ra = \frac{a}{2} \, \Sigma mr^2 ,$$

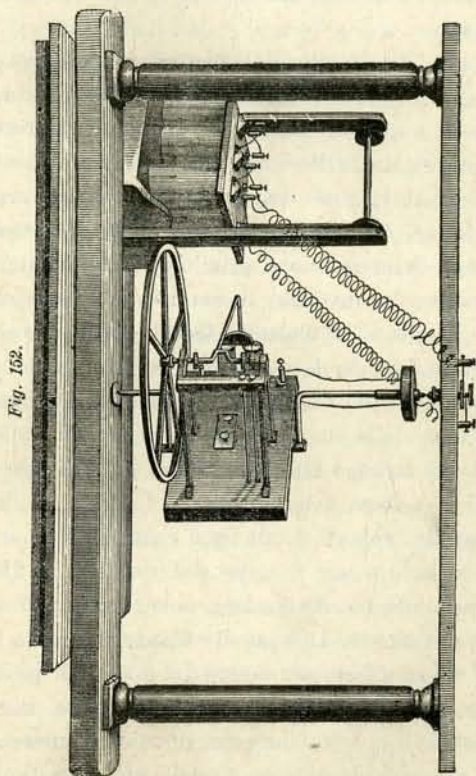
prodotto dal momento d'inerzia per la metà della velocità angolare. Quindi questo prodotto può solo cambiare mediante forze esterne.

6. Alcuni esempi faranno meglio comprendere ancora il teorema di cui ci occupiamo.

Abbiansi due corpi solidi K e K′ connessi fra loro; se delle forze interne, che agiscono su K e K′, dànno al primo una rotazione relativa rispetto al secondo, K′ immediatamente prenderà un moto di rotazione in direzione opposta. Infatti una rotazione di K genera una somma di aree che, secondo il teorema, deve essere composta da una somma di aree di segno contrario descritte da K′. L'apparecchio seguente ci offre questo esperimento in modo assai ingegnoso. Un elettromotore (fig. 152) qualunque, munito di un volante orizzontale, può ruotare intorno ad un asse verticale. I fili conduttori della corrente pescano in due cassette coassiali di mercurio fissate sull'asse per non disturbare la

rotazione. Il corpo K′ del motore è attaccato con un filo al sostegno che sorregge l'asse; il circuito allora è chiuso e la corrente passa. Appena che il volante, visto dall'alto, incomincia a ruotare nella direzione delle lancette di un orologio, si *tende* il filo, il corpo del motore presenta la tendenza a *ruotare nella direzione opposta,* e si verifica questa rotazione appena si taglia il filo.

Il motore rispetto all'asse di rotazione è un sistema libero;

Fig. 152.

e siccome esso è in riposo, la somma delle aree è nulla. Mettendosi il *volante* a ruotare, sotto l'influenza delle forze elettro-magnetiche interne, che si producono fra l'armatura ed il ferro,

si genera una somma di aree, la quale deve essere compensata *dalla rotazione del corpo del motore*, poichè la somma totale delle aree deve rimanere nulla. S'impedisca al corpo del motore di ruotare, attaccandovi un indice, che viene mantenuto in una posizione determinata da una molla elastica. Ogni accelerazione del volante nella direzione delle lancette di un orologio (prodotta mediante un'immersione maggiore delle lamine della batteria) dà origine ad uno spostamento dell'indice in direzione contraria, ed ogni rallentamento produce uno spostamento nella stessa direzione.

Se si apre il circuito del motore, si osserva un fenomeno curioso. Da prima il volante ed il motore continuano i loro moti in direzioni opposte; poi subito, mediante l'attrito, entrambi assumono gradualmente il riposo relativo l'uno rispetto all'altro. Si vede rallentare il moto del corpo del motore, arrestarsi un istante, ed infine, conseguito il riposo relativo, mettersi in moto nella direzione della rotazione primitiva del volante. Quindi il corpo del motore ha invertito il suo moto e l'*intiero motore* ora ruota nella direzione del volante. Questo fenomeno si spiega facilmente. Il motore non è un sistema *perfettamente* libero: esso è impedito dall'attrito dell'asse. In un sistema perfettamente libero la somma delle aree dovrebbe ritrovarsi eguale a zero, quando le parti saranno ritornate al loro stato di riposo relativo; ma qui avvi una forza esterna, che è l'attrito dell'asse. L'attrito sull'asse del volante diminuisce egualmente la somma delle aree per il volante e per il corpo del motore; ma l'attrito sull'asse di quest'ultimo diminuisce solo la somma delle aree relativa a quest'ultimo. Dunque il volante conserva un eccesso di aree che si manifesta per mezzo del moto dell'intiero motore, quando le sue parti abbiano conseguito lo stato di riposo relativo. L'insieme di questo fenomeno, dovuto all'interruzione della corrente, è un esempio analogo a quello che gli astronomi hanno supposto che si verifichi nel caso della Luna. La Terra produrrebbe sulla Luna un'onda di marea, che, a causa dell'attrito, rallenterebbe la velocità di rotazione di quest'ultima, sebbene la

durata del giorno lunare sia divenuta di un mese. Il volante rappresenta la massa liquida mossa dalla marea.

Un altro esempio del teorema delle aree è fornito dalle *ruote a reazione*. Quando dai raggi incurvati dell'apparecchio della figura 153 *a* esce, nella direzione indicata dalla freccia, l'aria od un gas qualunque, l'intiero apparecchio incomincia a ruotare nella direzione della freccia maggiore. La figura 153 *b* rappresenta un'altra ruota a reazione semplicissima. Un pezzo di tubo di rame *rr*, chiuso alle due estremità ed avente dei fori convenientemente distribuiti, è fissato sopra un braccio di un secondo tubo di rame R, mediante un pernio, intorno al quale può girare *rr*. L'area, che passa per il pernio, esce dalle aperture *o* ed *o'*.

Si potrebbe supporre che, *aspirando* del gaz, mediante una ruota a reazione, la si facesse *ruotare* in *direzione contraria* alla rotazione prodotta dall'uscita del gaz. Però in generale questo non si verifica; come si scorge facilmente l'aria aspirata dai raggi della ruota deve subito prender parte al moto dell'apparato e si mette così in riposo relativo rispetto alla ruota; la somma delle aree dell'insieme non può quindi rimanere nulla. In generale l'aspirazione del gaz non produce alcuna rotazione percettibile. Questo fenomeno è analogo a quello del non rinculo di un cannone, in cui s'introduce un proietto. Se si fa comunicare la ruota a reazione con una palla elastica, munita di un sol tubo di comunicazione (fig. 153 *a*), la quale si comprime periodicamente in modo, che la stessa quantità di aria sia alternativamente aspirata, poi emessa, si vede che la ruota si muove rapidamente nella stessa direzione, come se l'aria fosse unicamente emessa. Questo fenomeno è dovuto in parte al fatto che l'aria aspirata, che partecipa subito al moto della ruota, non può produrre alcuna rotazione di reazione, ed in parte alla differenza dei moti dell'aria esterna, secondo che l'aria esce o entra per le ruote. Quando l'aria è emessa, essa esce per i raggi con un moto di rotazione; quando è aspirata, essa si precipita da tutte le parti senza rotazione verso l'apertura.

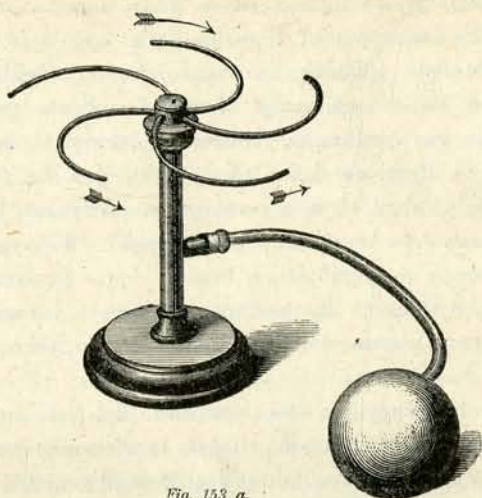



Fig. 153 a.

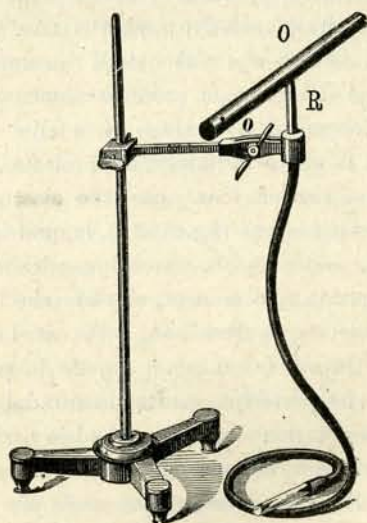



Fig. 153 b.

È facile dimostrare l'esattezza di questa spiegazione. Si prenda un cilindro di legno, o, ad esempio, una scatola cilindrica di cartone, il cui fondo sia munito di fori. Si ponga questo cilindro sul pernio del tubo R, dopo averlo tagliato secondo una generatrice e dopo aver ripiegato le sue pareti, come si vede nella figura 154. Se si soffia nel cilindro, esso incomincerà a muoversi nella direzione della freccia maggiore; se invece si aspira si muoverà nella direzione indicata dalla freccia minore. In quest' ultimo caso infatti l'aria, entrando *liberamente,* continuerà la sua rotazione, e questo moto è quindi compensato da una rotazione in direzione contraria del cilindro.

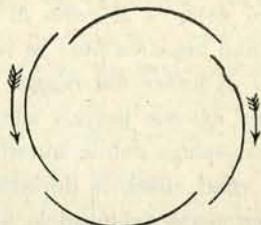



Fig. 154.

7. I fenomeni seguenti sono analoghi. Si prenda un tubo rettilineo (fig. 155 *a*) da *a* a *b*, ripiegato ad angolo retto da *b* a *c*, poi incurvato secondo una circonferenza *c d e f* di centro *b*, il cui piano è perpendicolare ad *ab*,

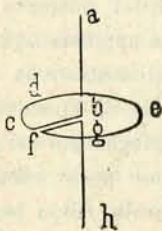



Fig. 155 a.

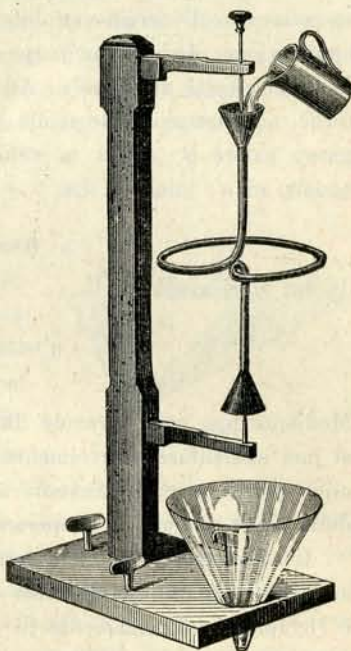



Fig. 155 b.

ripiegato allora ad angolo retto secondo *fg*, ed infine continuante la retta *ab* secondo *gh*. L'intiero tubo può ruotare intorno

all'asse *ah*. Si versi un liquido in questo tubo (fig. 155 *b*); esso percorre il cammino *cdef*, e subito vedesi il tubo ruotare nella direzione *fedc*. Questo impulso però cessa all'istante, in cui il liquido arriva nel punto *f*, e deve partecipare al moto del raggio *gh*, da cui esce. Se il getto di acqua è continuo, allora la rotazione del tubo cessa subito; se esso è interrotto, allora l'acqua, cessando di uscire dal raggio *fg*, dà al tubo un impulso nella direzione del suo proprio moto secondo *cdef*. Col principio delle aree si spiega subito questo fenomeno.

I venti alisei, le deviazioni delle correnti marine e dei fiumi, l'esperimento del pendolo di Foucault, ecc., si possono considerare come esempî del principio delle aree. I corpi, che hanno un momento d'inerzia variabile, ne offrono ancora una curiosa applicazione. Abbiasi un corpo di momento d'inerzia Θ, animato di una velocità angolare a. Ad un certo istante delle forze interne, ad esempio delle molle, dànno al momento di inerzia un nuovo valore Θ'; allora la velocità angolare cambia e diviene eguale ad a', talchè si ha:

$$a \,.\, \Theta = a' \,.\, \Theta';$$

da cui si ricava:

$$a' = a \,.\, \frac{\Theta}{\Theta'}.$$

Mediante una considerevole diminuzione del momento d'inerzia si può aumentare notevolmente la velocità angolare. Questo principio potrebbe probabilmente servire a dimostrare la *rotazione* della Terra invece di adoperare il pendolo di Foucault.

L'osservazione ora fatta fornisce la spiegazione del fenomeno seguente: un imbuto di vetro col suo asse posto verticalmente è riempito istantaneamente di un liquido in modo però che la corrente non entri per l'asse, ma lateralmente. Questo moto produce nel liquido una lenta rotazione, che non si vede prima che sia riempito l'imbuto; ma quando il liquido esce dal collo, il suo momento d'inerzia diminuisce notevolmente, e ne consegue un

incremento di velocità angolare così grande, che si forma con una depressione assiale un violento vortice. Frequentemente si verifica pure che la corrente liquida, uscendo dall'imbuto, venga intieramente attraversata da una colonna d'aria.

8. Un accurato esame del teorema del moto del centro di gravità e di quello delle aree fa vedere che entrambi sono espressioni di una proprietà meccanica *ben nota,* espressioni assai comode per le applicazioni che uno si prefigge. All'accelerazione φ di una massa m corrisponde sempre l'accelerazione φ' di una massa m', talchè si ha, tenendo conto dei segni:

$$m\varphi + m'\varphi' = o.$$

La forza $m\varphi$ corrisponde alla reazione $m'\varphi'$. Quando le masse m e $2m$, animate dalle accelerazioni 2φ e φ, percorrono gli spazî (fig. 156) 2ω e ω, il loro baricentro S rimane invariabile, e la somma delle aree rispetto ad un punto qualunque è:

$$2m \,.\, f + m \,.\, 2f = o\,.$$

Allorchè si presenta il teorema delle aree sotto questa semplice forma, si riconosce che il *teorema del moto del centro di gravità* esprime in *coordinate cartesiane* ciò che esprime il *teorema delle aree in coordinate polari,* e che entrambi contengono semplicemente il fatto della reazione.

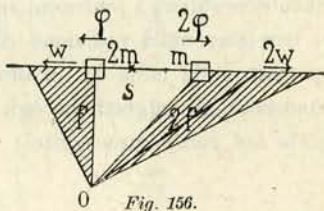



Fig. 156.

Inoltre si può dare ad essi un altro semplice significato. Come un corpo non può senza l'intervento di una forza esterna, cioè senza l'aiuto di altri corpi, cambiare il suo moto uniforme di traslazione o di rotazione, così un sistema di corpi non può senza l'aiuto di un altro sistema, che in qualche modo gli serva per così dire di presa e ad un tempo di sostegno, cambiare ciò che chiameremo il suo moto *medio* di traslazione e di rotazione, servendoci per brevità di una espressione che sarà stata com-

presa compiutamente dietro in seguito alle spiegazioni particolareggiate che abbiamo date. Dunque questi due teoremi contengono una *generalizzazione del principio d'inerzia*, dei quali sotto questa forma si comprende ed anzi di più si *sente* l'esattezza.

Questo sentimento non è in alcun modo antiscientifico e non può arrecare alcun danno. Esso non *si sostituisce* alla concezione astratta, ma esiste accanto ad essa, ed il *completo* possesso dei fatti meccanici si fonda in primo luogo su essa. Come l'ho detto altrove (1), noi non siamo altro col nostro intiero organismo che un sistema meccanico, e questo fatto ha una profonda influenza sulla nostra vita fisica. Nessuno ci potrà convincere che la considerazione dei fenomeni meccanico-fisiologici, che riguardano i sentimenti e gl'istinti, sia estranea alla meccanica scientifica. Se si conoscessero i teoremi come quelli del moto del baricentro e delle aree solo sotto la loro forma matematica astratta, senza averli confrontati coi fatti semplici e sensibili, che sono la loro applicazione immediata e la sorgente ove l'uomo li ha attinti, si comprenderebbero solo a metà, ed appena si riconoscerebbero i fenomeni reali come esempî della teoria. Allora ci troviamo nella posizione di un uomo, che bruscamente trasportato sulla cima di un'alta torre, non può, per così dire, riconoscere gli oggetti che egli vede, perchè egli non ha mai viaggiato nel paese circostante.

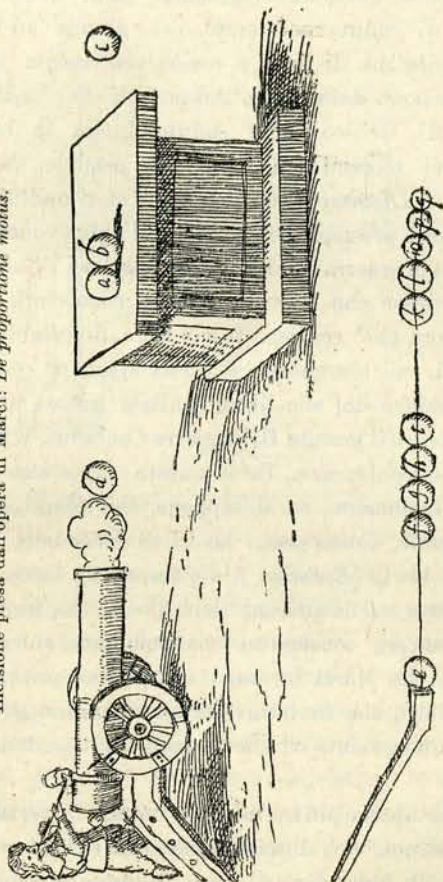
IV. *Le leggi dell'urto.*

1. Le leggi dell'urto porsero occasione alla scoperta dei principii più importanti della meccanica, e fornirono anche i primi esempî delle applicazioni dei principii di questa specie. Già un contemporaneo di Galileo, Marco Marci (nato nel 1595),

---

(1) E. Mach, *Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen*. (Lipsia, Engelmann, 1875, pag. 20).

che insegnò a Praga, aveva pubblicato nel suo trattato: “ *De proportione motus* „ (Praga, 1639), alcuni risultati delle sue ricerche sul fenomeno dell'urto. Egli sapeva che un corpo elastico, urtando un corpo identico in quiete, perde il suo moto e lo comunica al

Incisione presa dall'opera di Marci: *De proportione motus.*

secondo. Egli enuncia altre proposizioni, conservate anche presentemente, benchè spesso con poca precisione e mescolate ad errori. Marco Marci era un uomo di valore; le sue idee sulla

composizione dei moti e degli “ impulsi „ erano assai notevoli per quel tempo. Il metodo che ha seguito per ottenerle è simile a quello tenuto più tardi da Roberval. Egli parla di moti *parzialmente* eguali ed opposti e di moti *totalmente* opposti; egli dà la costruzione del parallelogramma, ecc.; ma benchè parli di un moto di caduta accelerato, non giunge ad esporre con chiarezza la nozione di forza e conseguentemente anche quella della composizione delle forze. Ad onta di ciò conosceva tuttavia il teorema di Galileo sulle cadute lungo le corde di un cerchio, alcuni teoremi sul moto del pendolo, la forza centrifuga, ecc. I *Discorsi* di Galileo erano stati pubblicati un anno prima; ma non è presumibile che Marci li abbia conosciuti, poichè in que' tempi la guerra dei trent'anni desolava l'Europa centrale. Se si ammettesse che Marci li avesse conosciuti, non solo i numerosi errori, che contiene il suo libro, diverrebbero allora incomprensibili, ma bisognerebbe prima spiegare come nel 1648, nella introduzione del suo libro, sentisse ancora il bisogno di difendere, contro il gesuita Baldassarre Conradus, il teorema delle corde della circonferenza. Tutte queste circostanze al contrario si spiegano facilmente, se si suppone che Marci, uomo di una coltura generale, conoscesse i lavori di Benedetti, e se si suppone con Wohlwill (*Zeitschr. f. Völkerpsych.*, 1884, XV, p. 387), che si fondasse sui lavori anteriori di Galileo, nei quali questi non aveva ancora conseguito una compiuta chiarezza. Inoltre aggiungiamo che Marci fu assai vicino a scoprire la scomposizione della luce, che fu fatta da Newton. I suoi scritti formano un capitolo interessante ed ancora poco studiato della storia della fisica.

2. Galileo stesso più volte aveva tentato di verificare le leggi dell'urto; ma non vi è riuscito intieramente. Egli principalmente si occupa della forza di un corpo in moto o, secondo la sua espressione, della “ forza di percussione „, che egli tenta di paragonare alla pressione di un peso in quiete ed a misurarla con questa. A tal uopo fece un'esperimento assai ingegnoso, del quale ora parleremo.

Un vaso I pieno di acqua (fig. 157) ha nel fondo un orifizio chiuso. Un vaso II è sospeso con fili sotto il primo, e l'insieme è tenuto in equilibrio ad una delle due estremità del giogo di una bilancia. Se si apre l'orifizio del fondo del vaso I, l'acqua esce e cade in II. Una parte del peso in quiete perciò scom-

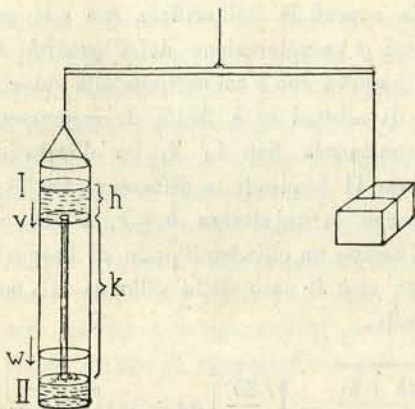



Fig. 157.

pare ed è sostituita dall'azione dell'urto sul vaso II. Galileo si riprometteva una deviazione del giogo della bilancia, che gli avrebbe permesso di determinare l'effetto dell'urto, ristabilendo l'equilibrio mediante pesi addizionali. Egli rimase molto sorpreso di non vedere *alcuna* deviazione, e sembra che non sia riuscito a spiegarsi chiaramente questo fenomeno.

3. Oggi naturalmente questa spiegazione non presenta alcuna difficoltà. Da una parte l'apertura dell'orefizio provoca una diminuzione di pressione, dovutaa questi fattori 1° al fatto che il peso della colonna d'acqua sospesa nell'aria è perduto; e 2° ad una pressione verso l'alto prodotta dalla reazione del liquido che esce (precisamente come avviene in una ruota di Segner); ma dall'altra si produce: 3° un aumento di pressione, dovuto all'azione del getto sul fondo del vaso II. Perciò innanzi che la prima goccia di acqua raggiunga il vaso II, avvi solo una diminuzione di pressione; ma questa pressione viene subito compen-

sata, quando l'apparecchio è in completa azione. Galileo seppe solo osservare la diminuzione *iniziale*.

Supponiamo l'apparecchio in azione. Indichiamo con h l'altezza del liquido nel vaso I, con v la velocità di efflusso, con k la distanza del fondo del vaso I dal livello del liquido nel vaso II, con w la velocità del getto nel punto in cui giunge a questo livello, con a la superficie dell'orifizio, con s il peso specifico del liquido e con g l'accelerazione della gravità. Per calcolare il 1° fattore si osserva che v corrisponde alla velocità conseguita da una caduta di altezza h; è facile di rappresentarsi questa caduta come continuata fino in k. La durata della caduta dal vaso I al vaso II è quindi la differenza fra le durate delle cadute di un corpo da un'altezza $h+k$, e da un'altezza h. Durante questo tempo un cilindro liquido di base a esce con una velocità v. Il 1°, cioè il peso della colonna di acqua sospesa nell'aria, è quindi:

$$\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\frac{2(h+k)}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]as=2as\left[\sqrt{h(h+k)}-h\right].$$

Per calcolare il 2° partiremo dall'equazione ben nota $mv=pt$. Supponiamo: $t=1$: essa dà $mv=p$, cioè che la pressione di reazione esercitata sopra I verso l'alto è eguale alla quantità di moto impartita nell'unità di tempo alla vena liquida.

Ci serviremo dell'unità di peso come unità di forza, scegliendo così il sistema di unità terrestri. Il 2° prende allora la forma $\left(av\,.\,\frac{s}{g}\right).\,v=p$, espressione nella quale la parentesi rappresenta la massa, che esce durante l'unità di tempo. Si ha d'altronde:

$$\left(av\,.\,\frac{s}{g}\right)v=a\sqrt{2gh}\,.\,\frac{s}{g}\,.\,\sqrt{2gh}=2ahs\,.$$

Troveremo in un modo analogo il 3°, cioè la pressione esercitata sul vaso II:

$$q=\left(av\,.\,\frac{s}{g}\right)w=a\,.\,\frac{s}{g}\sqrt{2gh}\,.\sqrt{2g(h+k)}=2as\sqrt{h(h+k)}\,.$$

Il cambiamento della pressione totale è dunque:

$$-2as\left[\sqrt{h(h+k)}-h\right]-2ahs+2as\sqrt{h(h+k)},$$

esso è *identicamente* nullo, poichè le tre parti, di cui esso si compone, si distruggono reciprocamente fra loro. Dunque si vede che Galileo poteva ottenere solo un risultato *negativo*.

Rispetto al secondo termine di questa somma è necessaria ancora una piccola osservazione. Si potrebbe pensare che la pressione perduta mediante l'apertura dell'orifizio è ahs e non $2ahs$, ma questa concezione *statica* è totalmente inapplicabile al problema *dinamico*, di cui ci occupiamo. La gravità non imprime istantaneamente la velocità v alle molecole liquide che escono, ma questa velocità è generata dalle pressioni reciproche di queste ultime molecole e quelle che rimangono, e si può determinare la pressione solo mediante la quantità di moto. L'erronea introduzione del valore di ahs si rileverebbe subito dalle contraddizioni.

Se il modo di esperimentare di Galileo fosse stato meno elegante, egli avrebbe potuto senza difficoltà determinare la pressione di un getto liquido *continuo*; ma egli, come subito se ne persuase, non avrebbe mai potuto neutralizzare con una *pressione* l'effetto dell'urto istantaneo. Ora consideriamo con Galileo un corpo, che cade liberamente; esso acquista una velocità proporzionale alla durata della caduta. Inoltre benchè minima la velocità ha bisogno di un certo *tempo* per essere prodotta (proposizione che era ancora contestata da Mariotte). Un corpo animato da una velocità verticale verso l'alto salirà per un tempo determinato dalla grandezza della sua velocità, e quindi percorrerà un certo spazio in alto. Il corpo più pesante, animato dalla minore velocità verticale verso l'alto sale, per quanto sia poca, in senso contrario alla forza di gravità. Se dunque un corpo, per quanto immaginar si possa pesante, riceve un impulso istantaneo verso l'alto per mezzo della caduta di un corpo, piccolo quanto si voglia, in moto ed animato da una velocità piccola a piacere, questo corpo pesante si ab-

bandonerà alquanto verso l'alto. Quindi *il più piccolo urto* può superare *la più grande pressione*, e si può dire, secondo l'espressione di Galileo, che la forza dell'urto è *infinitamente grande* rispetto a quella della pressione. Talvolta, basandoci su questo risultato, si è rimproverato a Galileo il difetto di oscurità: al contrario esso è la prova evidente del suo grande acume intellettuale. Presentemente diremo che la forza dell'urto, l'impulso, la quantità di moto mv sono grandezze di differenti *dimensioni* dalla pressione p. La dimensione della prima è mlt^{-1}; quella della seconda mlt^{-2}. In realtà il rapporto della pressione all'impulso dovuto all'urto si può paragonare al rapporto di una linea ad una superficie. La pressione è p, l'impulso dovuto all'urto è pt. Senza usare il linguaggio matematico, sarebbe assai difficile di esprimersi in modo migliore di quello di Galileo. Ora si vede anche perchè si possa in realtà misurare mediante una *pressione* l'urto di un getto continuo di liquido. Infatti si confronta una quantità di moto distrutta per secondo di tempo con la pressione agente per secondo di tempo, le quali sono due grandezze *omogenee* della forma pt.

4. Il primo sistematico studio delle leggi dell'urto è dovuto alla iniziativa della Società Reale di Londra (1668). Tre eminenti fisici Wallis (26 nov. 1668), Wren (17 dec. 1668) ed Huygens (4 genn. 1669) risposero all' invito della Società, presentando delle Memorie in cui esponevano le leggi dell'urto, indipendentemente l'uno dall'altro. Wallis studia solo l'urto dei corpi anelastici, Wren ed Huygens si occupano solo dei corpi elastici. Prima della pubblicazione Wren aveva verificato sperimentalmente i suoi teoremi che, in sostanza, si accordavano con quelli di Huygens. Queste sono le esperienze, cui Newton si riferisce nei suoi *Principia*. Subito dopo Mariotte le descrive sotto una forma più ampia nel suo trattato: *Sur le choc des corps*.

Wallis parte dal principio fondamentale che il *momento* prodotto della massa (pondus) per la velocità (celeritas), costituisce la condizione determinante nel fenomeno dell' urto. Questo momento determina la forza dell'urto. Se due corpi ane-

lastici e di momenti eguali si incontrano, si ha equlibrio dopo l'urto; se i due corpi hanno i momenti diseguali, la differenza di questi ultimi dà il momento dopo l'urto ed il quoziente di questo momento per la somma delle masse dà la velocità finale. Wallis pubblicò in seguito la sua teoria in un altro trattato (*Mechanica sive de motu*, Londra, 1671). Oggi tutti questi teoremi sono espressi mediante la formula:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

ove m ed m' sono le masse che si urtano, v e v' le loro velocità prima dell'urto, ed u la velocità comune dopo l'urto.

5. Le idee che condussero Huygens ai suoi risultati si possono trovare chiaramente in un suo trattato postumo: *De motu corporum ex percussione* (1703). Le esamineremo ora partitamente. Huygens procede dalle ipotesi seguenti:

1° Il principio d'inerzia.

2° Se due corpi elastici, animati da velocità eguali ed opposte, si incontrano, essi si separano con velocità eguali alle precedenti.

3° Tutte le velocità devono essere misurate solo relativamente.

4° Un corpo maggiore che urta un corpo minore in quiete gli comunica una certa velocità, perdendo una parte della sua propria velocità.

5° Se uno dei due corpi, che partecipa all'urto, conserva la sua velocità, la conserva pure l'altro.

Ora immaginiamo con Huygens due masse elastiche eguali, che si urtano con velocità v eguali ed opposte. Dopo l'urto esse rimbalzano, conservando le loro stesse velocità cambiate di direzione. Huygens ha ragione di ammettere questa *ipotesi* senza volerla *dimostrare*. La sola esperienza può dirci che esistono i corpi elastici, che riprendono la loro forma dopo l'urto e che in questo fenomeno non perdono alcuna quantità apprezzabile di forza viva. Ora Huygens immagina che questa esperienza si faccia

sopra una barca, che si muove con la velocità v. Per l'osservatore posto nella barca si verifica intieramente ciò che si è già descritto; ma per l'osservatore, che si trova fuori di essa, le velo-

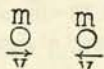
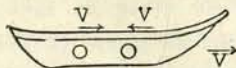



Fig. 158. *Fig. 159.*

Incisione ricavata dall'opera di Huygens: " *De percussione.* "

cità delle due sfere elastiche prima dell'urto sono $2v$ e o, e dopo o e $2v$. Dunque un corpo elastico, urtando un altro corpo elastico di massa eguale ed immobile, gli comunica tutta la sua velocità e si trova in quiete dopo l'urto. Se ora si suppone che la barca si muova con una velocità u qualunque, le velocità delle sfere elastiche saranno, per l'osservatore rimasto sulla riva, prima dell'urto: $u + v$ e $u - v$, e dopo: $u - v$ ed $u + v$. Ora $u + v$ ed $u - v$ sono velocità assolutamente *qualunque*; quindi se ne inferisce che nell'urto due masse elastiche eguali cambiano le loro velocità.

Galileo aveva già mostrato che un corpo per quanto grande in quiete è posto in moto da un corpo, per quanto piccolo, che lo venga ad urtare. Huygens fa vedere inoltre che l'*avvicinamento* prima dell'urto, e l'*allontanamento* dopo l'urto si compiono con la *stessa velocità relativa.* Supponiamo che un corpo di massa m, animato da una velocità v, urti un corpo di massa

ignota, che gli comunica. M in quiete; sia w la velocità ancora Per dimostrare il suo teorema Huygens immagina che l'esperimento sia fatto sopra una barca, che si muova con la velocità $\frac{w}{2}$ nella direzione di M verso m. Allora le velocità iniziali sono: $v - \frac{w}{2}$ e $-\frac{w}{2}$, le velocità finali w e $+\frac{w}{2}$. Quindi M non ha cambiato il valore della sua velocità, ma solo il suo segno; onde, giacchè non è perduta alcuna forza viva nell'urto, m deve avere cambiato *solo* il segno della sua velocità. Le velocità finali quindi sono: $-(v - \frac{w}{2})$ e $+\frac{w}{2}$. Dunque in realtà la velocità relativa dell'avvicinamento prima dell'urto è uguale alla velocità relativa della separazione dopo che esso è avvenuto. In tutti i casi, qualunque sia il cambiamento di velocità che subisce l'uno dei corpi, si potrà, mercè questa finzione di un battello in moto, considerare come eguali, astrazion fatta del segno, le velocità prima e dopo l'urto. Dunque il teorema è generale.

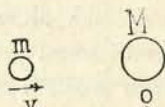



Fig. 160.

Se due masse M ed m si scontrano con le velocità V e v *inversamente proporzionali* alle masse, M rimbalzerà con la velocità V ed m con la velocità v. Infatti siano V_1 e v_1 le velocità dopo l'urto; si ha per il teorema precedente:

$$V + v = V_1 + v_1,$$

e per il teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2} M . V^2 + \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} M . V_1^2 + \frac{1}{2} m . v_1^2 .$$

Si faccia $v_1 = v + w$, quindi $V_1 = V - w$; allora l'ultima eguaglianza diviene:

$$\frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} MV_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \\ + \frac{1}{2} (M + m) w^2 ,$$

quest'ultima eguaglianza può verificarsi solo quando è $w = o$, ciò che dimostra il teorema. La dimostrazione di Huygens si basa sul confronto delle altezze, cui possono salire i corpi prima e dopo l'urto. Se le velocità dei corpi che si urtano non sono in ragione inversa delle masse, esse si possono ridurre a questo rapporto mediante la finzione del battello in moto. Quindi il teorema contiene tutti i casi.

La conservazione della forza viva nell'urto fu enunciata da Huygens in uno dei suoi ultimi teoremi (11), che egli poi comunicò alla Società Reale di Londra. Tuttavia è incontestabile che il teorema delle forze vive già costituiva la base dei teoremi precedenti.

6. Nello studio di un fenomeno A avviene che gli elementi di esso ci sembrano come già dati da un altro fenomeno B. Lo studio di A allora sembra come un'applicazione dei principii già noti. Ma possiamo incominciare la nostra ricerca con A stesso; e siccome la natura è in tutto uniforme, possiamo giungere a questi stessi principii mediante il fenomeno A. L'urto essendo stato studiato contemporaneamente agli altri fenomeni meccanici, fornisce esempio di ambedue i modi di scoperta.

È facile anzitutto convincersi che i fenomeni dell'urto possono essere compiutamente trattati — solo con un minimum di nuove esperienze — col sussidio dei principii di Newton, alla scoperta dei quali lo studio dell'urto ha contribuito non ostante che essi si fondino su altra base. Queste nuove esperienze, che sono contenute nei principii di Newton, ci insegnano semplicemente che vi sono corpi *elastici* e corpi *anelastici*. Una pressione qualunque fa variare la forma dei corpi anelastici senza che essa si ripristini; nei corpi elastici ad *ogni forma del corpo* corrisponde un sistema *determinato* di pressioni, cosicchè un cambiamento di pressione sia connesso ad un cambiamento di forma e reciprocamente. I corpi elastici riprendono la loro primiera forma; e le forze capaci di cambiare la forma dei corpi agiscono solo quando questi sono a contatto.

Si considerino due masse anelastiche M ed m, che si muovono con le velocità rispettive V e v. Se queste masse vengono a contatto, animate da velocità disuguali, allora si stabiliranno nel sistema (M, m) delle forze *deformatrici*. Queste forze non alterano la quantità di moto e non cambiano nulla nel moto del baricentro. Le deformazioni cessano quando si stabilisca di una velocità comune e, nei corpi *anelastici*, le forze, che hanno prodotto queste deformazioni, allora si annullano. Se ne inferisce che la velocità u dopo l'urto è data dall'equazione:

$$M.u + m.u = M.V + m.v,$$

da cui si ha:

$$u = \frac{MV + mv}{M + m},$$

che è la regola di Wallis.

Ora supponiamo che si osservi il fenomeno dell'urto senza conoscere i principii di Newton. Noi scopriremo subito che nell'urto avvi solo le *velocità*, che ne sono i fattori determinanti, ma ancora un'*altra* caratteristica dei corpi (il peso, la gravità, la massa ossia *pondus, moles, massa*). Questa osservazione ci permette di spiegare facilmente i casi semplici. Supponiamo che si scontrino due corpi di egual peso o di stessa massa, animati di eguali ed opposte velocità. Se dopo l'urto questi corpi non si separano più, ma hanno una velocità comune, la sola velocità comune determinata in *un modo unico* dopo l'urto è la velocità *zero*. Se ora osserviamo che il fenomeno dipende solo dalle *differenze* di velocità, cioè dalle velocità relative, allora potremo facilmente spiegare molti altri casi, immaginando un moto fittizio delle cose circostanti, moto, che secondo la nostra esperienza, non ha alcun effetto. Così due masse anelastiche, eguali di velocità v e o, o v e v', hanno dopo l'urto una velocità comune $\frac{v}{2}$ o $\frac{v+v'}{2}$. È superfluo l'osservare che queste deduzioni

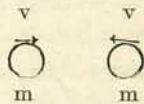



Fig. 161.

non si possono fare che dopo avere *prima di ogni altra cosa* riconosciuto i tratti essenziali e caratteristici del fenomeno.

Per giungere all'urto di masse ineguali non basterà solo di aver osservato che la massa ha un'azione *in generale*, ma bisognerà ancora che l'esperienza conosca il *modo* di questa azione. Supponiamo ad esempio, che due corpi di masse 1 e 3 si scontrino con le velocità v e V; si potrà fare il ragionamento seguente: nella massa 3 isoliamo una massa 1 (fig. 162), e facciamo prima avvenir l'urto della massa 1 contro la massa 1; la velocità risultante è $\frac{v+V}{2}$; ma ora la massa $1+1=2$ e la massa 2 debbono ancora conseguire velocità eguali, che sono $\frac{v+V}{2}$ e V; lo stesso principio dà pure:

$$\frac{\frac{v+V}{2}+V}{2}=\frac{v+3V}{4}=\frac{v+3V}{1+3}.$$

Ora consideriamo più generalmente due masse m ed m', che nella figura 163 rappresentiamo mediante lunghezze orizzontali proporzionali. Siano v e v' le loro velocità, che rappresentiamo

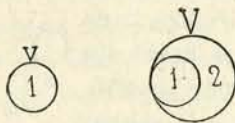
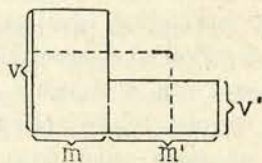



Fig. 162. *Fig. 163.*

colle ordinate, innalzate rispettivamente sull'estremità dei segmenti rettilinei, che rappresentano le masse corrispondenti. Se è $m < m'$, isoliamo in m' una parte eguale ad m. Lo scontro di m con m dà una massa $2m$ animata della velocità $\frac{v+v'}{2}$, ciò che è indicato dalla linea punteggiata. Procediamo analogamente col rimanente $m'-m$; isoliamo in $2m$ una parte eguale a $m'-m$;

otterremo una massa $2m - (m' - m)$ animata da una velocità $\frac{v+v'}{2}$, ed una massa $2(m - m')$, la cui velocità è $\frac{\frac{v+v'}{2}+v'}{2}$.
Possiamo continuare a questo modo, finchè non siamo giunti ad una velocità *comune* u per l'intiera massa $m + m'$. La figura mostra molto chiaramente che si giunge all'equazione $(m + m')\,u = mv + m'v'$, che rappresenta l'eguaglianza della superficie. Ma è evidente che questo metodo di dimostrazione non si può seguire intieramente che se, prima di ogni altra cosa, un'*esperienza* qualunque non ci abbia quasi condotto a riconoscere che il fattore *determinante* sia la somma $mv + m'v'$, cioè non ci abbia quasi data la *forma* dell'azione di m e di v. Inoltre se si fa astrazione dei principii di Newton, è *impossibile di evitare* altre esperienze specifiche sul significato del prodotto mv, che sono equivalenti a questi principii e possono sostituirli.

7. L'urto delle masse *elastiche* si può anche studiare mediante i principii newtoniani. Basta osservare che nei corpi elastici ogni *variazione di forma* dà origine a *forze di restituzione*, intimamente connesse alla deformazione e tendenti a ristabilire la forma primitiva. Il contatto dei corpi animati di velocità differenti dà pure origine a forze, che tendono a rendere eguali queste velocità, ed è precisamente su questo fenomeno che si fonda la così detta impenetrabilità della materia. Se due masse elastiche M ed m si scontrano colle velocità rispettive C e c, si produce una deformazione, che cessa solo all'istante, in cui le due velocità divengono eguali. Queste forze, nate dal contatto de' corpi, sono forze interne, che non cambiano nè la quantità di moto, nè il moto del baricentro; così abbiamo per la velocità comune dei corpi all'istante, in cui cessa la deformazione:

$$u = \frac{M \cdot C + m \cdot c}{M + m}.$$

Ma i corpi elastici riprendono la loro forma primitiva. Nei corpi *perfettamente* elastici queste stesse forze ritorneranno su-

bito ad agire, durante lo stesso tempo e lungo lo stesso spazio elementari, ma in un ordine precisamente inverso. Supponendo che il corpo M abbia la maggior velocità e raggiunga m, esso riceverà di nuovo la diminuzione di velocità $C - u$ nello stesso tempo che m riceverà nuovamente l'incremento $u - c$. Quindi si ha per le velocità V e v dopo l'urto:

$$V = u - (C - u) = 2u - C \quad , \quad v = u + (u - c) = 2u - c \, ,$$

ossia:

$$V = \frac{M \, . \, C + m \, (2c - C)}{M + m} \quad , \quad v = \frac{m \, . \, c + M \, (2C - c)}{M + m} \, .$$

Se in queste formule facciamo $M = m$, si ha:

$$V = c \quad , \quad v = C \, ;$$

onde due masse eguali cambiano le loro velocità nel fenomeno dell'urto. Nel caso particolare in cui $\frac{M}{m} = -\frac{c}{C}$, ossia $M \, . \, C + m \, . \, c = o$, si sa che è $u = o$, allora si ha quindi:

$$V = 2u - C = - C \quad , \quad v = 2c - c = - c \, .$$

Onde le masse rimbalzano con le velocità che avevano prima dell'incontro, ma dirette in direzioni contrarie. L'avvicinamento delle due masse, animate di velocità C e c, contate *positivamente* nella stessa direzione, si compie con la velocità $C - c$, ed il loro allontanamento con la velocità $V - v$; ora i valori $V = 2u - C$ e $v = 2u - c$ mostrano che è:

$$V - v = - (C - c) \, .$$

Quindi le velocità relative di avvicinamento e di allontanamento sono eguali. Le stesse espressioni di V e v dànno anche assai semplicemente i due teoremi:

$$M \, . \, V + m \, . \, v = M \, . \, C + m \, . \, c \, ,$$

$$M \, . \, V^2 + m \, . \, v^2 = M \, . \, C^2 + m \, . \, c^2 \, .$$

Onde la *quantità di moto* contata nella stessa direzione rimane *identica* prima e dopo l'urto, come la *forza viva*. I principii di Newton perciò conducono a tutti i risultati di Huygens.

8. Se vogliono d'altra parte studiare le leggi dell'urto secondo il punto di vista di Huygens, bisogna prima fare le considerazioni seguenti: L'altezza, a cui può salire il centro di gravità di un sistema di masse, è data dalla forza viva $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$. Quando le forze *eseguiscono* un lavoro, cioè quando le masse del sistema si muovono nelle direzioni delle forze, questa somma aumenta di una quantità eguale al lavoro fatto; quando i moti delle masse si fanno nelle direzioni contrarie delle forze, ciò che si esprimerà dicendo che le forze *subiscono* un lavoro, questa somma diminuisce di una quantità eguale al lavoro subìto. Perciò, finchè la somma algebrica dei lavori eseguiti o subìti non cambia, qualunque siano d'altronde gli altri cambiamenti che si possono verificare, la somma $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ rimane pure invariata. Giacchè Huygens osservando che questa proprietà dei sistemi materiali, che aveva scoperto nelle sue *ricerche sul pendolo*, si verificava nel caso dell'*urto*, dovè subito dedurne che la somma delle forze vive era la *stessa* prima e dopo l'urto. Poichè, nelle reciproche deformazioni dei corpi che lo compongono, il sistema materiale *subisce* lo stesso lavoro, che quello che esso *fa* quando si ristabiliscono le primiere forme, purchè questi corpi sviluppino solo forze intieramente determinate dalle loro forme, e che ripristinino le loro forme con queste stesse forze, che essi avevano impiegate durante la deformazione. Ma solo una *esperienza speciale* può far conoscere che le cose vadano appunto così. La legge d'altra parte è solo valida per i corpi *perfettamente* elastici.

Queste considerazioni forniscono quasi subito gran parte delle leggi dell'urto enunciate da Huygens. Due masse eguali, che s'incontrano con velocità eguali ed opposte, rimbalzano con le stesse velocità. Le velocità dopo l'urto sono *determinate in modo unico* solo quando esse sono *eguali* fra loro, e soddi-

sfano al principio delle forze vive solo quando sono le stesse prima e dopo l'urto. Inoltre è evidente che se per l'urto una delle due masse disuguali cambia solo il segno della sua velocità e non la sua grandezza, l'altra massa allora deve presentare lo stesso fenomeno; quindi ne consegue che la velocità di avvicinamento dei due corpi è uguale a quella di separazione. Tutti i casi possibili possono essere ricondotti a quest'ultimo; infatti, siano c e c' le velocità della massa m (prese coi loro segni) prima e dopo l'urto; basterà supporre che il sistema dei *due corpi* riceva una velocità u tale che sia $u + c = -(u + c')$, cioè: $u = \frac{c - c'}{2}\cdot$ Quindi si può sempre animare il sistema dei due corpi di una velocità di traslazione, per cui la velocità di *una* delle due masse cambierà solo di segno. Così il teorema dell'eguaglianza delle velocità relative di avvicinamento e di allontanamento è generale.

Siccome il sistema delle concezioni di Huygens non era intieramente compiuto, egli fu obbligato, come già si è detto, di ricorrere in certo qual modo al sistema di nozioni di Galileo e Newton, come, ad esempio, nel caso in cui il *rapporto* delle velocità delle due masse, che si scontrano, non è dato *a priori*. Così troviamo una tacita applicazione dei concetti di massa e di quantità di moto nel teorema, secondo il quale le velocità cambiano solo i loro segni, quando si ha: $\frac{M}{m} = \frac{c}{C}\cdot$ Se Huygens si fosse intieramente ristretto al suo proprio punto di vista, egli a stento avrebbe saputo *scoprire* questo semplice teorema, benchè gli fosse stato possibile, avendolo scoperto, di dimostrarlo senza ricorrere ad altri concetti. Infatti si può osservare che in questo caso, poichè sono eguali le quantità di moto e di segni contrari, la velocità dell'insieme dopo la deformazione totale sarà nulla, cioè $u = o$. Ma questa deformazione producendosi subito in senso contrario, ed il lavoro eseguito essendo uguale a quello, che il sistema subisce, sono *restituite le stesse* velocità con segni *contrari*.

Questo caso *particolare* fornirà il caso *generale*, se s'immagina che il sistema delle due masse sia animato di una velocità di traslazione. Si rappresentino le masse che si urtano con $BC = M$ ed $AC = m$ (fig. 164), le loro velocità rispettive con $AD = C$, e $BE = c$. S'innalzi la perpendicolare CF su AB, e per F conduciamo ad AB la parallela ad IK. Si ha:

$$ID = \frac{m.(C - c)}{M + m}, \quad KE = \frac{M.(C - c)}{M + m}.$$

Fig. 164.

Se ora supponiamo che le masse M ed m si urtino con le velocità ID e KE, mentre contemporaneamente impartiamo al sistema delle due masse la velocità:

$$u = AI = KB = C - \frac{m(C - c)}{M + m} = c + \frac{M(C - c)}{M + m} = \frac{M.C + m.c}{M + m},$$

si vede che, qualunque siano le velocità, questo caso è il *caso speciale* per l'osservatore, che si muove con la velocità u, ed il *caso generale* per l'osservatore *immobile*. Le formule generali dell'urto, che abbiamo dato più sopra, risultano immediatamente da queste considerazioni; si ottiene:

$$V = AG = C - 2\frac{m(C - c)}{M + m} = \frac{M.C + m(2c - C)}{M + m},$$

$$v = BH = C + 2\frac{M(C - c)}{M + m} = \frac{mc + M(2C - c)}{M + m}.$$

Il metodo così fecondo di Huygens, che consiste nell'uso di una velocità fittizia, proviene dall'osservazione che, senza *differenza* di velocità, i corpi non agiscono l'uno sull'altro coll'urto. Tutte le forze dell'urto sono determinate dalle differenze di velocità (come tutte le azioni di trasmissione del calore mediante le differenze di temperatura). Siccome le forze non determinano delle velocità, ma solo cambiamenti di esse, si vede che nell'urto

si tratterà sempre solo di *differenze* di velocità. È indifferente di calcolare le velocità relativamente all'uno o all'altro dei due corpi. Infatti una esatta ricerca fa vedere spesso l'identità dei casi dell'urto, che si erano dapprima creduti differenti a causa della mancanza di pratica.

Similmente, la capacità d'azione di un corpo in moto, la quale sia che si misuri mediante la quantità di moto, se si considera la durata dell'azione, sia che si misuri mediante la forza viva, se si considera il suo cammino, non ha *alcun* senso, finchè si tratta *di un sol corpo*. Questo concetto acquista significato sol quando s'introduce un secondo corpo, e d'allora in poi il fattore determinante è per il primo caso la differenza delle velocità, e per il secondo il quadrato di questa differenza. La *velocità* rappresenta un *livello fisico*, come la temperatura, la funzione potenziale, ecc.

Inoltre bisogna osservare che Huygens avrebbe fin da principio potuto fare, per mezzo dei fenomeni dell'urto, le stesse esperienze, cui fu condotto dalle sue ricerche sul pendolo. In ogni caso avvi una cosa ed una cosa sola da fare ed è questa: *riconoscere in tutti i fenomeni gli stessi elementi*, o, se si vuole, ritrovare in un fenomeno gli elementi di un fenomeno già noto. Sono precisamente le circostanze storiche accidentali, che determinano il fenomeno preso per *punto di partenza*.

9. Porremo termine a questo esame delle leggi dell'urto con alcune osservazioni più generali. La somma delle *quantità di moto* si conserva nell'urto tanto nel caso dei corpi anelastici, quanto nel caso di quelli elastici. Ma, come lo fece osservare Huygens pel primo, qui non si deve intendere la conservazione della quantità di moto *nel senso attribuitole da Descartes*. La quantità di moto di un corpo è aumentata precisamente di quanto ne perde un altro corpo. Quando, ad esempio, due masse anelastiche si scontrano con velocità eguali ed opposte, esse perdono entrambe la loro quantità di moto nel senso di Descartes. Ma per lo contrario la somma di queste quantità si conserva, se si contano le velocità positivamente *in un senso* e negativamente

nell'altro. La quantità di moto così concepita si conserva in tutti i casi.

La somma delle *forze vive* cambia nell'urto delle masse anelastiche, ma si conserva nell'urto delle masse perfettamente elastiche. Si può facilmente determinare la perdita di forza viva nell'urto delle masse anelastiche, ed, in generale, quando i due corpi, che si sono urtati, si muovono dopo l'urto con una velocità comune. Siano M ed m le masse, C e c le loro rispettive velocità prima dell'urto ed u la loro velocità comune dopo quest'urto. La perdita di forza viva è:

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}\,.\,\mathrm{C}^2 + \frac{1}{2}m\,.\,c^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{M}+m)u^2$$

e poichè è:

$$u = \frac{\mathrm{M}\,.\,\mathrm{C} + m\,.\,c}{\mathrm{M}+m},$$

si potrà scrivere:

$$\frac{\mathrm{M}\,.\,m}{\mathrm{M}+m}(\mathrm{C}-c)^2.$$

Carnot l'ha posta sotto la forma:

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}\,.\,(\mathrm{C}-u)^2 + \frac{1}{2}m\,.\,(u-c)^2\,;$$

sotto la quale si riconoscono nei termini:

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}\,.\,(\mathrm{C}-u)^2 \quad \mathrm{e} \quad \frac{1}{2}m\,(u-c)^2$$

le forze vive generate dal *lavoro delle forze interne* (che si chiamano ordinariamente molecolari). La formula di Carnot è importante per calcolare le perdite di lavoro, dovute all'urto delle parti nelle macchine.

In tutte le esposizioni precedenti abbiamo trattato le masse come punti e si è supposto che esse si muovano solo secondo

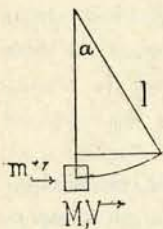
la loro retta congiungente. Questa semplificazione si può ammettere nel caso in cui i baricentri delle masse che si urtano, ed il loro punto di contatto, siano in linea retta, cioè nel caso dell'urto centrale. Lo studio dell'urto *eccentrico* od *obliquo* è alquanto più difficile, ma non offre alcun interesse speciale rispetto ai principii.

Wallis già si era proposto un problema di diverso genere. Si immagini, che un corpo che ruota intorno ad un asse, sia bruscamente reso immobile col fissare uno dei suoi punti. La violenza dell'urto prodotto dipende dalla posizione del punto tenuto fisso, o, più esattamente, dalla sua distanza dall'asse. Wallis chiama *centro d'urto* o di *percussione* questo punto, in cui l'urto è minimo. Se si fissa questo punto bruscamente, l'asse non subisce alcuna pressione. È impossibile poter qui entrare nei particolari di queste ricerche, che furono svolte da molti contemporanei e successori di Wallis.

10. Prima di terminare questa parte esamineremo brevemente una interessante applicazione delle leggi dell'urto, cioè la determinazione delle velocità dei proietti mediante il *pendolo ballistico.* Sia M una massa pesante attaccata ad un pendolo (fig. 165), il cui filo è sospeso senza massa. Nella sua posizione di equilibrio essa riceve istantaneamente la velocità orizzontale V, che la fa salire ad una altezza: $h = l(1 - \cos\alpha) = \frac{V^2}{2g}$, ove l è la lunghezza del pendolo, α l'angolo della semi-ampiezza dell'oscillazione, e g l'accelerazione dovuta alla gravità. Indicando con T la durata dell'oscillazione si ha: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; e la formola precedente diviene:

Fig. 165.

$$V = \frac{gT}{\pi}\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \frac{2}{\pi}g \,.\, T \text{ sen } \frac{1}{2}\alpha \,.$$

Se ora la velocità V è dovuta all'urto di un proietto di massa m, che va a percuotere M con una velocità v e poi

forma con M un sol corpo, allora si ha, sia o no l'urto elastico: $mv = (M + m) . V$, poichè le due masse si muovono dopo l'urto con la velocità *comune* V. Se m è abbastanza piccolo rispetto ad M si può fare $v = \frac{M}{m} . V$, e quindi:

$$v = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{M}{m} \cdot gT \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} a .$$

Quando non si può considerere il pendolo ballistico come un pendolo semplice, i principii che abbiamo più volte già usati permettono di mettere questo studio sotto la forma seguente: la quantità di moto del proietto di massa m e di velocità v è mv; la pressione p dovuta all'urto la riduce in un tempo brevissimo τ al valore mV. Si ha dunque:

$$m(v - V) = p\tau;$$

e, se V è piccolissima rispetto a v, questa equazione si riduce alla seguente:

$$mv = p\tau.$$

Con Poncelet facciamo astrazione dall'ipotesi delle *forze istantanee*, che comunicano bruscamente ai corpi velocità finite. Non esistono le forze istantanee; e ciò che si è chiamato con questo nome sono forze assai grandi che, in un tempo brevissimo, generano velocità percettibili, ma che non si riconoscono altrimenti dalle forze continue. Se la forza che agisce nell'urto non si può supporre costante durante la sua intiera durata, si dovrà sostituire all'espressione $p\tau$ la somma $\int pdt$; e ciò non cambia nulla al ragionamento.

Una forza eguale a quella, che distrugge la quantità di moto del proietto, agisce come reazione sul pendolo. Suppongasi che la linea di proiezione del tiro, e quindi la forza, sia perpendicolare all'asse del pendolo, ed alla distanza b da esso. Il mo-

mento della forza p è $b \cdot p$, l'accelerazione angolare $\frac{bp}{\Sigma mr^2}$ prodotta nel tempo τ è:

$$\varphi = \frac{b \cdot p\tau}{\Sigma mr^2} = \frac{b \cdot m \cdot v}{\Sigma mr^2}.$$

La forza viva conseguita dal pendolo alla fine del tempo τ è quindi:

$$\frac{1}{2}\varphi^2 \Sigma mr^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2 m^2 v^2}{\Sigma mr^2}.$$

Questa forza viva dà al pendolo una semi-oscillazione α, e così fa innalzare il baricentro del peso Mg sino all'altezza: $a \cdot (1 - \cos\alpha)$, chiamando a la distanza di questo centro dall'asse. Il lavoro fatto in questa ascensione è $Mg \cdot a \cdot (1 - \cos\alpha)$; esso è eguale alla forza viva, e l'eguaglianza di queste due espressioni dà:

$$v = \sqrt{\frac{2Mga \cdot \Sigma mr^2 \cdot (1 - \cos\alpha,}{mb}};$$

questa formula si può semplificare introducendovi la durata di oscillazione $T = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{ga}}$; allora essa diviene:

$$v = \frac{2}{\pi}\frac{M}{m} \cdot \frac{a}{b} \cdot gT \cdot \text{sen}\,\frac{1}{2}\alpha,$$

valore intieramente simile a quello del caso semplice precedente. Le osservazioni, richieste per determinare v quindi sono: la massa del pendolo e quella del proietto, le distanze dall'asse del centro di gravità e del punto che va a colpire il proietto, la durata di oscillazione e l'ampiezza di oscillazione. Perciò si vede subito che la formula data ha la dimensione di una velocità. I fattori $\frac{2}{\pi}$ e sen $\frac{1}{2}\alpha$ sono numeri, così pure $\frac{M}{m}$ ed $\frac{a}{b}$, il cui numeratore ed il denominatore sono grandezze

della stessa specie. Il fattore gT ha la dimensione lt^{-1}, che è quella di una velocità. Il pendolo ballistico fu scoperto da Robins, che lo descrisse nel suo trattato: *New Principles of Gunnery*, pubblicato nel 1742.

V. *Il principio di D'Alembert.*

1. Uno dei teoremi più importanti per la rapida e facile soluzione dei problemi della meccanica è costituito dal *principio di D'Alembert.* Le ricerche sul centro di oscillazione, di cui si occuparono quasi tutti i contemporanei ed i successori di Huygens, condussero direttamente ad una serie di semplici osservazioni, che D'Alembert infine raccolse generalizzandole nel teorema che porta il suo nome. Innanzi tutto ci occuperemo di questi lavori preliminari. Essi son quasi tutti dovuti al desiderio di sostituire con un principio *più evidente* il principio di Huygens, la cui evidenza non appariva sufficientemente *immediata*. Si è già veduto che questo desiderio si fondava sopra un malinteso dovuto a circostanze storiche, ma che fortunatamente ebbe per conseguenza il conseguimento di *nuovi* punti di vista.

2. Il più celebre fra i successori di Huygens, che fondarono la teoria del centro di oscillazione, è Giacomo Bernoulli. Fin dal 1686 egli cercò di ricondurre alla leva la spiegazione del pendolo composto; ma la sua dimostrazione è assai oscura ed in contraddizione coi concetti di Huygens, come lo fece espressamente osservare L'Hospital (*Journal de Rotterdam,* 1690). Le difficoltà cessarono, allorchè, invece delle velocità conseguite in tempi *finiti*, s'incominciarono a considerare le velocità acquistate durante elementi di tempo *infinitamente piccoli.* Nel 1691 negli *Acta eruditorum* e nel 1703 nei *Comptes-rendus de l'Académie de Paris,* Giacomo Bernoulli corresse l'errore che egli aveva commesso; qui daremo i punti essenziali del suo studio finale.

Si consideri come fece Bernoulli un'asta (fig. 166) orizzontale senza massa AB, la quale possa ruotare liberamente intorno ad A, e siano attaccate ad essa alle distanze r ed r' dal punto A le masse m ed m'. A causa di questo *legame* le masse saranno animate nei loro moti da accelerazioni *differenti* da quelle, che esse avrebbero nel caso della caduta libera, e che esse immediatamente assumerebbero, se si *sopprimesse* il legame. Solamente questo punto, che chiamiamo centro di oscillazione, che si trova ad una distanza ancora incognita x dal punto A, si muove nel legame con la stessa accelerazione, come fosse iso-lato, con l'accelerazione g.

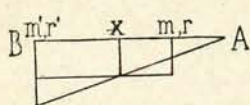



Fig. 166.

Se la legge delle accelerazioni fosse tale, che le accelerazioni dei punti m ed m' fossero rispettivamente $\varphi = \frac{gr}{x}$ e $\varphi' = \frac{gr'}{x}$, cioè se le accelerazioni, a cui i punti sono naturalmente sottoposti, fossero proporzionali alle loro distanze dal punto A, le masse, benchè connesse mediante il legame AB, non si disturberebbero fra loro. Ma in realtà il legame fa subire al punto m una diminuzione d'accelerazione eguale a $g - \varphi$, ed al punto m' un incremento eguale a $\varphi' - g$; dunque il punto m subisce una perdita di forza $m(g - \varphi) = g \cdot \frac{x - r}{x} \cdot m$; ed il punto m' riceve un aumento $m'(\varphi' - g) = g \cdot \frac{r' - x}{x} \cdot m'$.

Ma le masse possono esercitare la loro *mutua azione* l'una sull'altra solo per mezzo della *leva che forma il loro legame;* dunque queste perdite e guadagni di forza devono soddisfare la legge della leva. Se, a causa del suo legame con la leva, il punto m è trattenuto con una forza f in senso contrario al moto, che prenderebbe se fosse libero, inversamente il punto m esercita sulla leva una reazione eguale ad f. È precisamente questa reazione f, che può essere comunicata al punto m', ed essere, in quel punto, equilibrata da una pressione $f' = \frac{r}{r'} \cdot f$; quindi essa è equivalente a quest'ultima pressione. Quindi si ha, avuto

riguardo a ciò che si è precedentemente detto, la relazione:

$$g \cdot \frac{r' - x}{x} \cdot m' = \frac{r}{r'} \cdot g \cdot \frac{x - r}{x} \cdot m,$$

ossia:

$$(x - r)\, mr = (r' - x) \cdot m'r' ;$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{mr^2 + m'r'^2}{mr + m'r'},$$

come già l'aveva trovata Huygens.

Si può immediatamente generalizzare questo ragionamento per un numero qualunque di masse, che siano o no in linea retta.

3. Nel 1712 Giovanni Bernoulli intraprese con un altro metodo la soluzione del problema del centro di oscillazione. Si può in proposito consultare i suoi lavori nella collezione delle sue opere complete (*Opera*, Lausannae et Genevae, 1762, vol. II e IV). Ora esamineremo le sue idee principali. Bernoulli raggiunge lo scopo separando nel suo pensiero le *forze* e le *masse*.

Primieramente consideriamo due pendoli semplici di lunghezze l ed l', cui son sospesi dei corpi, che ricevono le accelerazioni g e g' tali, che sia: $\frac{l}{l'} = \frac{g}{g'}$. La durata dell'oscillazione essendo $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$, sarà la stessa per i due pendoli. Essa rimarrà ancora la stessa, se si raddoppia la lunghezza del pendolo, raddoppiando nello stesso tempo l'intensità della gravità.

In secondo luogo se è impossibile di far variare direttamente l'accelerazione g in un luogo dato, possiamo però fare in modo, con una disposizione conveniente dell'apparecchio, che corrisponda ad essa un cambiamento dell'accelerazione. Ad esempio s'immagini (figura 167) un'asta rettilinea senza massa di lunghezza $2\,a$, la

quale possa ruotare intorno al suo punto di mezzo, ed attacchiamo alle sue estremità le masse m ed m'. Il pendolo così ottenuto equivale ad un pendolo di lunghezza a, di massa $m + m'$, ma tale che la forza che agisce su di esso è $(m - m') . g$, e quindi per essa l'accelerazione è $\frac{m - m'}{m + m'}$. Ora se si cerca la lunghezza del pendolo che, sottoposto all'accelerazione ordinaria g, oscillerebbe nello stesso tempo che il pendolo di lunghezza a, per la formola precedente si avrà:

m'
a
a
m
Fig. 167.

$$\frac{l}{a} = \frac{g}{\frac{m - m'}{m + m'} . g} \quad \text{ossia} \quad l = a . \frac{m + m'}{m - m'} .$$

In terzo luogo consideriamo un pendolo semplice di lunghezza 1 con la massa m alla sua estremità. Il peso di m corrisponde ad una forza metà minore nel pendolo di lunghezza doppia. Quindi la metà della massa m, posta alla distanza 2, sarebbe sottoposta alla stessa accelerazione a causa della forza applicata in 1, ed il quarto della massa m proverebbe un'accelerazione doppia. Così il pendolo semplice di lunghezza 2, con alla sua estremità la massa $\frac{m}{4}$ e sottoposto alla forza primitiva applicata in 1, sarebbe isocrono con il pendolo originario. Generalizzando queste considerazioni si vede che si può sostituire ad una forza qualunque f, applicata in un punto di un pendolo composto, messo ad una distanza r dall'asse, una forza $r . f$ applicata alla distanza 1, e sostituire ad una massa qualunque, posta alla distanza r, la massa $r^2 m$ alla distanza 1, senza cambiar nulla alla durata dell'oscillazione. Una forza f, che agisce all'estremità del braccio della leva a (fig. 168), mentre la massa m si trova alla distanza r dall'asse di rotazione, equivale ad una forza $\frac{af}{r}$, applicata direttamente alla massa m, a cui essa co-

municherebbe l'accelerazione $\frac{af}{mr}$; da cui risulterebbe l'accelerazione angolare $\frac{af}{mr^2}$.

Quindi da ciò che si è detto per ottenere l'accelerazione di un pendolo composto bisogna dividere la somma dei *momenti statici* per la somma dei *momenti d'inerzia*.

Del tutto indipendentemente da Bernoulli Brook Taylor sviluppò le stesse idee, ma pubblicò le sue ricerche solo alquanto più tardi nella sua opera intitolata: *Methodus incrementorum*. Questi sopra esposti sono i più importanti tentativi, che furono fatti per risolvere il problema del centro di oscillazione. Ora vedremo che essi contengono già tutti questa *stessa idea*, che D'Alembert ha espresso sotto una forma *più generale*.

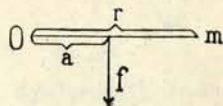



Fig. 168.

4. Consideriamo un sistema di punti M, M', M''... connessi fra loro in modo qualunque e sollecitati dalle forze P, P', P''... che comunicherebbero ai punti M, M', M''..., nell'ipotesi che fossero *liberi*, determinati moti. I punti *connessi fra loro* in generale prendono moti diversi da quelli che potrebbero essere prodotti dalle forze (fig. 169) W, W', W''...; precisamente noi studieremo questi moti. A tal uopo scomponiamo le forze P, P', P''... rispettivamente nelle forze W, V; W', V'; W'', V''; ... Poichè a causa dei legami le componenti W, W', W''... sono quelle che solamente *in realtà* agiscono, le forze V, V', V''... si fanno *equilibrio* per mezzo dei legami. Le forze P, P', P''... si diranno forze *applicate*; W, W', W''... forze *effettive*, che produrrebbero in realtà il moto, e forze guadagnate e perdute, o forze di *connessione* le forze V, V', V''... Quindi si vede che se si scompongono le forze applicate in forze effettive e forze di connessione, quest'ultime si fanno equilibrio per mezzo dei legami. In ciò consiste il principio di D'Alembert. Alla sua esposizione abbiamo apportato una modificazione molto secon-

daria, parlando delle forze invece di parlare di quantità di moto, che esse producono, come fa D'Alembert nel suo *Traité de dynamique*, pubblicato nel 1743.

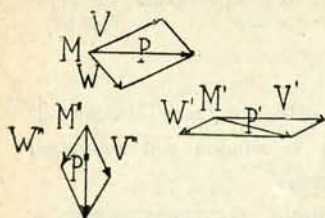



Fig. 169.

Siccome il sistema delle forze V, V', V''... è in *equilibrio*, si può applicare ad esso il principio degli *spostamenti virtuali*. Così si otterrà una seconda forma del teorema di D'Alembert. Inoltre si può mettere anche sotto una terza forma in questo modo: le forze P, P', P''... sono le risultanti delle componenti W, W', W''... e V, V', V''...; quindi se si fanno agire le forze — P, — P', — P''... con W, W', W''... e V, V', V''... vi sarà equilibrio. Il sistema di forze — P, W, V è in equilibrio; ma il sistema V è esso pure in equilibrio; onde il sistema — P, W è pure in equilibrio, e così il sistema P, — W. Perciò se si aggiungono alle forze applicate le forze effettive, prese col segno contrario, allora mediante i legami si ha l'equilibrio. Così fece Lagrange nella sua *Mécanique analytique;* sicchè si può applicare il principio degli spostamenti virtuali al sistema P, — W.

Possiamo esprimerci ancora in un altro modo, cioè che avvi equilibrio fra i sistemi (figura 170) P e — W, e dire che il sistema P è equivalente al sistema W. Hermann (*Phoronomia*, 1716) ed Eulero (*Comment. der Petersburger Akad.*, ant. serie, vol. VII, 1740) hanno adoperato il teorema sotto questa forma, che non differisce essenzialmente da quella di D'Alembert.

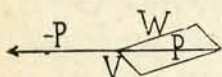



Fig. 170.

5. Alcuni esempî ci faranno comprendere meglio questo teorema. Abbiansi i pesi P e Q, sospesi ad un verricello senza massa (fig. 171) e non in equilibrio; siano R ed r i raggi. Si scomponga la forza P in una forza W, che animerebbe dello stesso moto la massa supposta libera, e in una forza V; si avrà: $P = W + V$. Si scomponga pure Q in W' e V', ciò che dà:

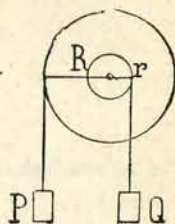
$Q = W' + V'$, poichè è evidente che qui si può trascurare ogni moto, che non si produrrebbe secondo la verticale. Quindi si ha:

$$V = P - W \quad , \quad V' = Q - W',$$

e le forze di connessione V, V' essendo in equilibrio, si ha:

Fig. 171.

$$V \, . \, R = V' r \, ,$$

o:

$$(P - W) \, . \, R = (Q - W') \, . \, r \, , \tag{1}$$

equazione cui si giunge direttamente prendendo il teorema di D'Alembert sotto la sua *seconda forma.* La natura del problema ci permette di riconoscere facilmente che si tratta di un moto uniformemente accelerato e che quindi la sola incognita è l'accelerazione. Adottando il sistema di unità meccaniche terrestri ed indicando con V e V' le accelerazioni che le forze W e W' comunicano alle masse $\frac{P}{g}$ e $\frac{Q}{g}$, si ha:

$$W = \frac{P}{g} \cdot \gamma \quad , \quad W' = \frac{Q}{g} \cdot \gamma' ;$$

d'altra parte si sa che è $\gamma' = - \gamma \frac{r}{R}$; quindi l'equazione (1) si può scrivere:

$$(P - \frac{P}{g} \gamma) \cdot R = (Q + \frac{Q}{g} \cdot \frac{r}{R} \gamma) \cdot r \, ; \tag{2}$$

d'onde:

$$\gamma = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Rr^2} \, . \, Rg \, ,$$

e quindi:

$$\gamma' = - \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} \cdot rg \cdot$$

Così il moto è determinato.

Si vede facilmente che si giunge allo stesso risultato impiegando i momenti statici ed i momenti d'inerzia. Questo metodo dà l'accelerazione angolare φ:

$$\varphi = \frac{PR - Qr}{\frac{P}{g} R^2 + \frac{Q}{g} r^2} = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} \cdot g;$$

e si ritrovano le formule suesposte, sostituendo a φ il suo valore in:

$$\gamma = R\varphi \qquad e \qquad \gamma' = - r\varphi .$$

Quando le masse e le forze sono date, il problema della ricerca del moto è un problema *determinato*. Ora supponiamo che l'accelerazione γ del peso P sia data e che si domandino le forze P e Q, che possono produrre questo moto. L'equazione (2) dà allora:

$$\frac{P}{Q} = \frac{Rg + r\gamma}{(g - \gamma)R^2} \cdot r.$$

Onde il rapporto P : Q è determinato, ma uno dei due pesi si può prendere ad arbitrio. Il problema, come è posto, è *indeterminato* ed ammette un'infinità di soluzioni.

Facciamo un secondo esempio: Un peso P (fig. 172) mobile su una retta verticale AB è connesso al peso Q con un filo che passa sopra una puleggia C e fa con AB l'angolo variabile α. Qui il moto può non essere uniformemente accelerato; ma siccome si considerano solo i moti verticali, si può assai facilmente trovare le accelerazioni γ e γ' di P e di Q per un angolo α qualunque. Procedendo identicamente come nel caso suesposto si ha:

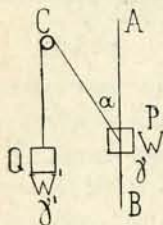



Fig. 172.

$$P = W + V \quad , \quad Q = W' + V';$$

indi:

$$V' \cos \alpha = V;$$

ovvero, poichè è $\gamma' = -\gamma \cos a$:

$$\left(Q + \frac{Q}{g} \cos a \,.\, \gamma\right) \cos a = P - \frac{P}{g} \,.\, \gamma;$$

da cui:

$$\gamma = \frac{P - Q \cos a}{Q \cos^2 a + P} \,.\, g;$$

$$\gamma' = -\frac{P - Q \cos a}{Q \cos^2 a + P} \,.\, (\cos a) \,.\, g \,.$$

Si giunge assai facilmente allo stesso risultato impiegando le nozioni di momento statico e di momento d'inerzia sotto una forma alquanto più generale. La forza, o il momento statico, che agisce su P è $P - Q \cos a$. Ma il peso Q si muove $(\cos a)$ volte più velocemente di P, quindi si deve prendere la sua massa $(\cos^2 a)$ volte; perciò l'accelerazione che prende il peso P è:

$$\gamma = \frac{P - Q \cos a}{\frac{Q}{g} \cos^2 a + \frac{P}{g}} = \frac{P - Q \cos a}{Q \cos^2 a + P} \,.\, g.$$

Nello stesso modo si ottiene l'accelerazione γ'.

Questo processo si fonda sulla semplice osservazione che nel moto delle masse lo spazio percorso è *accessorio* e che l'*essenziale* è il *rapporto* delle velocità o degli spostamenti. Si può spesso servirsi con utilità di questa generalizzazione dei momenti d'inerzia.

6. Ora che possiamo renderci sufficientemente conto dell'applicazione del principio di D'Alembert, non sarà più difficile comprendere chiaramente il suo significato. I problemi sul *moto* dei pesi connessi fra loro sono ricondotti alle esperienze fatte, rispetto ai problemi di *equilibrio*, sulle reciproche azioni dei corpi connessi fra loro. Nel caso in cui queste esperienze siano insufficienti, il teorema di D'Alembert non serve a nulla, come lo dimostrano chiaramente gli esempi suesposti. Onde non bi-

sogna credere che il teorema di D'Alembert sia un teorema *più generale*, che renda *superflue* le esperienze particolari. La sua brevità e la sua semplicità apparenti sono dovute solo al fatto che esse si riferiscono ad esperienze *anteriormente* conseguite. Non può in alcun modo *risparmiarci* la conoscenza esatta e sperimentale della cosa studiata; al contrario si deve conseguire questa conoscenza mediante lo studio diretto del caso proposto, ovvero averla conseguita in un altro problema e trasportarla al caso presente. Come lo dimostrano gli esempî, il principio di D'Alembert infatti non c'insegna nulla che non avremmo potuto apprendere con un altro metodo. Per la soluzione dei problemi esso compie l'ufficio di modello di riferimento che ci risparmia, sino ad un certo punto, la fatica di riflettere rispetto a ciascun nuovo caso particolare, fornendoci il mezzo pratico di utilizzare le esperienze in generale conosciute e già a noi famigliari. Non ci offre nè la *penetrazione* del fenomeno, nè la *maestria pratica* di esso. Il valore del principio di D'Alembert è di ordine *economico*.

Dopo aver risoluto un problema per mezzo del principio di D'Alembert, si può essere, con tutta sicurezza, convinti del valore di questa soluzione mediante le esperienze di equilibrio che questo teorema utilizza. Ma se vuolsi avere un'idea perfettamente chiara del fenomeno, cioè di riscontrarvi gli elementi meccanici più semplici conosciuti, si è costretti di continuarne lo studio e di sostituire, a ciascuna delle esperienze di equilibrio, tanto le concezioni di Newton, quanto quelle di Huygens (cfr. cap. II, n. VII, § 4 e seg.). Nel primo caso si vedono mentalmente prodursi i moti accelerati, dovuti alle reazioni reciproche dei corpi. Nel secondo, stando alla concezione di Huygens, si considerano direttamente i *lavori*, da cui dipendono le forze vive. Quest'ultimo procedimento è particolarmente conveniente, se ci serviamo del principio degli spostamenti virtuali per esprimere le condizioni di equilibrio dei sistemi V o P — W. Allora il principio di D'Alembert dice che la somma dei lavori virtuali dell'uno o dell'altro di questi sistemi è nulla. Dunque, *fatta*

astrazione delle deformazioni dei legami, il lavoro delle forze di connessione è nullo. Quindi tutti i lavori sono fatti *solo* dal sistema P, e quelli del sistema W devono essere eguali a P. Se trascuriamo le deformazioni dei legami, tutti i lavori *possibili* sono dovuti alle forze *applicate*. Sotto questa forma si vede che il principio di D'Alembert non è sostanzialmente diverso da quello delle forze vive.

7. Per l'applicazione del principio di D'Alembert è comodo servirsi di un sistema di assi ortogonali. Si scompone ogni forza P applicata al punto M nelle componenti X, Y, Z, parallele agli assi, ciascuna forza W nelle sue componenti $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, essendo ξ, η, ζ le componenti della accelerazione del punto m, e ciascuno spostamento nelle sue componenti δx, δy, δz. Osservando che il lavoro di una qualunque delle componenti delle forze è determinato dalla componente parallela allo spostamento del suo punto di applicazione, si ottiene, per la condizione di equilibrio del sistema P — W, l'equazione:

$$(1) \qquad \Sigma[(X - m\xi)\,\delta x + (Y - m\eta)\,\delta y + (Z - m\zeta)\,\delta z] = o$$

ossia:

$$(2) \qquad \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\,(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)\,.$$

Queste due equazioni sono l'espressione diretta del teorema che abbiamo or ora enunciato sul lavoro *possibile* delle forze applicate. Se questo lavoro è nullo, ci troviamo nel caso speciale dell'equilibrio. Onde il principio degli spostamenti virtuali risulta come caso *particolare* da questa espressione del teorema di D'Alembert; ciò che d'altronde è naturalissimo, poichè tanto nel caso generale, quanto nel caso particolare, l'elemento essenziale è la conoscenza sperimentale del *significato del lavoro.*

L'equazione (1) dà le equazioni necessarie per determinare il moto, se si esprimono, per quanto è possibile, gli spostamenti δx, δy, δz in funzione degli altri mediante le loro relazioni con questi ultimi, lasciando nell'equazione solo gli spostamenti arbitrarî, di cui allora basta eguagliare a zero i coefficienti, come

si è fatto vedere quando si è parlato del principio degli spostamenti virtuali.

La risoluzione di alcuni problemi mediante il principio di D'Alembert da un canto ci permette di apprezzare quanto esso sia conveniente, e dall'altro di convincersi che si può in questo caso, se lo si creda necessario, risolvere lo stesso problema direttamente, con una chiarezza perfetta, mediante la considerazione dei fenomeni meccanici elementari. Questa convinzione della *possibilità* di quest'ultima operazione la rende inutile ogni qual volta che si abbia di vista uno scopo *pratico.*

VI. *Il principio delle forze vive.*

1. Il principio delle forze vive, come si sa, fu per la prima volta adoprato da Huygens. Per viemaggiormente generalizzare l'espressione che gli aveva dato, Giovanni e Daniele Bernoulli ebbero ad aggiungervi ben poco. Se p, p', p'' ... sono i pesi delle masse m, m', m'' ..., connesse o no fra loro, h, h', h'' ... le loro altezze di caduta, e v, v', v'' ... le velocità acquistate, si ha l'equazione:

$$\Sigma p h = \frac{1}{2} \Sigma m v^2 .$$

Se le velocità iniziali non sono nulle, ma sono v_0, v_0', v_0''..., allora il teorema esprime l'incremento della forza viva mediante il lavoro fatto sotto la forma:

$$\Sigma p h = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2) .$$

Il teorema sussiste quando p, p', p'' ... non rappresentano più de' pesi, ma delle forze costanti qualunque, e h, h', h''... rappresentano non più le altezze verticali di caduta, ma invece cammini qualunque, percorsi nelle direzioni delle forze. Se trattasi di forze variabili si deve sostituire ai prodotti $p \,.\, h$, $p' \,.\, h'$...

le espressioni $\int pds$, $\int p'ds' \ldots$, in cui la lettera p rappresenta la forza variabile e ds lo spazio elementare percorso nella sua direzione; allora si ha:

$$\int pds + \int p'ds' + \ldots = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2),$$

o:

$$\Sigma \int pds = \frac{1}{2} \Sigma m (v^2 - v_0^2).$$

2. Per rendersi esattamente conto del teorema delle forze vive riprendiamo l'esempio semplice, che si è già trattato mediante il principio di D'Alembert. Due pesi (fig. 173) P e Q siano sospesi ad un verricello di raggi R ed r; quando in esso si produce un moto, si fa un lavoro, per cui è determinata la forza viva conseguita; sia a l'angolo di cui gira la puleggia; il lavoro fatto è:

$$\mathrm{P} . \mathrm{R}a - \mathrm{Q} . ra = a (\mathrm{P} . \mathrm{R} - \mathrm{Q}).$$

Indicando con φ la velocità angolare conseguita alla fine della rotazione di un angolo a, la *forza viva* acquistata è:

$$\frac{\mathrm{P}}{g} . \frac{(\mathrm{R} . \varphi)^2}{2} + \frac{\mathrm{Q}}{g} . \frac{(r . \varphi)^2}{2} = \frac{\varphi^2}{2g} (\mathrm{PR}^2 + \mathrm{Q}r^2).$$

Quindi si ha l'equazione:

$$(1) \qquad a (\mathrm{PR} - \mathrm{Q}r) = \frac{\varphi^2}{2g} (\mathrm{PR}^2 + \mathrm{R}r^2).$$

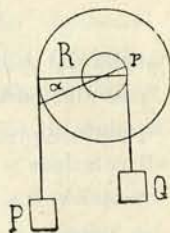



Fig. 173.

Il moto essendo uniformemente accertato, l'angolo a, la velocità angolare φ e l'accelerazione angolare ψ devono essere legate mediante le *stesse* equazioni, che legano s, v e g.

Ora si ha: $s = \frac{v^2}{2g}$; quindi si deve avere: $a = \frac{\varphi^2}{2\psi}$. Sostituendo nella equazione (1) ad a questo valore, si ottiene per

l'accelerazione angolare:

$$\psi = \frac{PR - Rr}{PR^2 + Qr^2} \cdot g,$$

quindi l'accelerazione assoluta del peso P è:

$$\gamma = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} \cdot Rg,$$

come si era trovato.

Come secondo esempio si consideri un cilindro di raggio r, senza massa, ed alla sua superficie siano attaccate due piccole masse eguali m, diametralmente opposte, sotto l'azione delle quali il cilindro rotola senza sdrucciolare sopra un piano (fig. 74), la cui inclinazione è α.

Primieramente osserviamo che, per ottenere la forza viva totale, basta aggiungere alla forza viva del moto di rotazione

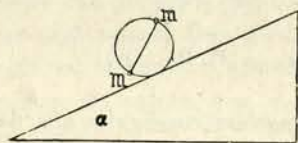
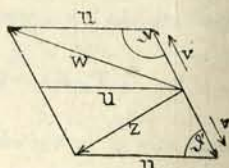



Fig. 174. *Fig. 175.*

quella del moto di traslazione. Infatti siano u la velocità dell'asse del cilindro, parallela al piano inclinato, e v la velocità assoluta di rotazione della superficie del cilindro. La velocità di rotazione v delle due masse eguali m fa con la velocità di traslazione u gli angoli ϑ e ϑ' (fig. 175) tali che si ha $\vartheta + \vartheta' = 180^\circ$. Le velocità risultanti ω e z perciò son date dalle equazioni:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \vartheta,$$

$$z^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \vartheta';$$

ma $\cos \vartheta + \cos \vartheta' = o$; quindi:

$$w^2 + z^2 = 2u^2 + 2v^2$$

e

$$\frac{1}{2} mw^2 + \frac{1}{2} mz^2 = mu^2 + mv^2.$$

Se il cilindro ruota dell'angolo φ, m descrive nel moto di rotazione uno spazio $r\varphi$, mentre l'asse subisce lo stesso spostamento $r \cdot \varphi$. Le velocità v ed u stanno fra loro come gli spazi percorsi, e quindi sono eguali. La forza viva totale ha perciò per espressione $2mu^2$. Indichiamo con l lo spazio percorso dal cilindro lungo il piano inclinato; il lavoro fatto è:

$$mg \cdot l \operatorname{sen} a = 2mu^2;$$

da cui si ha:

$$u = \sqrt{gl \operatorname{sen} a}.$$

La velocità acquistata mediante un semplice sdrucciolamento lungo il piano inclinato sarà $\sqrt{2gl \operatorname{sen} a}$. Quindi si vede che, fatta astrazione dell'attrito, il cilindro che rotola, si muove con un'accelerazione uguale alla metà di quella d'un corpo che sdrucciola lungo il piano inclinato. Nulla si cambia se si suppone che la massa sia uniformemente distribuita sulla superficie del cilindro. Analoghe considerazioni si applicano ad una sfera. Quindi ne consegue che dal punto di vista quantitativo si deve fare una correzione sui risultati delle esperienze di Galileo sulla caduta dei corpi.

Se la massa m è uniformemente distribuita sulla superficie di raggio R, invariabilmente connessa ad un cilindro coassiale senza massa di raggio r, che scende rotolando lungo un piano inclinato, si avrà $\frac{v}{u} = \frac{R}{r}$, ed il teorema delle forze vive darà:

$$mgl \operatorname{sen} a = \frac{1}{r} mu^2 \left(1 + \frac{R^2}{r^3}\right),$$

da cui

$$u = \sqrt{\frac{2gl \operatorname{sen} a}{1 + \frac{R^2}{r^2}}}.$$

Per $\frac{R}{r} = 1$ l'accelerazione della caduta riprende il valore pre-

cedente $\frac{g}{2}$. Per grandissimi valori di $\frac{R}{r}$ l'accelerazione sarà piccolissima e per $\frac{R}{r} = \infty$ il cilindro non *rotola più*.

Come terzo esempio consideriamo una catena (fig. 176) di lunghezza totale l, che giace in parte su un piano orizzontale ed in parte sopra un piano inclinato di un angolo α. Se i piani sono esattamente levigati, il minore anello, che sorpasserà lo spigolo dell' angolo dietro, trascinerà l'intiera catena lungo il piano inclinato. Sia μ la massa dell'unità di lunghezza della catena, x la lunghezza della parte posta sul piano inclinato, v la velocità conseguita; il teorema delle forze vive dà:

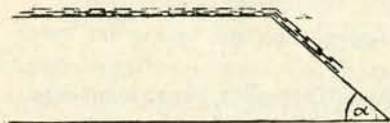



Fig. 176.

$$\frac{\mu . l}{2} . v^2 = \mu x g \frac{x}{2} \operatorname{sen} \alpha = \mu g \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} \alpha ;$$

donde:

$$v = x \sqrt{\frac{g \operatorname{sen} \alpha}{l}} .$$

In questo caso la velocità conseguita è perciò proporzionale al cammino percorso. Si ritrova la legge che Galileo aveva ottenuto come prima ipotesi nel suo studio della caduta dei corpi. Questa condizione può essere d'altronde continuata come si è fatto più sopra (cap. II, n. VIII, § 2).

3. L'equazione (1) delle forze vive si può sempre utilizzare, quando si conosca *intieramente* la traiettoria del mobile e la forza che la sollecita in ciascuno degli elementi del cammino. I lavori di Eulero, di Daniele Bernoulli e di Lagrange hanno mostrato che si può, in certi casi, far uso delle forze vive senza conoscere la *effettiva traiettoria* del moto. Più tardi vedremo come Clairaut abbia resi in questo modo segnalati servigî alla meccanica.

Già Galileo sapeva che la velocità acquistata da un corpo che cade, dipendeva solo dall'*altezza verticale* della sua caduta e punto dalla lunghezza e dalla *forma* della traiettoria percorsa. Huygens trovò che la forza viva di un sistema di masse pesanti dipendeva solo dalle *altezze verticalmente* percorse. Eulero andò più oltre. Se un corpo K (fig. 177*a*) è attratto verso un centro fisso C secondo una legge qualunque, l'incremento di forza viva, per un moto rettilineo del corpo attratto secondo una retta passante pel centro, si può calcolare in funzione dei raggi r_0 e r_1 corrispondenti alle posizioni iniziale e finale del punto mobile. L'incremento della forza viva è lo stesso, quando il corpo K passa dalla posizione di distanza r_0 a quella r_1, qualunque sia la *forma del cammino* percorso KB. Il lavoro elementare dipende infatti solo dalla proiezione dello spostamento sul raggio e quindi rimane lo stesso.

Se il corpo K è attratto verso parecchi centri C, C', C''... l'incremento di forza viva dipende dalle distanze iniziali r_0, r_0', r_0''... e dalle distanze finali r_1, r_1', r_1''... cioè dalle *posizioni iniziale* e *finale*. Daniele Bernoulli si spinse ancora più innanzi, e dimostrò che nell'attrazione *reciproca* di due corpi mobili il cambiamento di forza viva è anche determinato dalle loro *posizioni iniziali* e *finali*. Fu Lagrange che contribuì maggiormente alla soluzione *analitica* di questi problemi. Si uniscano con una retta due punti di coordinate $a, b, c,$ e x, y, z; sia r la loro distanza, ed α, β, γ gli angoli che fa questa retta con gli assi. Si ha, come osserva Lagrange:

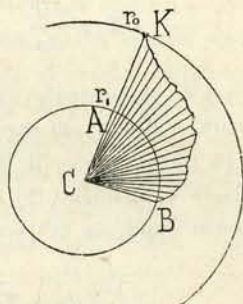



Fig. 177 a.

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r} = \frac{dr}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r} = \frac{dr}{dy},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-c}{r} = \frac{dr}{dz},$$

poichè si ha:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

La forza che i due punti esercitano l'uno sull'altro essendo rappresentata da $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$, le sue componenti saranno:

$$X = f(r) \,.\, \cos \alpha = \frac{dF(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{dF(r)}{dx},$$

$$Y = f(r) \,.\, \cos \beta = \frac{dF(r)}{dr} \,.\, \frac{dr}{dy} = \frac{dF(r)}{dy},$$

$$Z = f(r) \,.\, \cos \gamma = \frac{dF(r)}{dr} \,.\, \frac{dr}{dz} = \frac{dF(r)}{dz}.$$

Le componenti della forza sono quindi le derivate parziali di *una sola e stessa* funzione di r o delle coordinate del punto attratto. Si ha ancora, quando parecchi punti agiscono gli uni sugli altri:

$$X = \frac{dU}{dx} \quad , \quad Y = \frac{dU}{dy} \quad , \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

in cui U rappresenta una funzione di coordinate dei punti, cui Hamilton diede più tardi il nome di *funzione di forze.*

In quest'ordine di idee, e facendo le stesse ipotesi, si può mettere l'equazione (1) delle forze vive sotto una forma, cui si possono applicare le coordinate rettangolari. Si ha:

$$\Sigma \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2),$$

ovvero, poichè la quantità sotto il segno $\int$ è un differenziale esatto, si avrà:

$$\Sigma \int \left(\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz \right) = \Sigma \int dU = \Sigma \frac{1}{1} m (v^2 - v_0^2),$$

$$\Sigma (U_1 - U_0) = \Sigma \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2),$$

indicando con U_1 il valore finale e con U_0 il valore iniziale della stessa funzione delle coordinate dei punti. Questa equazione si usa assai di frequente. Essa esprime semplicemente il fatto che, nelle supposte circostanze, il *lavoro* e quindi la *forza viva dipendono* solo dalle *posizioni* ossia dalle coordinate dei punti del corpo.

Se noi immaginiamo tutte le masse fisse, e soltanto una in moto, il lavoro cambia solo in ragione con cui cambia U. L'equazione U = costante rappresenta una superficie, che si chiama superficie di livello o di egual lavoro. Un moto sopra una di queste superficie non produce alcun lavoro.

VII. *Il principio del minimo sforzo.*

1. Gauss enunciò (nel *Journal für Mathematik* di Crelle, vol. IV, 1829, p. 233) la nuova legge della meccanica detta il principio del *minimo sforzo*. Egli osserva che, nella forma che ha assunto storicamente la meccanica, la dinamica si fonda sulla statica (per esempio il teorema di D'Alembert sul principio degli spostamenti virtuali), laddove sarebbe naturale ripromettersi che nel più elevato stato della scienza la statica apparisse come un caso particolare della dinamica. Il teorema di Gauss, che ora discuteremo, contiene ad un tempo i due casi, statico e dinamico; quindi esso soddisfa alle esigenze dell'estetica logica e scientifica. Si è già osservato che si può dire egualmente del principio di D'Alembert sotto la forma che ha dato ad esso Lagrange, e nel modo di esposizione sopra adottato. Gauss osserva che non si può ora più stabilire in meccanica alcun principio *sostanzialmente nuovo;* ma ciò non esclude la possibilità di scoprire nuovi punti di vista nella considerazione dei fenomeni meccanici. Uno di questi *nuovi punti di vista* è dato dal teorema, di cui ora ci occupiamo.

2. Siano $m, m_1, m_2 \ldots$ masse connesse fra loro in un modo qualunque. Se esse fossero *libere*, le forze che le sono applicate, le farebbero descrivere in un tempo piccolissimo gli spazi ab, $a_1 b_1, a_2, b_2 \ldots$ (fig. 177 *b*), mentre mediante i *legami* esse percorrono in questo stesso elemento di tempo gli spazi $ac, a_1 c_1$, $a_2 c_2 \ldots$. Il teorema di Gauss esprime che il moto *reale* dei punti connessi fra loro è tale che la somma:

$$m(bc)^2 + m_1(b_1c_1)^2 + \ldots = \Sigma m(bc)^2$$

è *minima*, cioè minore che per ogni altro moto concepibile del sistema, i legami rimanendo gli *stessi*. Quando *tutti* i moti dànno a questa somma un valore maggiore di quello che essa prende nella quiete, allora esiste l'*equilibrio*. Il teorema comprende quindi egualmente il caso statico ed il caso dinamico.

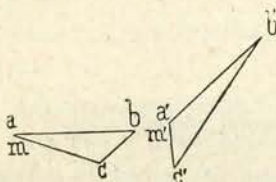



Fig. 177 b.

La somma $\Sigma m \cdot bc^2$ si può chiamare *somma* delle divergenze o semplicemente di divergenza dal moto non impedito. Si scorge subito che nella sua valutazione le velocità attuali dei punti del sistema non intervengono in nulla, poichè esse non cambiano nulla alle posizioni relative dei punti *a*, *b*, *c*.

3. Il nuovo principio può sostituire il teorema di D'Alembert; Gauss ha dimostrato che può pure essere dedotto da esso; questi due teoremi sono quindi equivalenti. In un elemento di tempo le forze *applicate* fanno percorrere alla massa *m* uno spazio *ab*; ma a causa dei legami le forze *effettive* fanno percorrere nello stesso tempo alla stessa massa lo spazio *ac*. Scompongasi *ab* in *ac* e *cb* (fig. 178) e si faccia egualmente per ciascuna delle masse. Le forze che corrispondono agli spazî percorsi $cb, c_1 b_1 \ldots$ e che sono ad essi proporzionali, sono ridotte inoperose e tenute in equilibrio dai legami. Dando alle posizioni finali $c, c_1, c_2 \ldots$ dei punti gli spostamenti virtuali $c\gamma$, $c_1 \gamma_1 \ldots$, i quali formano con cb, $c_1 b_1 \ldots$ gli angoli $\vartheta, \vartheta_1 \ldots$,

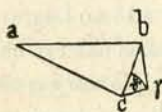



Fig. 178.

potremo applicare il principio degli spostamenti virtuali, poichè, secondo il teorema di D'Alembert, le forze proporzionali a cb, $c_1 b_1 \ldots$ sono in equilibrio. Si ha dunque:

$$(1) \qquad \Sigma m \,.\, cb \,.\, cy \cos \vartheta \leqq o\,;$$

ma d'altra parte si ha:

$$\overline{by}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{cy}^2 - 2bc \,.\, cy \cos \vartheta\,,$$

$$\overline{by}^2 - \overline{bc}^2 = \overline{cy}^2 - 2bc \,.\, cy \cos \vartheta\,,$$

$$(2) \qquad \Sigma m \,.\, \overline{by}^2 - \Sigma m \,.\, \overline{bc}^2 = \Sigma m \,.\, \overline{cy}^2 - 2\Sigma m \,.\, bc \,.\, cy \cos \vartheta\,.$$

L'equazione (1) mostra che il secondo membro dell'eguaglianza (2) è nullo o *negativo*; il termine $\Sigma m\ \overline{cy}^2$ non può dunque essere diminuito dalla sottrazione, ma al contrario *aumentato*; il primo membro della (2) è quindi sempre positivo e $\Sigma m \,.\, \overline{by}^2$ sempre maggiore di $\Sigma m \,.\, bc^2$. Ogni deviazione concepibile per un moto qualunque compatibile con i legami è perciò sempre maggiore di quello che si produce realmente.

4. Indicando con s la deviazione bc nell'elemento piccolissimo di tempo τ ed osservando con Scheffler (*Zeitschrift für Mathematik und Physik* di Schlömilch, v. III, 197) che è $s = \frac{\gamma \,.\, \tau^2}{2}$, γ essendo l'accelerazione, la somma degli sforzi si potrà scrivere sotto una delle forme seguenti:

$$\Sigma m \,.\, s \,.\, s = \frac{\tau^2}{2} \,.\, \Sigma m\gamma \,.\, s = \frac{\tau^2}{2}\, \Sigma p \,.\, s = \frac{\tau^4}{4} \,.\, \Sigma m\gamma^2\,.$$

In queste formule p rappresenta la forza che fa *deviare* la massa m dal moto, che essa prenderebbe, se fosse *libera*. Il fattore costante non ha alcuna influenza sulla condizione del minimo; quindi si può dire che il moto si produce in guisa che una qualunque delle somme:

(1) $\Sigma m s^2$

(2) $\Sigma p s\,,$

(3) o $\Sigma m \gamma^2$

sia minima.

5. Incominciamo a far uso della terza forma nello studio di un primo esempio già trattato più sopra, quello del verricello messo in moto da un eccesso di peso, che agisce da una parte. Le notazioni rimanendo come prima, vediamo che si devono determinare le accelerazioni γ e γ_1 di P e Q in modo che la somma $\frac{P}{g}(g-\gamma)^2 + \frac{Q}{g}(g-\gamma_1)^2$ sia minima, o, poichè è $\gamma_1 = -\gamma\frac{r}{R}$, talchè

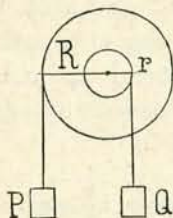



Fig. 179.

$P(g-\gamma)^2 + Q\left(g+\gamma\frac{r}{R}\right)^2 = N$ assume il minor valore possibile.

Si faccia perciò eguale a zero la derivata, si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{dN}{d\gamma} = -P(g-\gamma) + Q\left(g+\gamma\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{r}{R} = o,$$

che dà il valore:

$$\gamma = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2}\cdot Rg,$$

che si è trovato precedentemente.

Come secondo esempio consideriamo il moto sopra il piano inclinato, servendoci della prima forma Σms^2 (fig. 180). Giacchè non si ha da considerare che una massa m, cerchiamo qual'è l'accelerazione γ del moto sopra il piano inclinato che rende minimo il quadrato della declinazione (s^2). Si ha:

$$s^2 = \left(g\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\tau^2}{2}\right)^2 - 2g\frac{\tau^2}{2}\cdot\gamma\cdot\frac{\tau^2}{2}\operatorname{sen} a;$$

facendo $\frac{d(s^2)}{d\gamma} = o$, e trascurando il fattore costante si trova:

$$2\gamma - 2g \operatorname{sen} a = o;$$

da cui si ha il risultato ben noto scoperto da Galileo:

$$\gamma = g \operatorname{sen} a.$$

Il teorema di Gauss contiene anche *il caso dell'equilibrio*, come lo mostra l'esempio seguente. Alle estremità dei bracci di

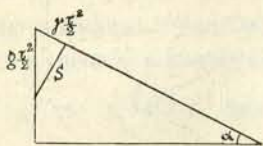
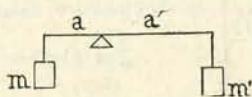



Fig. 180. *Fig. 181.*

leva a ed a' siano sospese le masse pesanti m ed m' (fig. 181); il teorema richiede che

$$m \, . \, (g - \gamma)^2 + m' \, . \, (g - \gamma')^2$$

sia minimo; ora $\gamma' = -\gamma \dfrac{a'}{a}$; e, quando le masse pesanti stanno fra loro in ragione inversa dei loro bracci di leva, $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{a'}{a}$, si ha: $\gamma' = -\gamma \dfrac{m}{m'}$. La somma:

$$m\,(g - \gamma)^2 + m' \left(g + \gamma \frac{m}{m'}\right)^2 = \mathrm{N}$$

quindi deve essere minima. La equazione $\dfrac{d\mathrm{N}}{d\gamma} = o$ dà allora:

$$m \left(1 + \frac{m}{m'}\right) \gamma = o, \text{ da cui } \gamma = o.$$

Quindi l'equilibrio presenta la minima deviazione rispetto al *moto libero.*

Ogni *nuovo impedimento aggiunto* aumenta la somma delle deviazioni ma sempre il meno possibile. Se due o parecchi sistemi sono connessi fra loro, il moto che si produce è tale che la deviazione rispetto al moto dei sistemi *non connessi* è il *minore* possibile.

Ad esempio riuniamo parecchi pendoli semplici in un pendolo composto lineare. Quest'ultimo oscillerà con una deviazione *mi-*

nimo rispetto al moto dei pendoli *semplici*. Per (fig. 182) una semi-oscillazione α l'accelerazione di un pendolo semplice è: g sen α. Chiamiamo γ sen α l'accelerazione del punto posto alla distanza 1 dall'asse di rotazione nel pendolo composto, la deviazione essendo la stessa. La somma:

$$\Sigma m \left(g \text{ sen } \alpha - r\gamma \text{ sen } \alpha\right)^2 \quad \text{o} \quad \Sigma m \left(g - r\gamma\right)^2$$

sarà minima. Se ne trae:

$$\Sigma m \left(g - r\gamma\right) r = o \qquad \text{e} \qquad \gamma = g \frac{\Sigma m r}{\Sigma m r^2}.$$

Fig. 182.

Così il problema è risoluto nel modo più semplice; ma questa soluzione è possibile solo perchè nel teorema di Gauss sono contenute tutte le *esperienze* raccolte molto prima da Huygens, i Bernoulli ed altri.

6. L'*incremento* della deviazione rispetto al moto libero a ciascuno nuovo vincolo può essere messa in evidenza coll' esempio seguente. Un filo teso alle sue estremità da due pesi P passa sopra (fig. 183) due pulegge fisse A e B e sopra una puleggia mobile C. Un peso $2P + p$ si sospende alla puleggia mobile, che perciò cade con l'accelerazione $\frac{p}{4P + p} \cdot g$. Fissiamo la puleggia A, ciò che aggiunge al sistema un nuovo impedimento. La velocità del peso sospeso alla puleggia B diviene allora doppia e questo peso deve perciò essere considerato come avente una massa quadrupla. La puleggia mobile cade coll'accelerazione $\frac{p}{6P + p} \cdot g$. Un calcolo facile fa vedere che la somma delle deviazioni è maggiore nel secondo caso che nel primo.

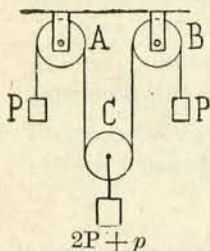



Fig. 183.

Un numero n di pesi eguali p giacciono sopra un piano orizzontale levigato, e siano attaccati ad n pulegge, su cui passa un filo carico alla sua estremità libera di un peso p, come si vede nella figura 184. Secondo che *tutte* le pulegge siano *mo-*

bili o *fisse*, di una all'infuori, si otterranno per p rispettivamente le accelerazioni $\frac{4n}{1+4n} g$ o $\frac{4}{5} g$, a causa delle velocità relative delle masse rispetto al peso p mobile. Quando tutte le $(n+1)$ masse sono mobili, la somma delle deviazioni è $\frac{p \cdot q}{4n+1}$; essa aumenta a misura che il numero n delle masse mobili diminuisce.

Fig. 184.

7. Si consideri un corpo di peso Q, limitato da una faccia piana inclinata, portato da due ruote e mobile sopra un piano orizzontale (fig. 185). Sul piano inclinato giace un peso P. Si riconosce *istintivamente* che il peso P cade con un' accelerazione *maggiore* quando Q sia *mobile*, che non quando Q sia fisso e la discesa di P venga vieppiù impedita. Supponiamo che il peso P

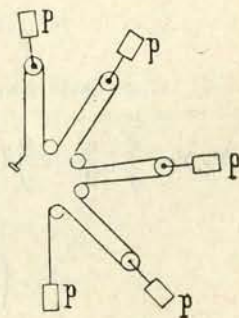
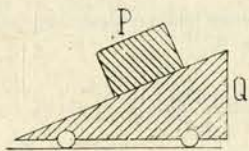
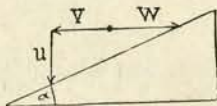



Fig. 185.

cadendo da un'altezza h acquisti la velocità orizzontale v e verticale u, e comunichi al peso di sostegno Q una velocità orizzontale w. Il teorema della conservazione delle quantità di moto, applicabile al moto orizzontale, in cui intervengono solo le forze interne, dà:

$$\mathrm{P}v = \mathrm{Q}w.$$

È d'altronde geometricamente evidente che è:

$$u = (v + w) \cdot \tan a.$$

Le velocità sono dunque:

$$u = u,$$

$$v = \frac{Q}{P+Q}(\cot a) . u$$

$$w = \frac{P}{P+Q}(\cot a) . u.$$

Il lavoro fatto essendo $P . h$, il teorema delle forze vive dà:

$$P . h = \frac{P}{g} . \frac{u^2}{2} + \frac{P}{g}\left(\frac{Q}{P+Q}\cot a\right)^2 . \frac{u^2}{2} + \frac{Q}{g}\left(\frac{P}{P+Q}\cot a\right)^2 . \frac{u^2}{2},$$

o

$$gh = \left(1 + \frac{Q}{P+Q} \cdot \frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2 a}\right)\frac{u^2}{2} \cdot$$

Indichiamo con γ l'accelerazione nel moto *verticale*, si ha:

$$h = \frac{u^2}{2\gamma};$$

basterà sostituire ad h questo valore nella equazione precedente per avere:

$$\gamma = \frac{(P+Q)\,\text{sen}^2 a}{P\,\text{sen}^2 a + Q} . g.$$

Per $Q = \infty$, $\gamma = g\,\text{sen}^2 a$ come sopra un piano inclinato fisso. Per $Q = o$, $\gamma = g$ come nella caduta libera. Infine per valori finiti di Q, come $Q = mP$, si ha:

$$\gamma = \frac{(1+m)\,\text{sen}^2 a}{m + \text{sen}^2 a}\, g > g\,\text{sen}^2 a, \text{ poichè } \frac{1+m}{m + \text{sen}^2 a} > 1.$$

Facendo Q stazionario, ed introducendo così un nuovo impedimento, *aumenta* dunque la deviazione dal moto libero.

Per ottenere γ in qnesto caso ci siamo serviti del teorema della conservazione delle quantità di moto e di quello delle forze vive. L'uso del teorema di Gauss conduce alla soluzione seguente.

Indichiamo con γ, δ, ε le accelerazioni corrispondenti alle velocità u, v, w, ed osserviamo che, nel *mòto libero*, la sola accelerazione sarà l'accelerazione verticale di P, eguale a g, le altre essendo nulle.

Perciò la somma:

$$N = \frac{P}{g}(g-\gamma)^2 + \frac{P}{g}\delta^2 + \frac{Q}{g}\cdot\varepsilon^2.$$

si deve rendere minima. Ma il problema ha solo senso se P e Q sono in contatto, ciò che esige $\gamma = (\delta + \varepsilon)$ $(\tan \alpha)$. Così si ha:

$$N = \frac{P}{g}[g - (\delta + \varepsilon)\tan\ \alpha]^2 + \frac{P}{g}\delta^2 + \frac{Q}{g}\varepsilon^2.$$

Facendo allora $\frac{dN}{d\delta} = \frac{dN}{d\varepsilon} = o$, si ha:

$$-[g - (\delta + \varepsilon)\tan\alpha]\,.\,P\,.\tan\alpha + P\,.\,\delta = o\,,$$
$$-[g - (\delta + \varepsilon)\tan\alpha]\,.\,P\,.\tan\alpha + Q\,.\,\varepsilon = o\,,$$

da cui si ha subito:

$$P\,.\,\delta - Q\,.\,\varepsilon = o;$$

ed infine per γ lo stesso valore di quello che abbiamo precedentemente trovato.

Ora vogliamo trattare questa stessa questione sotto un altro punto di vista. Il corpo P descrive uno spazio s, inclinato di un angolo β sull'orizzonte, le cui componenti orizzontale e verticale indicheremo con v e u, mentre il peso di sostegno Q percorre uno spazio orizzontale w. La componente della forza nella direzione di s è $P \operatorname{sen}\beta$; quindi tenendo conto delle velocità relative di P e Q, si avrà per l'accelerazione di P nella direzione di s:

$$\frac{P \operatorname{sen}\beta}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\left(\frac{w}{s}\right)^2}$$

D'altra parte si hanno le equazioni seguenti:

$$Qw = Pv\,,$$

$$v = s\cos\beta\,,$$

$$u = u\tan\beta\,.$$

L'espressione dell'accelerazione secondo s diviene allora:

$$\frac{Q\,\mathrm{sen}\,\beta}{Q + P\cos^2\beta}\cdot g\,;$$

e quindi l'accelerazione verticale corrispondente è:

$$\gamma = \frac{Q\,\mathrm{sen}^2\beta}{Q + P\cos^2\beta}\cdot g,$$

che dà l'espressione ottenuta più sopra, giacchè vi si sostituisce all'angolo β il suo valore in funzione di α, mediante l'equazione $u = (v + w)\tan\alpha$. L'impiego del momento di inerzia ci ha dunque condotto allo stesso risultato.

Finalmente daremo di questo problema una soluzione diretta. Sopra il piano inclinato mobile il corpo P non cade con l'accelerazione verticale g della caduta libera, ma con un'accelerazione verticale γ. Esso quindi subisce una reazione verticale $\frac{P}{g}(g-\gamma)$. Ora, poichè si fa astrazione dell'attrito, P e Q possono reagire l'uno sull'altro solo mediante una pressione S *normale* al piano inclinato. Si ha dunque:

$$\frac{P}{g}(g-\gamma) = S\cos\alpha$$

e

$$S\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{Q}{g}\,\varepsilon = \frac{P}{g}\,\delta\,;$$

da cui:

$$\frac{P}{g}(g-\gamma) = \frac{Q}{g}\,.\,\varepsilon\,.\cot\alpha\,;$$

ora è $\gamma = (\delta + \varepsilon) \tan a$, ciò che dà infine:

$$(1) \qquad \gamma = \frac{(P+Q)\,\text{sen}^2 a}{P\,\text{sen}^2 a + Q} \cdot g,$$

$$(2) \qquad \delta = \frac{Q\,\text{sen}\, a \cos a}{P\,\text{sen}^2 a + Q} \cdot g,$$

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{P\,\text{sen}\, a \cos a}{P\,\text{sen}^2 a + Q} \cdot g.$$

Per fissare le idee facciamo $P = Q$ ed $a = 45°$, si ottiene $\gamma = \frac{2}{3} g$, $\delta = \varepsilon = \frac{1}{3} g$. Per $\frac{P}{g} = \frac{Q}{g} = 1$, la somma delle deviazioni diviene $\frac{g^2}{2}$. Se P si muovesse sopra un piano inclinato fisso d'inclinazione β, tale che fosse $\tan \beta = \frac{\gamma}{\delta}$, il suo moto si farebbe secondo lo stesso cammino, che esso percorrerebbe sopra il piano inclinato mobile. La deviazione sarebbe quindi $\frac{1}{5} g^2$. Allora il moto sarebbe infatti meno *impedito*, che quando questa accelerazione potesse essere conseguita solo per mezzo dello *spostamento* di Q.

8. Gli esempî ora trattati fanno vedere che il teorema di Gauss *non apporta nuove concezioni essenziali*. Se si adopera la forma (3) del teorema, allora gli si può dare una forma analitica, scomponendo le forze e le accelerazioni secondo tre assi coordinati rettangolari. Impiegando le stesse notazioni adoprate nell'equazione (1) di questo capitolo n.° v.° § 7 si ottiene per $\Sigma m y^2$ l'espressione:

$$(4) \qquad N = \Sigma m \left[\left(\frac{X}{m} - \xi\right)^2 + \left(\frac{Y}{m} - \eta\right)^2 + \left(\frac{Z}{m} - \zeta\right)^2 \right].$$

La condizione del minimo dà:

$$dN = 2\Sigma m \left[\left(\frac{X}{m} - \xi\right) d\xi + \left(\frac{Y}{m} - \eta\right) d\eta + \left(\frac{Z}{m} - \zeta\right) d\zeta \right] = o,$$

ossia:

$$\Sigma [(X - m\xi)\, d\xi + (Y - \eta)\, d\eta + (Z - m\zeta)\, d\zeta] = o.$$

Se non esistono legami, allora tutte le $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono arbitrarie e si ottengono le equazioni del moto facendo eguale a zero ciascun coefficiente. Se esistono dei legami, si ha fra le $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ le stesse relazioni che esistono fra le δx, δy, δz della equazione (1) di questo capitolo n.° v.° § 7. Quindi le equazioni del moto saranno le stesse, come si scorge d'altra parte subito trattando *gli stessi* problemi mediante il teorema di D'Alembert, poi con quello di Gauss. Il primo di questi teoremi fornisce immediatamente le equazioni del moto; il secondo le fornisce mediante una differenziazione. Cercando una espressione, il cui differenziale dà il teorema di D'Alembert, si giunge direttamente a quello di Gauss. Questo teorema è dunque nuovo solo nella sua *forma* e non in sè stesso. Anche per ciò che riguarda il vantaggio di comprendere in uno stesso enunciato i problemi statici ed i dinamici, esso non si trova in migliori condizioni del principio di D'Alembert, espresso nella forma datagli da Lagrange, come s'è visto indietro (vedi cap. III, n.° v.° § 7).

Non occorre andare in cerca di una base mistica o *metafisica* per il teorema di Gauss. Benchè l'espressione *minimo sforzo* sia assai suggestiva, bisogna riconoscere che un concetto non è creato per il solo fatto che é stata immaginata una denominazione. La risposta alla questione di sapere *in che cosa* consiste questo sforzo non ci è fornito dalla metafisica, ma deve essere ricercato nei fatti. Le espressioni (2) o (4) (vedi cap. III, n. VII, § 4 e § 8) che divengono minime, rappresentano il *lavoro* che la deviazione del moto impedito rispetto al moto libero produce in un elemento di tempo. Nel moto reale questo *lavoro di deviazione* è minore che in ogni altro moto concepibile.

9. Una volta che siasi riconosciuto alla nozione di *lavoro* la proprietà di essere fattore determinante del moto, e che siasi compreso che il principio degli spostamenti virtuali significa che nessun moto non si produce quando non si può fare alcun lavoro, non si ha alcuna difficoltà di riconoscere che ogni lavoro *effettuabile* in un elemento di tempo è *in realtà* eseguito. La diminuzione di lavoro dovuto ai legami in un elemento di tempo

si restringe perciò alla quantità distrutta dal loro *contro-lavoro*. Quindi qui abbiamo semplicemente un nuovo aspetto di un fatto già noto.

Questa relazione si presenta già nei casi più semplici. Abbiansi le due masse m ed m, poste in un punto A (fig. 186), la prima sottoposta ad una forza p, la seconda ad una forza q. Riunendole in una sola, la massa totale $2m$ sarà sottoposta alla forza risultante r. Gli spazî percorsi in un elemento di tempo da queste masse libere essendo AB ed AD, lo spazio descritto dalla massa doppia, formata dalla riunione delle altre due, sarà $AO = \frac{1}{2} AD$. La somma degli sforzi é $m(\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2)$. Semplici considerazioni elementari dimostrano che essa è minore di quella che sarebbe se la massa doppia si trovasse alla fine dell'elemento di tempo in un punto M od N affatto qualunque, posto o no su BC. Questa somma è proporzionale alla espressione:

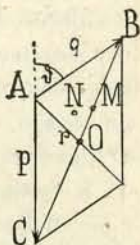



Fig. 186.

$$\frac{1}{2}(p^2 + q^2 + 2pq \cos \vartheta),$$

che diviene $2p^2$ per forze eguali ed opposte, e si annulla per forze eguali e della stessa direzione.

Si considerino due forze p e q, applicate alla stessa massa; scompongasi la forza q in due componenti r ed s rispettivamente parallela e normale a p. I lavori fatti in un elemento di tempo sono proporzionali ai quadrati delle forze; e, se non vi sono legami, si possono esprimere con:

$$p^2 + q^2 = p^2 + r^2 + s^2.$$

Se ora la forza r è direttamente opposta alla forza p, ne consegue una diminuzione di lavoro e la somma diviene:

$$(p - r)^2 + s^2.$$

Le proprietà utilizzate nel teorema di Gauss si trovano perciò già nel principio della composizione o della indipendenza degli effetti delle forze: lo si riconosce immaginando tutte le accelerazioni simultaneamente realizzate. L'impronta metafisica del teorema scompare perciò con la forma vaga della espressione. Si vede il fatto nella sua semplicità; siamo *disillusi*, ma la nostra concezione è divenuta perfettamente *chiara*.

10. Queste spiegazioni intorno al teorema di Gauss sono in gran parte tratte dalla Memoria di Scheffler, già citata. Ma abbiamo modificato, senza dirlo espressamente, quelle opinioni di lui, che non accettavamo compiutamente. Ad esempio non possiamo accettare come *nuovo* il principio che egli propone, poichè egli è ad un tempo *identico* nella forma e nel significato a quello di D'Alembert e di Lagrange.

Il trattato di Lipschitz contiene profonde ricerche sul principio di Gauss: " Osservazioni sul principio del minimo sforzo „ (Borchardt, *Journal f. reine u. angew. Mathematik*, LXXXII, 1877, p. 316). Molti esempi elementari si trovano in K. Hollefreund " Applicazione del principio di Gauss al minimo sforzo „ (Berlino, 1897).

11. Ciò che si è detto al numero 9 ha bisogno di un complemento. Se le masse del sistema non hanno nessuna velocità, i moti reali entrano soltanto nel senso del possibile lavoro in rapporto alle condizioni del sistema (confr. Neuman, Berlino, *Società delle scienze*, IVL, 1892, p. 184). Ma se le masse sono soggette alle velocità, le quali possono essere opposte alle forze sollecitanti, si sovrappongono allora i movimenti determinati dalle velocità e dalle forze (Boltzmann, *Wied. Ann.*, LVII, 1896, p. 45) ed il principio del massimo di Ostwald (Trattato elementare di chimica generale „ vol. III, parte I, 1892, p. 37) è, secondo l'eccellente osservazione di Zemplén, universalmente nota, inadatta (*Ann. d. Physik*, X, 1903, p. 428) alla descrizione di procedimenti meccanici, perchè l'inerzia delle masse non è osservata. Nondimeno resta esatto, che si realizzi il lavoro in rapporto alle condizioni. Il mio testo, composto prima del 1882, non po-

teva naturalmente prendere in considerazione i problemi di meccanica energetica, comparsi dieci anni dopo. Del resto io non posso a queste ricerche oppormi con lo spregio con cui talvolta furono trattate. Anche la vecchia classica meccanica non avrebbe raggiunto la sua odierna forma senza simili errori eventuali. Per esempio contro la concezione di Helm (*L'energia*, 1898, pp. 205-252) essa potrà appena andar soggetta a qualche obbiezione importante. Vedi " La mia esposizione sull'equivalenza „ del concetto di lavoro e di forza (Accademia di Vienna, decembre 1873) così pure molti capitoli della " Meccanica „ particolarmente pagina 272 e seguenti.

VIII. *Il principio della minima azione.*

1. Maupertuis enunciò nel 1747 un teorema che egli chiamò: " principio della *minima quantità d'azione* „; e lo presentò come una manifestazione che eminentemente si accordava colla saggezza del Creatore. Egli prese per misura dell'azione il prodotto della massa, della velocità e dello spazio percorso, ossia $m \,.\, v \,.\, s$, senza che si possa scorgere bene il *perchè*. I termini massa e velocità si riferiscono precisamente a grandezze determinate, ma non così il termine cammino (spazio percorso), se non si conosce in qual tempo esso è percorso. Se il tempo del percorso è l'unità, la distinzione fra velocità e cammino nei casi trattati da Maupertuis è specioso. Sembra che Maupertuis sia pervenuto a questa oscura espressione a causa della confusione che egli fece fra le sue idee sul principio delle forze vive e su quello degli spostamenti virtuali; l'oscurità di una tale espressione si renderà ancora più evidente con uno studio alquanto particolareggiato.

2. Vediamo come Maupertuis applicò il suo principio. Abbiansi due masse M ed m anelastiche; siano C e c le loro velocità prima dell'urto; u la loro velocità comune dopo l'urto. Maupertuis

qui sostituì allo spazio la velocità e domandò che "l'azione" sia minima nel cambiamento di velocità prodotto dall'urto. Dunque

$$M(C-u)^2+m(c-u)^2$$

è un minimo; e ciò richiede:

$$M(C-u)+m(c-u)=o,$$

da cui si ha:

$$u=\frac{M.C+m.c}{M+m}.$$

Se le masse sono elastiche, indicando con V e v le loro velocità dopo l'urto, la somma

$$M(C-V)^2+m(c-v)^2$$

deve essere minima; d'onde:

$$M(C-V)\,dV+m(c-v)\,dv=o; \tag{1}$$

ma siccome la velocità di avvicinamento prima dell'urto è uguale a quella di allontanamento dopo l'urto, si ha inoltre:

$$C-c=-(V-v),$$

$$C+V-(c+v)=o, \tag{2}$$

$$\text{e} \qquad dV-dv=o. \tag{3}$$

Il sistema di equazioni (1), (2) e (3) dànno immediatamente le espressioni conosciute di V e v.

Si scorge facilmente che questi due casi si possono considerare semplicemente come fenomeni, nei quali la reazione produce un cambiamento di forza viva minima, e quindi in essi è *minimo* il *contro-lavoro*. Perciò rientra nel principio di Gauss.

3. Seguendo questa via Maupertuis stabilì la *legge della leva* in un modo tutto suo particolare. Due masse M ed m (fig. 187)

siano fissate all'estremità di un'asta a, che vien divisa da un asse di rotazione nei due segmenti x ed $(a-x)$. Se *l'asta si mette a ruotare*, le velocità sono proporzionali agli spazî percorsi e l'espressione

$$Mx^2 + m(a-x)^2$$

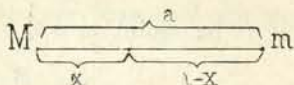



Fig. 187.

deve essere minima. Quindi ne consegue:

$$Mx - m(a-x) = o,$$

$$x = \frac{m \cdot a}{M+m},$$

condizione che effettivamente è soddisfatta nel caso di *equilibrio*. Ma a questa soluzione si possono fare due obbiezioni. Prima di tutto le masse senza peso e senza forze, che Maupertuis ammette tacitamente, sono *sempre* in equilibrio; in secondo luogo risulterebbe da questa dimostrazione che il principio della minima azione è verificato *solo nel caso di equilibrio*, e ciò certamente non è quello che l'autore si prefigge di stabilire.

Per mettere d'accordo, per quanto è possibile, la soluzione di questo problema con quella del precedente, si deve supporre che il moto che si comunicano le masse *pesanti* M ed m è tale, che il cambiamento della forza viva è a ciascun istante il minore possibile. Allora, rappresentando con a e b i bracci di leva, u e v le velocità conseguite nella unità di tempo, si trova che l'espressione:

$$M(g-u)^2 + m(g-v)^2$$

deve essere minima, cioè:

$$M(g-u)\,du + m(g-v)\,dv = o.$$

Ora il legame che costituisce la leva dà:

$$\frac{u}{a} = -\frac{v}{b}, \quad \text{e} \quad du = -\frac{a}{b}\,dv;$$

e da queste equazioni si ricava subito:

$$u = a \cdot \frac{M \cdot a - m \cdot b}{M \cdot a^2 + m \cdot b^2} g, \quad v = -b \cdot \frac{M \cdot a - m \cdot b}{M \cdot a^2 + m \cdot b^2} \cdot g .$$

Se vi ha equilibrio $u = v = o$, e quindi:

$$M \cdot a - M \cdot b = o .$$

Perciò si vede che questa dimostrazione conduce al principio di Gauss per poco che si cerchi a renderla rigorosa.

4. Maupertuis trattò, seguendo l'esempio di Fermat e Leibniz, il problema della *propagazione della luce*, ma qui impiegò la nozione di " minima azione „ in un " *senso tutto differente* „. Nel caso della rifrazione l'espressione, che deve essere minima, è $m \cdot AR + n \cdot RB$ (fig. 188), in cui AR ed RB sono i cammini percorsi dalla luce nel primo e nel secondo mezzo, m ed n gli indici di rifrazione corrispondenti. Se si determina il punto R secondo questa condizione di minimo si ottiene infatti:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{m}{n} = \text{costante};$$

ma prima " l'azione „ consisteva nel *cambiamento* del prodotto massa $\times$ velocità $\times$ cammino; ora consiste nella *somma* di queste espressioni. Prima si teneva conto dello spazio percorso nell'*unità di tempo*, mentre ora se ne considera il cammino *totale*. Perchè non dovremmo, ad esempio, stabilire che $m \cdot AR - n \cdot RB$ ovvero $(m - n)$ (AR — RB) debba essere minimo? Aggiungiamo ancora che, anche quando si accetta la soluzione di Maupertuis, bisogna, per conformarsi ai fatti, sostituirvi alle velocità della luce le loro inverse.

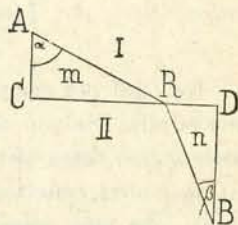
Quindi si vede che non si trattava di alcun principio particolare scoperto da Maupertuis, ma piuttosto invece di una *forma simbolica* vaga che, con molta imprecisione e con qualche sforzo, permette di riunire parecchi casi particolari differenti già noti. Abbiamo trovato necessario di entrare in alcuni particolari, poichè la concezione di Maupertuis é circondata ancora da una certa

aureola storica. Essa sembrerebbe quasi come una briciola di fede religiosa caduta entro il dominio della meccanica. Ciò non ostante, benchè Maupertuis non avesse la potenza necessaria per riuscire nel suo intento, tuttavia il suo *sforzo*, per penetrare più profondamente nei fenomeni, non fu sterile; esso fu *prezioso stimolo* per Eulero e forse anche per Gauss.

Fig. 188.

5. Eulero ritiene che si possono comprendere i fenomeni naturali tanto mediante le loro *cause finali*, quanto per le loro cause *efficienti*. Ora se si cerca di concepirli per mezzo dei loro fini, si può, *a priori*, presumere che ogni fenomeno naturale presenta un *massimo* o un *minimo*. Sarebbe tuttavia assai difficile determinare, mediante considerazioni metafisiche, la natura di questo massimo o di questo minimo. Ma, ad esempio, nella risoluzione dei problemi meccanici con i metodi ordinari una sufficiente attenzione ci fornisce il mezzo di scoprire l'espressione che in tutti i casi presenta questa proprietà. Eulero non fu quindi tratto in errore da propensioni metafisiche, e procedè molto più *scientificamente* di Maupertuis: il suo intendimento è di cercare l'espressione, la cui variazione posta eguale a zero, conduce alle note equazioni della meccanica.

Per un *sol* corpo, messo in moto mediante l'azione di forze, Eulero trovò l'espressione cercata sotto la forma $\int vds$, ds essendo l'elemento della traiettoria percorsa e v la velocità corrispondente. Per la traiettoria *effettivamente* seguita dal corpo, questa espressione è minore che per qualunque altro cammino infinitamente prossimo, fra lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, che il corpo potrebbe essere *costretto* di prendere. Quindi si può inversamente, quando si *cerca* la traiettoria, determinarla cercando la curva che rende $\int vds$ minimo. Naturalmente questo problema ha un significato solo quando v dipende dalla posizione dell'elemento ds, cioè quando si può applicare ad esso il teorema delle forze vive ed esiste una fun-

zione delle forze, o ciò che è lo stesso quando v è una semplice funzione delle coordinate. Eulero suppone evidentemente queste condizioni. Quando il moto è piano, l'espressione si può scrivere sotto la forma seguente:

$$\int \varphi(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, . \, dx \, .$$

Nei casi più semplici il teorema di Eulero è ben facile a dimostrarsi. Se non agisce alcuna forza, v è costante, la traiettoria è una retta, per cui $\int vds = v\int ds$ è evidentemente *minore* di ogni altra traiettoria, avente le *stesse* estremità. Anche un corpo, che non essendo sottoposto ad alcuna forza si muove senza attrito sopra una superficie, vi conserva la sua velocità, e descrive su di essa la *linea più breve*.

Ora si consideri il moto di un corpo lanciato secondo la traiettoria parabolica (fig. 189) ABC. Per tale traiettoria la somma $\int vds$ è minore che per qualunque curva vicina, minore anche che per la retta ADC, che congiunge le estremità dell'arco della parabola. Qui la velocità dipende solo dall'altezza verticale percorsa dal corpo; essa è quindi la stessa per tutte le curve nei punti posti ad altezze eguali al di sopra di OC. Dividiamo queste curve in elementi corrispondenti con rette orizzontali. Gli elementi della parte superiore (fig. 189) AD della retta sono minori degli elementi corrispondenti della parte superiore AB della parabola, e questi elementi debbono essere rispettivamente moltiplicati per uno stesso valore di v. Ma per le parti inferiori DC e BC gli elementi della retta sono invece maggiori di quelli della parabola; ora la velocità v ha, per questi elementi, un valore maggiore che per gli elementi superiori. Quindi si comprende che $\int vds$ può essere minimo per la parabola, come lo dimostra un calcolo rigoroso.

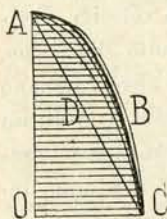



Fig. 189.

Se ora si vuole ottenere l'equazione della traiettoria mediante il teorema, si prenda A per origine delle coordinate, AO come

asse delle ascisse, contate positivamente verso il basso, e la perpendicolare ad AO per asse delle y. Indicando con g l'accelerazione della gravità e con a l'altezza della caduta corrispondente alla velocità iniziale, l'espressione che bisogna rendere minima è:

$$\int_o^x \sqrt{2g(a+x)}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,dx\,.$$

Il calcolo delle variazioni allora dà per condizione del minimo:

$$\frac{\sqrt{2g(a+x)}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=\mathrm{C}\,,$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{2g(a+x)-\mathrm{C}^2}}\,,$$

ed infine:

$$y=\int\frac{\mathrm{C}dx}{\sqrt{2g(a+x)-\mathrm{C}^2}}=\frac{\mathrm{C}}{g}\sqrt{2g(a+x)-\mathrm{C}^2}+\mathrm{C}',$$

ove C e C′ sono le coordinate d'integrazione. Prendendo per $x=o$ la $y-o$ e $\frac{dy}{dx}=o$, si ha:

$$\mathrm{C}=\sqrt{2ga}\quad\mathrm{e}\quad\mathrm{C}'=o\,;$$

l'equazione diviene:

$$y=2\sqrt{ax}\,.$$

Quindi si trova la traiettoria parabolica nota.

6. Susseguentemente Lagrange fece *espressamente* osservare che si può fare uso del principio di Eulero solo nel caso in cui sussiste il teorema delle forze vive. Jacobi dimostrò che non s può, propriamente parlando, affermare che per il moto reale la somma $\int vds$ è *minima*, ma semplicemente che la *variazione* di questa somma è nulla, se si passa dalla traiettoria reale ad una traiettoria infinitamente prossima. Questa condizione infatti corrisponde *in generale* ad un massimo o ad un minimo, ma essa può anche essere soddisfatta *senza* massimo, nè minimo; quindi bisognerà apportare certe restrizioni alla proprietà del minimo. Se, ad esempio, un corpo costretto a rimanere sulla superficie di una sfera, viene messo in moto da un impulso, esso descrive un arco di cerchio massimo che è, in generale, una linea più breve; ma quando l'angolo dell'arco di cerchio percorso supera 180°, si dimostra facilmente che esistono in essa infinitamente vicine linee sferiche più corte, che terminano alle stesse estremità.

7. Dunque fin qui si è osservato questo fatto soltanto, che le equazioni ordinarie del moto si ottengono con l'eguagliare a zero la variazione di $\int vds$. Ora le espressioni del moto dei corpi e delle loro traiettorie si possono sempre esprimere col fare eguale a zero le espressioni differenziali. Inoltre la condizione, cui la variazione di un integrale è nulla, si esprime pure facendo eguale a zero un'espressione differenziale. Quindi si può, senza alcun dubbio, immaginare *diverse altre* espressioni integrali che, mediante le loro variazioni, condurranno alle equazioni ordinarie del moto senza che perciò esse abbiano *necessariamente* un significato *fisico* particolare.

8. Tuttavia è assai notevole il fatto che un'espressione così semplice, come $\int vds$, possegga la proprietà che or ora si è discussa; e presentemente tenteremo di scoprirne il *significato fisico*. A tal uopo le analogie notate da Giovanni Bernoulli e Möbius, che esistono fra il moto delle masse ed il moto della luce, come pure tra il moto delle masse e l'equilibrio funicolare, ci saranno di una grande utilità.

Un corpo, su cui non agisce alcuna forza, conserva la stessa velocità in grandezza e direzione e descrive una retta. In un mezzo omogeneo (avente ovunque lo stesso indice di rifrazione) un raggio luminoso percorre una retta. Un filo, alle cui estremità soltanto sono applicate delle forze, si distende in linea retta.

Un corpo che si muove da A a B, seguendo una traiettoria qualunque, e la cui velocità $v = \varphi(x, y, z)$ è funzione delle coordinate, descrive fra questi punti una curva per cui $\int v ds$ è in generale minimo. Un raggio di luce che va da A a B segue la stessa curva, se l' indice di rifrazione del mezzo è dato dalla stessa funzione delle coordinate, $n = \varphi(x, y, z)$; allora $\int n ds$ è minimo. Un filo teso fra questi stessi punti, e la cui tensione in ciascun punto sia $S = \varphi(x, y, z)$, segue pure la stessa curva; $\int S ds$ è in questo caso un minimo.

La condizione di *equilibrio di un filo* può facilmente dare il *moto di un punto materiale*. Sia ds un elemento di filo, su cui agiscono le tensioni S ed S', rappresentate (fig. 190) da BA e BC. Sia P la forza sollecitante l'unità di lunghezza del filo; sull'elemento ds quindi agisce, oltre le tensioni, la forza $P . ds$ rappresentata da BD. Queste tre forze si fanno equilibrio. Ora s'immagini un corpo, che incominci a descrivere lo spazio ds con una velocità v, rappresentata in grandezza e direzione da AB, e vi riceva una velocità $BF = - BD$: il corpo procederà in avanti con la velocità $v' = BC$. Sia Q una forza acceleratrice opposta a P, che dà nell'unità di tempo un'accelerazione Q; per l'unità di lunghezza del filo l'incremento di velocità sarà quindi $\frac{Q}{v}$, e per la lunghezza ds sarà $\frac{Q}{v} ds$. La traiettoria del moto seguirà perciò il filo se, fra la forza P e la tensione S del filo da un canto, la forza acceleratrice Q, applicata alla massa e la velocità v dall'altra, esiste la relazione:

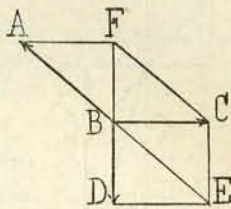



Fig. 190.

$$P : -\frac{Q}{v} = S : v,$$

il segno meno indica che le direzioni di P e di Q sono opposte.

Un filo circolare chiuso è in equilibrio, quando fra la tensione S, che è la stessa per tutti i suoi punti, e la forza P, applicata all'unità di lunghezza del filo e che agisce verso l'esterno nel senso dei raggi, esiste la relazione $P = \frac{S}{r}$, r essendo il raggio della circonferenza. Un corpo si muove con un moto circolare uniforme quando fra la sua velocità v e la sua accelerazione centripeta Q esiste la relazione: $\frac{Q}{v} = \frac{v}{r}$ ossia $Q = \frac{v^2}{r}$. Un corpo si muove con una velocità costante v secondo una curva qualunque se, a ciascun istante, è sollecitato da una forza acceleratrice $Q = \frac{v^2}{r}$, diretta verso il centro della traiettoria. Un filo è in equilibrio secondo una curva qualunque con una tensione costante S, se in ciascuno dei suoi punti è applicata per ogni unità di lunghezza una forza $P = \frac{S}{r}$, diretta dal centro di curvatura verso l'esterno.

Nel *moto di propagazione* della luce non si riscontra un concetto analogo a quello di forza. Quindi si dovrà procedere ben altrimenti per dedurre il moto della luce dall'*equilibrio di un filo* o dal *moto di una massa*. Si consideri una massa, che si muove con una velocità $AB = v$ (fig. 191). Una forza, che agisce secondo BD, produce un incremento di velocità BE, che dà, mediante la composizione con la velocità $v = AB = BC$, la velocità $v' = BF$. Scomponendo le velocità v e v' secondo le direzioni parallela e perpendicolare alla forza, si vede che solo la componente *parallela* è *modificata* dall'azione di questa. Indichiamo con K la componente perpendicolare, α ed α' gli angoli che fanno le velocità con la direzione della forza, avremo allora:

Fig. 191.

$$K = v \operatorname{sen} \alpha = v' \operatorname{sen} \alpha';$$

da cui si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a'} = \frac{v}{v'} .$$

Ora immaginiamo un *raggio luminoso*, che percorra la retta AB, e che si spezzi nel punto B sopra una superficie piana, rifrangente, perpendicolare alla direzione della forza e passante da un mezzo, il cui indice di rifrazione sia n, in un altro, il cui indice di rifrazione sia n' e tale che $\frac{n}{n'} = \frac{v}{v'}$. Questo raggio luminoso seguirà la traiettoria del corpo, che ora si è considerato. Quindi se vogliamo stabilire l'analogia fra il *moto della massa* ed *il fenomeno della propagazione di un raggio luminoso*, devesi supporre in ciascun punto un indice di rifrazione n *proporzionale* alla velocità. Per dedurre dalle forze gl'indici di rifrazione si avranno le formule seguenti, in cui P rappresenta la forza e dq un elemento di spazio percorso nella direzione di questa:

$$d\frac{v^2}{2} = \mathrm{P} \,.\, dq ,$$

ed il suo analogo:

$$d\frac{n^2}{2} = \mathrm{P} \,.\, dq .$$

Indicando con ds l'elemento dello spazio percorso ed a l'angolo che fa con la direzione della forza, si ha:

$$d\frac{v^2}{2} = \mathrm{P} \,.\, \cos a \,.\, ds ,$$

$$d\frac{n^2}{2} = \mathrm{P} \,.\, \cos a \,.\, ds .$$

Nelle condizioni assunte più sopra, la traiettoria di un proietto è data da:

$$2\,y = \sqrt{ax} .$$

Un raggio di luce si propaga secondo la stessa parabola in un mezzo, il cui indice di rifrazione segue la legge:

$$n = \sqrt{2(a+x)}\,.$$

9. Ora studieremo più accuratamente le relazioni fra la proprietà del minimo e la *forma* della traiettoria. Primieramente si consideri (fig. 192) una linea spezzata ABC, intersecata dalla retta MN; si ponga $AB = s$, $BC = s'$, e si cerchi la condizione necessaria, affinchè il cammino, che va dal punto fisso A al punto fisso B, renda minima l'espressione:

$$vs + v's'\,,$$

ove v e v' sono le due costanti diverse, l'una per la regione al di sopra di MN, l'altra per la regione al di sotto di MN. Si dia al punto B uno spostamento infinitamente piccolo $BD = m$; la nuova traiettoria AC rimane parallela alla prima, come lo fa vedere la rappresentazione simbolica della figura 192. L'espressione $vs + v's'$ riceve l'incremento $-vm \operatorname{sen} a + vm' \operatorname{sen} a'$, che è proporzionale a $-v \operatorname{sen} a + v' \operatorname{sen} a'$. Quindi la condizione del minimo è:

Fig. 192.

$$-v \operatorname{sen} a + v' \operatorname{sen} a' = o\,,$$

o

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a'} = \frac{v'}{v}\,.$$

Se si vuol rendere minima l'espressione $\frac{s}{v}$, si ottiene pure esattamente:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a'} = \frac{v}{v'}\,.$$

Nel caso di un *filo* teso ABC, le cui tensioni S ed S' sono diverse al disopra ed al di sotto di MN, l'espressione che bisogna rendere minima è:

$$S\,.\,s + S'\,.\,s'\,.$$

Per fissare le idee si supponga (fig. 193) che il filo teso una *volta* da A a B e *tre volte* da B a C, sorregga un peso P; si ha: $S = P$, $S' = 3P$. Se si sposta il punto B della lunghezza m, ogni *diminuzione* della espressione $Ss + S's'$ esprime un'incremento del *lavoro*, che fa il peso sospeso P. Se

$$-S . m . \text{sen}\, \alpha + S' . m \,\text{sen}\, \alpha' = o,$$

allora non si fa alcun lavoro: il *minimo* di $S . s + S' . s'$ corrisponde al *minimo* del lavoro fatto. Quindi il principio della minima azione è qui semplicemente un'altra forma del principio degli spostamenti virtuali.

Si supponga che ABC sia un *raggio luminoso* e che le velocità di propagazione v e v' al di sopra ed al disotto di MN stiano fra loro come 3 : 1. Il raggio di luce si muove da A a B secondo la traiettoria percorsa in un tempo minimo, e ciò si verifica per una ragione fisica semplicissima. La luce va da A a B sotto forma di onde elementari secondo differenti cammini. A causa della periodicità del fenomeno queste onde generalmente si distruggono; solamente quelle che giungono in tempi eguali, e quindi a fasi eguali producono un risultato. Ora questa condizione si realizza *solo* per le onde, che giungono nel punto B per *la via più breve* e per le traiettorie infinitamente prossime. Onde la traiettoria effettivamente seguita dalla luce rende minima l'espressione: $\frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}$; e, poichè gli indici di rifrazione sono inversamente proporzionali alle velocità di propagazione, l'espressione $ns + n's'$ è ad un tempo minima.

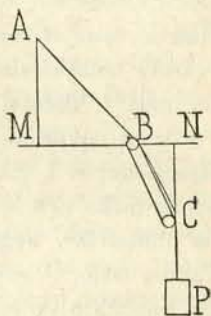



Fig. 193.

Quando si considera il moto di *una massa*, la condizione che $vs + v's'$ sarà un minimo, ci si presenta con un certo carattere di novità (fig. 194). Si supponga che all'istante, in cui la massa in moto sorpassi il piano MN, la sua velocità passi dal

valore v al valore v' maggiore, per esempio per l'effetto di una forza diretta secondo BD; la traiettoria della massa sarà tale che:

$$v \,.\, \mathrm{sen}\, a - v' \,.\, \mathrm{sen}\, a' = k\,.$$

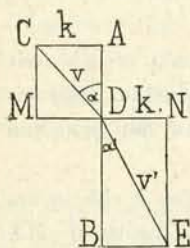



Fig. 194.

Questa equazione, che è identica alla condizione del minimo, esprime semplicemente il fatto che solo la componente della velocità parallela alla direzione della forza subisce un cambiamento, mentre la componente normale a questa direzione rimane invariabile. Quindi il teorema di Eulero offre ancora in questo caso una forma nuova di un fatto già famigliare.

È necessario di aggiungere alcune osservazioni a quanto si è esposto, pubblicate nel 1883. Si vede che il principio della minima azione, e, con esso, tutti gli altri principii del minimo, che s'incontrano in meccanica, esprimono semplicemente che, in ciascun caso, *si verifica esattamente tutto quello che si può verificare* nelle circostanze del caso considerato, cioè tutto ciò che da essa è determinante e determinato *in un modo unico.* I casi di equilibrio si possono dedurre da questa unica determinazione; si è già discusso questa deduzione; e vi torneremo sopra anche più innanzi. Rispetto ai casi dinamici J. Petzoldt ha dimostrato, meglio e *più chiaramente* di quello che io non l'abbia fatto, il senso del principio della *determinazione unica* nel suo libro intitolato: *Maxima, minima und Oekonomie* (Altenburg, 1891), che qui citerò testualmente (pag. 11): " *Bei allen Bewegungen lassen sich also die wirklich genommenen Wege immer als ausgezeichnete Fälle unter unendlich vielen denkbaren auffassen. Analytisch heisst das aber nichts Anderes als: es müssen sich immer Ausdrücke finden lassen, welche dann, wenn ihre Variation der Null gleichgesetzt wird, die Differentialgleichungen der Bewegung liefern, denn die Variation verschwindet ja nur, wenn das Integral einen einzigartigen Werth*

annimmt„. Eccone la traduzione: “ In qualsiasi moto, la traiettoria realmente percorsa appare sempre come nettamente *distinta* fra un *infinito numero di traiettorie immaginabili*. Ma analiticamente ciò significa solo questo: è sempre possibile trovare espressioni, la cui variazione eguagliata a zero dà le equazioni differenziali del moto, poichè la variazione non può annullarsi, fuorchè sol quando l'integrale prende un valore *determinato in un unico modo* „. Infatti si vede che nell'esempio ora trattato un incremento di velocità è determinato *in un sol modo* solo nella direzione della forza. Infatti perpendicolarmente a questa forza questo incremento potrebbe prendere un numero infinito di direzioni, aventi tutti lo stesso ufficio; quindi esse si trovano tutte escluse dal principio della determinazione unica. Io sono perfettamente d'accordo con Petzoldt quando dice: “ I teoremi di Eulero e di Hamilton, non meno di quello di Gauss, non sono perciò altro che *espressioni analiliche del fatto sperimentale che i fenomeni della natura sono determinati in un modo unico* „. La *singolarità* del minimo è determinata.

Conviene pure di citare qui il luogo seguente di un Articolo da me pubblicato nella rivista il *Lotos* di Praga (n° del novembre 1873): “ I principii di equilibrio e di moto della meccanica possono essere espressi sotto forma di leggi degli isoperimetri. La concezione antropomorfica qui non è essenziale in nulla; si prenda per esempio il principio dei lavori virtuali. Se si è riconosciuto il lavoro A come determinante della velocità, si vede facilmente che, dal momento che non *avvi alcun* lavoro fatto per i passaggi del sistema a tutte le conformazioni prossime, nessuna velocità non può essere acquistata; e che, per conseguenza, esiste l'equilibrio. La condizione di equilibrio è dunque $\delta A = o$; essa non richiede precisamente che A sia massimo o minimo. Queste leggi non sono rigorosamente limitate al campo della meccanica. Esse possono essere assai generali. Quando il cambiamento di un fenomeno B dipende da un fenomeno A, la condizione affinchè B sia in un certo stato, è $\delta A = o$ „.

Come si vede scrivendo ciò, io ammetto la possibilità di scoprire, nei rami più disparati della fisica, i teoremi analoghi a quello della minima azione, senza seguire per arrivarvi la via indiretta della meccanica. Non considero più la meccanica come la base fondamentale della spiegazione di tutte le altre scienze, ma invece, per la ragione del suo stato di progresso formale, come un eccellente prototipo di queste scienze. A tal riguardo il mio modo di vedere differisce in apparenza poco, ma per altro essenzialmente, da quelli di gran parte dei fisici. Per ulteriori schiarimenti rimanderò il lettore al mio trattato sui *Principien der Värmelehre* (particolarmente alle pp. 192, 318, 356) ed al capitolo: " Sul principio della comparazione nella scienza fisica „ de' miei "*Populär-wissenschaftl. Vorlesungen* „, (p. 251). Notevoli articoli su questo soggetto, sono quello di C. Neumann: " *Das Ostwald'scheAxiom des Energieumsatzes* „ ossia " L'assioma di Ostwald sulla trasformazione dell'energia „ (*Berichte d. K. Sächs. Gesellschaft*, 1892, p. 184), l'altro di Oswald " *Ueber das Princip des ausgezeichneten Falles* „ (*loc. cit.*, 1893, p. 600) ossia " Sul principio del caso singolare „.

10. La condizione del minimo trovata più sopra:

$$- v \operatorname{sen} a + v' \operatorname{sen} a' = o\,.$$

dà, quando si passa da una spezzata poligonale finita agli elementi di curva:

$$- v \operatorname{sen} a + (v + dv) \operatorname{sen} (a + da) = o\,,$$

ossia:

$$d\,(v \operatorname{sen} a) = o\,;$$

od infine:

$$v \operatorname{sen} a = \text{costante}.$$

Per il problema della propagazione della luce si ottengono le equazioni corrispondenti:

$$d\,(n \operatorname{sen} a) = o \quad , \quad n \operatorname{sen} a = \text{costante}\,,$$

$$d\left(\frac{\operatorname{sen} a}{v}\right) = o \quad , \quad \frac{\operatorname{sen} a}{v} = \text{costante},$$

e per la forma di equilibrio dei fili:

$$d\,(\mathrm{S} \operatorname{sen} a) = o \quad , \quad \mathrm{S} . \operatorname{sen} a = \text{costante}.$$

Per spiegare ad esempio le osservazioni precedenti si riprenda il problema della traiettoria di un proietto pesante. Indichiamo ancora con a l'angolo di un elemento della curva con la verticale e si prenda l'asse delle x orizzontale. La velocità è: $v = \sqrt{2g\,(a+x)}$. La condizione $v \operatorname{sen} a =$ costante o $\sqrt{2g\,(a+x)} \cdot \frac{dy}{dx} =$ costante è identica a quella, che fornisce il calcolo delle variazioni; ma ora se ne conosce il *significato fisico*, che è semplicissimo. Si immagini un filo (fig. 195), la cui tensione è data da $\mathrm{S} = \sqrt{2g\,(a+x)}$; ciò che si potrebbe fino ad un certo punto realizzare per mezzo di taglie fisse senza attrito, i cui paranci, che portano un numero conveniente di pulegge, possono sdrucciolare lungo guide orizzontali, poste in un piano verticale, e sui cui passa successivamente un filo fissato ad un'estremità e teso all'altra estremità da un peso.

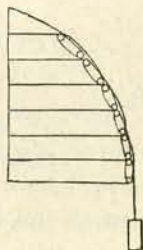



Fig. 195.

Si ritrova per l'equilibrio la stessa condizione, ma ora essa ha un significato fisico ben chiaro. Il filo assume la forma di una parabola, quando la distanza fra le guide diminuisce indefinitamente. In un mezzo, il cui indice di rifrazione è dato dalla legge $x = \sqrt{2g\,(a+x)}$, o la velocità della luce dalla legge: $v = \frac{1}{\sqrt{2g\,(a+x}}$, e quindi cambia solo secondo la verticale, il raggio luminoso è una parabola. Se in questo mezzo la velocità cambia secondo la legge $v = \sqrt{2g\,(a+x)}$, la traiettoria del raggio luminoso sarebbe una cicloide; per la quale sarebbe minimo il valore di: $\int \frac{ds}{\sqrt{2g\,(a+x)}}$ e non quello di: $\int \sqrt{2g\,(a+x)} \cdot ds$.

11. Confrontando l'equilibrio di un filo con il moto di una massa si può, invece del filo avvolto su di un sistema di pulegge, considerare un semplice filo omogeneo, purchè si faccia agire su di esso un sistema di forze, che produca le tensioni richieste. Si può osservare facilmente che i sistemi di forze che dànno la velocità o la tensione per la *stessa* funzione delle coordinate sono *differenti*. Così ad esempio la gravità dà per velocità $v = \sqrt{2g(a+x)}$, quando un filo omogeneo pesante in equilibrio forma una catenaria (fig. 196), la cui tensione è data da $S = m - nx$, m ed n essendo delle costanti. L'analogia fra l'equilibrio dei fili ed il moto delle masse consiste essenzialmente in questo, che per un filo sottoposto a forze, che ammettono una funzione di forze U, si ha l'equazione $U + S =$ costante, facile d'altronde a dimostrarsi. Le interpretazioni *fisiche* del teorema della minima azione, che si son date solo pei casi semplici, sussistono anche nei casi complicati, che si ottengono immaginando per esempio dei gruppi di superficie di eguale tensione, di eguale velocità o di eguale indice di rifrazione, che dividono il filo, la traiettoria della massa od il raggio luminoso in elementi; ed in questi casi bisogna intendere con la notazione α l'angolo formato da un *elemento* con la *normale* alla superficie. Lagrange ha esteso il teorema della minima azione ai sistemi materiali e l'ha messa sotto la forma:

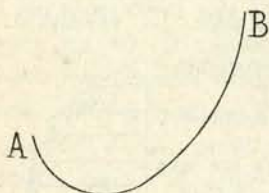



Fig. 196.

$$\delta \Sigma m \int v ds = o\,.$$

Ora se si osserva che i legami lasciano sussistere il teorema delle forze vive, che è la base essenziale del teorema della minima azione, si vede ancora che in questo caso quest'ultimo teorema conserva la sua validità, e si può interpretare fisicamente.

IX. *Il principio di Hamilton.*

1. Si è già fatto osservare che si possono immaginare *diverse* espressioni, le cui variazioni, eguagliate a zero, dànno le equazioni ordinarie del moto. Il principio di Hamilton fornisce un'espressione di questa specie:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{U}+\mathrm{T})\,dt=o \qquad \text{ossia} \qquad \int_{t_0}^{t_1}(\delta\mathrm{U}+\delta\mathrm{T})\,dt=o\,.$$

ove δU e δT sono le variazioni del lavoro e della forza viva, e debbonsi annullare ai limiti t_0 e t_1. Facilmente si può dedurre il teorema di Hamilton da quello di D'Alembert, ovvero inversamente il secondo dal primo. In sostanza questi due teoremi sono identici e differiscono solo per la forma. (1).

2. Senza entrare in una discussione approfondita di questo principio, faremo vedere l'identicità dei due teoremi mediante un *esempio,* e sceglieremo quello che ci ha già servito per illustrare il teorema di D'Alembert: il problema del verricello messo in moto da un'eccedenza di peso, che agisce da una parte. Invece del moto *reale* dell'apparecchio si può immaginare un moto infinitamente poco *differente,* che si compie nello stesso intervallo di tempo, e coincide con il moto reale all'inizio ed alla fine. Così si produce in ciascuno elemento di tempo dt una variazione δU del lavoro ed una variazione δT della forza viva, che modificano i valori U e T, che queste grandezze hanno nel moto reale. Ma in quest'ultimo l'integrale (1) è nullo; quindi esso può servire a determinarlo. Se, durante l'elemento di tempo dt, l'angolo di rotazione differisce da quello del moto reale della

---

(1) Vedi per esempio Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematischen Physik;* Mechanik, p. 25; e Jacobi, *Vorlesungen über Dgnamik,* p. 58.

variazione a, la variazione del lavoro corrispondente ad un tal cambiamento sarà:

$$\delta U = (P . R - Q . r) . a = M . a.$$

Fig. 197.

Per la velocità angolare w la forza viva è:

$$T = \frac{1}{g} (P . R^2 + Q . r^2) . \frac{w^2}{2} ;$$

per la variazione δw si ha:

$$\delta T = \frac{1}{g} (P . R^2 + Q . r) . w . \delta w ;$$

ma, se l'angolo di rotazione varia di a nel tempo dt, si ha:

$$\delta w = \frac{da}{dt} ,$$

e

$$\delta . T = \frac{1}{g} (P . R^2 + Q . r^2) . w . \frac{da}{dt} = N . \frac{da}{dt} .$$

Quindi l'integrale si può scrivere così:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(M . a + N . \frac{da}{dt} \right) . dt = o ;$$

ma

$$d\,(Na) = N \frac{da}{dt} + a \frac{dN}{dt} ;$$

da cui:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(M - \frac{dN}{dt} \right) a . dt + \Big[Na \Big]_{t_0}^{t_1} = o .$$

La parte integrata scompare, perchè si è supposto $a = o$ ai limiti, cioè all'inizio ed alla fine del moto. Quindi si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(M - \frac{dN}{dt} \right) a . dt = o \quad ;$$

e, siccome a è arbitrario ed in ciascun istante indipendente da dt, questa equazione richiede che sia per ogni valore di t:

$$M - \frac{dN}{dt} = o,$$

che dà, quando si sostituisce alle lettere i loro valori:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} \cdot g.$$

Inversamente si può partire dalla equazione:

$$\left(M - \frac{dN}{dt}\right) . a = o,$$

che il principio di D'Alembert dà per ogni spostamento *possibile,* ed ottenne successivamente le equazioni:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(M - \frac{dN}{dt}\right) . a . dt = o,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(M . a + N \frac{da}{dt}\right) dt - \Big[Na\Big]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \left(Ma + N \frac{da}{dt}\right) dt = o.$$

3. Un secondo e più semplice esempio ci è fornito dalla caduta verticale dei gravi. Per ogni spostamento infinitamente piccolo s si ha l'equazione:

$$\left(m . g - m . \frac{dv}{dt}\right) s = o,$$

ove le lettere hanno il significato convenzionale. Se ne deduce:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(mg - m . \frac{dv}{dt}\right) s . dt = o,$$

o, osservando che:

$$\frac{d(mv \cdot s)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot s + mv \cdot \frac{ds}{dt},$$

e che:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d(mvs)}{dt} dt = \Big[mvs \Big]_{t_0}^{t_1} = o,$$

poichè s s'annulla ai limiti, l'integrale precedente dà:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(mgs - mv \frac{dv}{dt} \right) dt = o,$$

che ha la forma del principio di Hamilton.

Così quindi per quanto differente possan sembrare i principii della meccanica, tuttavia essi non contengono espressioni di fatti distinti, ma in qualche modo contengono semplicemente *aspetti* diversi degli stessi fatti.

X. *Applicazione dei principii della meccanica alla risoluzione di alcuni problemi di idrostatica e di idrodinamica.*

1. Gli esempî che abbiamo dato si riferiscono a sistemi di corpi solidi; ed ora completeremo questi esercizî sui teoremi della meccanica con alcuni problemi d'idrostatica e d'idrodinamica.

Per primo esempio prenderemo la discussione delle leggi di equilibrio di un liquido senza peso, sottoposto solo alle così dette forze molecolari. Le forze di gravità saranno trascurate nelle nostre considerazioni. Infatti Plateau ha fatto vedere come si può porre un liquido in condizioni tali, che la gravità rimanga come soppressa. Ciò accade per esempio se si pone una certa quantità di olio di olivo in una mescolanza di acqua e di alcool

di peso specifico eguale a quello dell'olio. In virtù del principio di Archimede il peso dell'olio è allora equilibrato dalla spinta e questo liquido, agisce realmente come se fosse senza peso.

2. Primieramente consideriamo una massa liquida, senza peso, libera nello spazio; poichè le forze molecolari agiscono solo a piccolissime distanze, immaginiamo descritta intorno a ciascuna molecola liquida *a*, *b*, *c* una sfera, la così detta sfera di azione molecolare di raggio eguale alla distanza, alla quale le forze molecolari non hanno più un effetto sensibile. Tutto intorno a ciascuno dei punti *a*, *b*, *c* queste sfere sono uniformemente e regolarmente riempite di altre molecole in modo, che la forza risultante sopra ciascuna delle molecole *a*, *b*, *c* è nulla. Solo le parti liquide, la

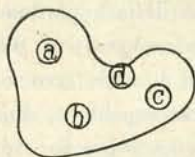
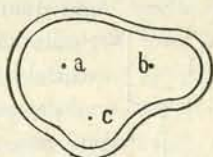



Fig. 198. *Fig. 199.*

cui distanza dalla superficie sia minore del raggio della sfera di azione molecolare, sono in differenti condizioni dinamiche delle molecole interiori. Supponendo che i raggi di curvatura in ciascun punto della superficie siano grandissimi rispetto al raggio della sfera di azione molecolare, si potrà separare dal rimanente della massa liquida uno strato superficiale di spessore eguale a questo raggio, e nel quale le molecole si trovano in *altre* condizioni fisiche differenti da quelle interne. La molecola interna *a*, trasportata dalla posizione *a* alla posizione *b* o *c*, rimane nelle stesse condizioni fisiche, come le parti, che sono venute ad occupare a sua posizione primitiva. In questo modo non si fa alcun lavoro. Quindi vi si effettuerà solo del lavoro, quando le molecole dallo strato superficiale siano trasportate all' interno od inversamente, e, perciò, solo quando avvi *cambiamento* della grandezza della superficie. D'altronde è indifferente, se la densità sia o no

la stessa nello strato superficiale ed internamente, o se essa sia o no la stessa in tutti i punti di questo strato. Facilmente si vede che il compimento di un lavoro dipende dal cambiamento della superficie, anche quando la massa liquida sia immersa in un altro fluido, come nell'esperimento di Plateau.

Ora ricercheremo se la diminuzione della superficie, prodotta dalla penetrazione delle molecole superficiali del liquido, corrisponda ad un lavoro positivo o negativo, cioè se questa diminuzione richiedè o dia lavoro. Si sa che due goccioline liquide a contatto si riuniscono in una sola *da sè stesse*; questa riunione diminuisce la superficie. Ne consegue che una *diminuzione* della superficie corrisponde ad un *lavoro compiuto* (lavoro positivo). Una bellissima esperienza di Van der Mensbrugghe fa vedere che ogni diminuzione della superficie liquida dà origine ad un lavoro positivo. S'immerga un quadrato fatto di filo di ferro nell'acqua in cui sia sciolto del sapone, e, dopo averlo tirato fuori, si ponga sopra lo strato liquido, che vi è rimasto aderente, un filo chiuso, precedentemente bagnato. Se si trasporta la parte liquida interna al filo, si vede subito lo strato di acqua di sapone circoscritto contrarsi fino a che il filo non vi separi un vuoto circolare. Ma il cerchio è la figura di area minima fra le figure piane dello stesso perimetro; quindi il liquido rimanente si è contratto fino a presentare una superficie minima.

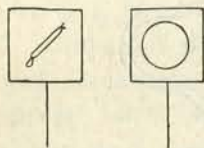



Fig. 200.

Le seguenti considerazioni ora riusciranno più chiare. Un liquido senza peso, sottoposto a delle forze molecolari, sarà in equilibrio, allorchè un sistema qualunque di spostamenti virtuali non produrrà nessun cambiamento della sua superficie libera. Come spostamenti *virtuali* si possono riguardare tutti i cambiamenti di forma, infinitamente piccoli, compatibili con la invariabilità del *volume* del liquido. Quindi l'equilibrio sussiste per tutte quelle forme, per cui una deformazione infinitamente piccola produce una variazione nulla dell'area della superficie. Un'area superficiale *minima* per un volume liquido dato corrisponderà

ad uno stato di equilibrio *stabile;* un'area *massima* ad un equilibrio *instabile.*

Fra tutti i solidi dello stesso volume la sfera è il solido che ha minor superficie. Onde la forma sferica è la figura di equilibrio stabile per una massa liquida libera; cioè la figura per cui è stato fatto un massimo di lavoro; quindi non può essere fatto da essa ulterior lavoro. Se il liquido aderisce ai corpi rigidi, la figura di equilibrio dipende da diverse condizioni accessorie, che rendono il problema più complicato.

3. Si può procedere nel modo seguente nello studio delle relazioni fra la *forma* e *l'area* della superficie. Immaginiamo che la superficie chiusa del liquido varî infinitamente poco, rimanendo inalterato il volume. Si scomponga la superficie primitiva in elementi rettangolari infinitamente piccoli mediante due sistemi di linee di curvatura perpendicolari fra loro. Nei vertici di questi elementi rettangolari innalziamo alla superficie primitiva le normali, che intersecano la superficie deformata nei punti, che si prendono per vertici di elementi superficiali corrispondenti ai primi. Un elemento dO della superficie primitiva corrisponde ad un elemento dO' della superficie deformata. L'elemento dO si trasforma in dO' mediante uno spostamento infinitamente piccolo δn secondo la normale, verso l'interno o verso l'esterno, accompagnato da una variazione corrispondente nella superficie.

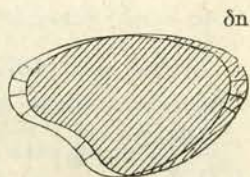



Fig. 201.

Siano dp e dq i lati dell'elemento dO; le relazioni seguenti daranno i lati dp', dq' dell'elemento dO':

$$dp' = dp \,.\left(1 + \frac{\delta n}{r}\right),$$

$$dq' = dq \,.\left(1 + \frac{\delta n}{r'}\right),$$

ove r ed r' sono i raggi di curvatura delle sezioni principali tangenti agli elementi delle linee di curvatura p e q, detti anche i raggi di curvatura principali della superficie nei punti considerati, affetti dai segni $+$ o $-$, secondo che gli elementi corrispondenti sono convessi o concavi verso l'esterno. La variazione dell'elemento dO si può allora scrivere:

$$\delta dO = dO' - dO = dp \,.\, dq \,.\left(1 + \frac{\delta n}{r}\right)\left(1 + \frac{\delta n}{r'}\right) - dp \,.\, dq \,.$$

Trascurando le potenze superiori di δn avremo:

$$\delta \,.\, dO = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) . \,\delta n \,.\, dO \,.$$

Onde l'espressione della variazione della superficie totale è:

$$\text{(1)} \qquad \delta O = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) . \,\delta n \,.\, \delta O \,.$$

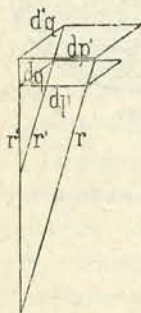



Fig. 202.

Gli spostamenti normali δn debbono d'altra parte essere tali che sia:

$$\text{2)} \qquad \int \delta n \,.\, dO = o \,,$$

cioè tali che la somma dei volumi elementari, positivi e negativi, generati dagli spostamenti degli elementi di superficie verso l'esterno o verso l'interno, sia nulla, restando così costante l'intiero volume.

Ma le espressioni (1) e (2) non possono essere

nulle ad un tempo, se la somma $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ non ha *lo stesso valore* in tutti i punti della superficie. Ciò si può vedere mediante la seguente considerazione. Si rappresentino simbolicamente gli elementi dO della superficie primitiva con gli

elementi della linea AX, e su questa portiamo come ordinate nel piano E gli spostamenti normali δn, positivi verso l'alto, negativi verso il basso, secondo che essi sono fatti verso l'esterno o verso l'interno. Queste ordinate determinano colle loro estremità una curva, e prendiamo la quadratura di essa, contando positivamente le aree poste al di sopra di AX (fig. 203) e negativamente quelle poste al di sotto. Ogni sistema di spostamenti δn, per cui è uguale a zero questa superficie totale, annulla anche l'espressione (2), e quindi esso è ammissibile, cioè costituisce un sistema di spostamenti virtuali.

Ora si portino, come ordinate nel piano E', i valori di $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ corrispondente a ciascun elemento dO. Si può facilmente immaginare una forma di superficie, per cui le espressioni (1) e (2) prendano insieme il valore zero; ma se, in questa ipotesi, l'espressione $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ ha valori *differenti* per i diversi elementi della superficie, si potrà *sempre*, senza alterare il valore zero della (2), distribuire gli spostamenti δn in modo che l'espressione (1) sia diversa da zero. Solo quando $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ ha lo *stesso* valore in tutti i punti della superficie, le espressioni (1) e (2) necessariamente e costantemente si annullano ad un tempo.

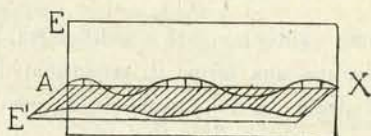



Fig. 203.

Quindi le due condizioni simultanee (1) e (2) richiedono che sia:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \text{costante},$$

cioè la somma delle curvature principali deve perciò essere la stessa in tutti i punti della superficie. Questo teorema mostra chiaramente la relazione fra l'*area* e la *forma* della superficie libera del liquido. Il ragionamento, di cui ci siamo serviti, è

stato adoprato per la prima volta da Gauss (1), ma sotto una forma assai più completa e più particolareggiata. Tuttavia si vede che si può senza difficoltà esporre brevemente i punti essenziali della sua teoria, riferendosi un caso particolare semplice, come abbiamo fatto noi.

4. Si è già detto che una massa liquida intieramente libera assume la forma sferica, che corrisponde ad un minimo assoluto di superficie. La condizione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=$ costante, qui si pone sotto la forma $\frac{2}{R}=$ costante, R essendo il raggio della sfera; essa evidentemente è soddisfatta. La superficie libera del liquido assume una forma di superficie di rivoluzione, quando essa sia limitata da due dischi rigidi, posti nei piani perpendicolari alla retta che congiunge i loro centri. La natura della curva meridiana ed il volume della massa compresa dalla superficie, sono determinati dal raggio comune dei dischi, dalla distanza dei loro piani e dal valore che prende l'espressione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ per la superficie di rivoluzione. Questa superficie è cilindrica quando è:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Per

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=o,$$

ove una sezione normale è connessa e l'altra è concava, la curva meridiana è una catenaria. Plateau ha resi reali questi diversi casi riunendo per mezzo di una massa d'olio due anelli di filo di ferro, immersi in miscuglio di alcool e di acqua.

Ora si consideri una massa liquida limitata da una banda dalle parti di superficie, per cui l'espressione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ ha un va-

(1) *Principia Generalia Theoriae Figurae Fluidorum in Statu Aequilibrii*, Gottinga 1830; Werke, vol. V, 29; Gottinga 1867

lore positivo, e da un'altra parte dalle porzioni di superficie, per cui essa ha un valore negativo, o più brevemente da superficie convesse e concave. Si scorge facilmente che lo spostamento normale degli elementi di superficie verso l'esterno trae seco una diminuzione di area, se essi sono convessi. Quindi avvi un *lavoro compiuto*, quando gli *elementi concavi* della superficie si muovono *verso l'esterno* e gli *elementi concavi verso l'interno*. Si avrà pure un *lavoro fatto* quando una parte di superficie, per cui è $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=+a$, si muove verso l'esterno nello stesso tempo che un'altra parte eguale di superficie, per la quale è $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}>a$, si muove verso l'interno.

Da ciò consegue, allorchè superficie di *curvature diverse* limitano una massa liquida, che le parti convesse sono spinte verso l'interno e le parti concave verso l'esterno, sino a che la condizione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=$ costante sia soddisfatta per l'intiera superficie. Similmente quando una *stessa massa* liquida ha la sua superficie libera separata in *parecchie* parti intieramente limitate da corpi solidi, l'equilibrio richiede che l'espressione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ abbia lo stesso valore per *tutte* le parti della superficie libera.

Così ad esempio nell'esperimento della massa di olio, immersa nella miscela di alcool e di acqua e limitata da due anelli, si può, impiegando una conveniente quantità di olio, ottenere un cilindro, avente per base due calotte sferiche; ma le curvature delle superficie laterali e delle basi soddisfano la relazione:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho};$$

da cui:

$$\varrho=2R,$$

ove ϱ è il raggio delle sfere di base ed R il raggio degli anelli. Plateau verificò sperimentalmente queste conseguenze.

5. Nel caso di una massa liquida senza peso, che racchiude uno spazio vuoto, è impossibile che sia soddisfatta la condizione che $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ abbia lo stesso valore per le superficie interna ed esterna. Invece se per la superficie chiusa esterna questa somma ha un valore positivo sempre maggiore che per la superficie chiusa interna, il liquido farà un lavoro passando dalla superficie esterna verso la superficie interna e riempirà il vuoto. Ma se questo spazio vuoto contiene un liquido o un gas sotto una data pressione, il lavoro fatto da questo flusso sarà *compensato* dal lavoro contrario della compressione e così si stabilirà l'equilibrio.

Si consideri una *bolla* liquida, cioè una massa liquida limitata da due superficie vicinissime, simili e similmente poste. Questa bolla può essere tenuta in equilibrio solo da un eccesso di pressione del gaz che essa contiene. Se per la superficie esterna la somma $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ ha il valore a, essa avrà il valore $-a$ per la superficie interna vicinissima. Una bolla intieramente libera prenderà sempre la forma sferica. Se ne trascuriamo lo spessore, la superficie totale diminuisce di $16\pi r \,.\, dr$, quando il raggio diminuisce di dr; se si rappresenta con A il lavoro fatto per una diminuzione di superficie eguale ad uno, il lavoro totale fatto sarà $A \,.\, 16\pi r \,.\, dr$; questo lavoro deve essere compensato dal lavoro della pressione p, il quale è equivalente a $p \,.\, 4\pi r^2 \,.\, dr$. Quindi si ha: $\frac{4A}{r}=p$, e da questa equazione si può dedurre A, r essendo dato dalla misura del raggio della bolla e p da un manometro.

Fig. 204.

Una bolla sferica apetra non può sussistere. Se questa fosse una forma di equilibrio, l'espressione $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ non solo dovrebbe essere costante per le due superficie limiti separatamente, ma avere ancora valori eguali per entrambe. Ma siccome esse hanno le loro curvature opposte, allora si deve avere $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=o$, e quindi

in ciascun punto $r = -r'$. Onde la superficie d'equilibrio deve essere una superficie a *curvatura media nulla* o superficie *minima:* si vede subito che i suoi elementi hanno la forma di una *sella*. Si ottengono queste superficie immergendo in una soluzione di sapone ed acqua, o meglio nel liquido glicerinico di Plateau, curve chiuse qualsiasi in filo di ferro; il velo liquido, che vi rimane aderente, rappresenta la superficie minima passante per il contorno dato.

6. Le figure di equilibrio dei veli liquidi sottili posseggono una proprietà particolare. In un liquido qualunque il lavoro della gravità si manifesta in *tutta* la massa, quando quello delle forze molecolari si limita ad uno strato superficiale; quindi il primo in generale è preponderante. Ma nei veli sottili le forze molecolari si trovano in condizioni assai *favorevoli* dinnanzi alla gravità, ed è possibile di produrre queste figure di equilibrio all'aria libera senza alcuna difficoltà. Plateau le ottenne immergendo nella soluzione di acqua e sapone dei cavalletti di filo di ferro, che formavano gli spigoli dei poliedri. Allora si formano dei veli liquidi piani, che si riuniscono fra loro negli spigoli del sostegno. Quando i veli liquidi sottili si incontrano in modo da formare un angolo vuoto, la legge $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ — costante non è più soddisfatta; poichè questa somma ha il valore zero per la superficie piana, e per lo spigolo dell'angolo un valore negativo grandissimo. Ne consegue che conformemente alla teoria che ora si è esposto il liquido deve effluire a facce piane verso gli angoli e gli strati debbono costantemente assottigliarsi. Infatti si verifica questo fenomeno; ma quando lo spessore degli strati sia diminuito fino ad un certo punto, allora si ha uno *stato di equilibrio*, dovuto a ragioni *fisiche,* che pare siano ancora assai mal note.

Benchè in queste figure la condizione $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} =$ costante non sia più soddisfatta, poichè i veli liquidi sottilissimi e in particolar modo quelli dei liquidi viscosi sono in condizioni fisiche alquanto

differenti da quelle delle nostre ipotesi, tuttavia esse sono sempre superficie di area *minima*. Le facce liquide che s'intersecano tanto tra loro, quanto negli spigoli del sostegno, si tagliano sempre tre a tre, sotto angoli quasi eguali, prossimi a 120°; quindi quattro spigoli si tagliano sotto angoli eguali. La geometria dimostra che queste condizioni traggono seco un minimo di superficie. Nella grande diversità dei fenomeni, che si sono fin qui discussi, un solo ed unico fatto si esprime sempre: cioè che le forze molecolari fanno un lavoro positivo, quando avvi una diminuzione dell'area della superficie libera.

7. Le forme di equilibrio, che Plateau ottenne coll'immergere nella soluzione di acqua e sapone sostegni poliedrici di filo di ferro, formano sistemi di veli liquidi, i quali sono di una *simmetria* meravigliosa. Così si è condotti a domandarsi perchè l'equilibrio è in generale intimamente connesso alla simmetria ed alla regolarità. Ciò si spiega facilmente. In ogni sistema simmetrico ad ogni deformazione, che distrugge la simmetria, ne corrisponde un'altra eguale, opposta ed egualmente possibile. A queste due deformazioni corrisponde uno stesso lavoro preso con segni opposti. Perciò una condizione di equilibrio, quantunque non sia assolutamente sufficiente, è che la forma di equilibrio corrisponde ad un massimo o ad un minimo di lavoro. Quindi questa condizione è soddisfatta da una forma simmetrica. La regolarità è una simmetria multipla. Onde non avvi punto da meravigliarsi, se spesso le figure di equilibrio siano regolari o simmetriche.

8. L'idrostatica matematica è sorta dietro un problema speciale, cioè quello *della forma della Terra*. Considerazioni fisiche ed astronomiche condussero Newton e Huygens all'idea che la Terra sia un elissoide di rivoluzione schiacciato. Newton tentò di calcolare lo schiacciamento supponendo la Terra liquida e partendo dalla ipotesi che tutte le colonne liquide, che vanno dalla superficie al centro, esercitano la stessa pressione su questo punto. Huygens invece partì dalla ipotesi che le direzioni delle forze siano normali agli elementi di superficie. Bouguer accoppiò

le due ipotesi, ed infine Clairault (*Théorie de la forme de la Terre,* Parigi, 1743) dimostrò che anche la verificazione simultanea delle *due* condizioni *non assicura* l'esistenza dell'equilibrio.

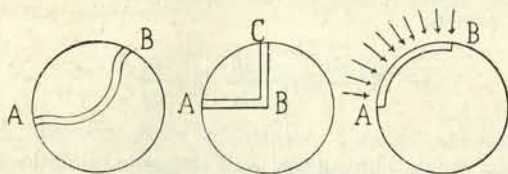



Fig. 205.

Clairault partì dalle considerazioni seguenti: essendo la Terra liquida in equilibrio, si può, senza disturbare il suo equilibrio, immaginare che una parte sia solidificata, talchè ne rimanga liquida solo un canale AB di forma qualunque, ove continuerà ad esistere l'equilibrio. Ma le leggi di equilibrio in un canale di questa specie sono più facili a studiarsi; e, se l'equilibrio esiste in tutti i *canali* immaginabili, esisterà in tutta la massa. Clairault osserva inoltre che si realizza l'ipotesi di Newton, facendo passare questi canali per il centro (fig. 205, 2) e quella di Huygens considerando solo i canali superficiali (fig. 205, 3).

Ma per Clairault il nodo della questione si trova in un'altra osservazione. Il liquido deve essere in equilibrio in tutti i canali immaginabili, e quindi anche in un canale chiuso. Ora se si fanno in un canale chiuso (fig. 206) due sezioni qualunque M ed N, le due colonne liquide MPN e MQN dovranno esercitare pressioni eguali sulle superficie di queste sezioni. La pressione, che una colonna liquida chiusa in un canale esercita ad una delle due estremità, non dipende perciò nè dalla *lunghezza,* nè dalla *forma,* ma solamente dalle *posizioni delle estremità.*

Si riferisca (fig. 207) un canale MN di forma qualunque, preso nel liquido considerato, ad un sistema di coordinate rettangolari. Siano P la densità del liquido, supposta *costante,* ed X, Y, Z le componenti della forza che agisce in un punto qualunque x, y, z, sopra l'unità di massa liquida, posta in questo

punto, essendo X, Y, Z funzioni di x, y, z. Inoltre siano ds l'elemento di lunghezza del canale, dx, dy, dz le sue proiezioni sopra gli assi coordinati, e q la sua sezione. Le componenti della forza che agisce sopra l'unità di massa nella direzione del canale sono perciò:

$$X . \frac{dx}{ds}, Y . \frac{dy}{ds}, Z . \frac{dz}{ds} .$$

La forza totale che agisce sull'elemento liquido $\varrho q . ds$, in questo punto del canale secondo la direzione ds è quindi:

$$\varrho q ds \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) .$$

Questa forza deve essere equilibrata dall' incremento qdp della forza di pressione per l'elemento di lunghezza ds; onde si ha l'equazione:

$$dp = p \,(X dx + Y dy + Z dz).$$

Ora basterà integrare questa espressione da M ad N per ottenere la differenza delle pressioni (p) fra le due estremità del

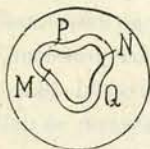
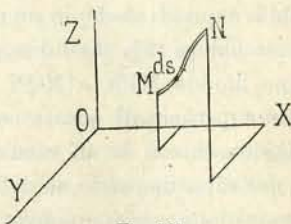



Fig. 206. *Fig. 207.*

canale. Ma questa differenza è indipendente dalla forma; essa dipende solo dalle estremità M ed N; quindi l'espressione:

$$\varrho \,(X dx + Y dy + Z dz) ,$$

e, ϱ essendo costante, l'espressione:

$$Xdx + Ydy + Zdz.$$

deve essere un differenziale esatto. Ciò richiede che si abbia:

$$X = \frac{dU}{dx}, \; Y = \frac{dU}{dy}, \; Z = \frac{dU}{dz},$$

ove U è funzione delle coordinate. *Quindi*, secondo Clairault, *l'equilibrio di un liquido è in generale possibile solo quando questo liquido sia sottoposto, in ciascun punto, a forze che si possono esprimere mediante derivate parziali di una stessa funzione delle coordinate del punto.*

9. Le forze di gravità di Newton posseggono questa proprietà, così che in generale tutte le *forze centrali*, cioè le forze che le masse esercitano le une sulle altre secondo le loro congiungenti e sono funzioni delle loro distanze reciproche. Un liquido sottoposto a forze di questa specie può dunque essere in equilibrio. Quando la funzione U è nota, si può sostituire alla equazione suesposta questa:

$$dp = \varrho \left(\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz, \right)$$

o

$$dp = \varrho \, . \, dU,$$

$$p = \varrho \, . \, U + \text{costante}.$$

L'insieme di tutti i punti, per cui U ha lo stesso valore (U = costante) è una superficie, che dicesi *superficie di livello.* Per queste superficie si ha: p = costante. La forma della funzione U determina perciò tutte le condizioni delle forze, e, come si è veduto, tutte quelle di pressioni. Quindi si vede che le condizioni delle pressioni forniscono un diagramma delle relazioni fra le forze, come si è osservato più indietro (vedi Cap. I, § V, n. 11).

Nelle considerazioni precedenti di Clairault si trova indubbiamente l'idea fondamentale della nozione di *funzione di forze*

o di *potenziale*, che più tardi Laplace, Poisson, Green, Gauss ed altri hanno svolto in un modo sì meravigliosamente fecondo. Dacchè l'attenzione è stata richiamata su questa proprietà di certe forze, di potere essere cioè espresse come derivate parziali di una stessa funzione U, si riconobbe subito che è assai vantaggioso ed *economico* di studiare questa funzione U stessa invece delle forze considerate da principio.

Esaminando l'equazione:

$$dp = \varrho\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \varrho d\mathrm{U}\,,$$

si vede che $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ è il *lavoro* elementare compiuto dalla forza applicata all'unità di massa fluida, durante lo spostamento ds, le cui componenti sono dx, dy, dz. Quindi se si trasporta l'unità di massa di un punto, per il quale $\mathrm{U} = \mathrm{C}_1$, ad un altro per cui $\mathrm{U} = \mathrm{C}_2$, o, in generale, dalla superficie $\mathrm{U} = \mathrm{C}_1$ alla superficie $\mathrm{U} = \mathrm{C}_2$, lo *stesso* lavoro sarà compiuto qualunque sia il cammino fatto. Inoltre la differenza delle pressioni fra un punto della prima superficie ed un punto della seconda è costante; infatti si ha:

$$p_2 - p_1 = \varrho\,(\mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1)\,,$$

ove le grandezze relative ad una stessa superficie sono designate collo stesso indice.

10. Si consideri una serie di superficie di livello vicinissime:

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}\,,\ \mathrm{U} = \mathrm{C} + d\mathrm{C}\,,\ \mathrm{U} = \mathrm{C} + 2\,.\,d\mathrm{C}\ \text{ecc.}$$

tali, che occorra lo stesso lavoro piccolissimo per trasportare una massa da una di queste superficie alla successiva.

Se una massa si muove sopra una superficie di livello, evidentemente essa non compie alcun lavoro. Quindi ogni componente tangenziale della forza è nulla e *la forza totale* che sollecita la massa è sempre *normale* all'elemento di superficie di livello. Sia dn l'elemento della normale, intercetto da due superficie consecutive, ed f la forza che richiedesi per far descrivere all'unità di massa il cammino dn, il lavoro fatto è $f\,.\,dn = d\mathrm{C}$.

Così abbiamo: $f = \frac{dC}{dn}$; e siccome si è supposto dC sempre costante, si vede che la forza è in ciascun punto inversamente proporzionale alla distanza normale delle superficie di livello successive. Onde se le superficie U sono note, le *direzioni delle forze* saranno date dagli elementi di una serie di curve normali in ciascun punto alle superficie di livello, e l'*intensità* delle forze è determinata dalla distanza di queste superficie. Queste superficie e queste curve s'incontrano in altri rami della fisica: nella teoria della elettricità statica e del magnetismo si chiamano superficie equipotenziali e linee di forze; nella teoria della conduzione del calore si dicono superficie isoterme e linee di flusso; nella teoria delle correnti dei liquidi ed elettriche hanno ricevuto il nome di superficie di livello e di linee di flusso.

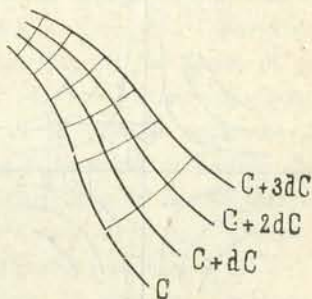



Fig. 208.

11. Ora illustreremo l'idea fondamentale della teoria di Clairault con un esempio assai semplice. Abbiansi due piani perpendicolari fra loro e perpendicolari al piano del disegno, da formare così un triedro trirettangolo; e siano Ox, Oy (fig. 210) le loro tracce su quest'ultimo. Supponiamo che esista una funzione delle forze:

$$U = -xy,$$

ove x ed y sono le distanze del punto considerato dai due piani. Allora le componenti della forza secondo OX, OY saranno:

$$X = \frac{dU}{dx} = -y, \quad Y = \frac{dU}{dy} = -x.$$

Le superficie di livello sono cilindri perpendicolari al piano del disegno, i quali hanno per base le iperboli equilatere $xy =$ costante.

Si ottengono le linee di forza facendo ruotare questo sistema di iperboli di 45° intorno ad O nello stesso piano. Quando l'unità di massa è trasportata dal punto r al punto O, secondo il cammino rpO o rqO, o secondo qualunque altro cammino, il lavoro fatto è sempre lo stesso ed eguale ad Op . Oq. Un liquido che riempie un canale chiuso OprqO sarà in equilibrio; due sezioni fatte in questo canale in direzioni qualunque soffrono entrambe eguali pressioni sulle loro due facce.

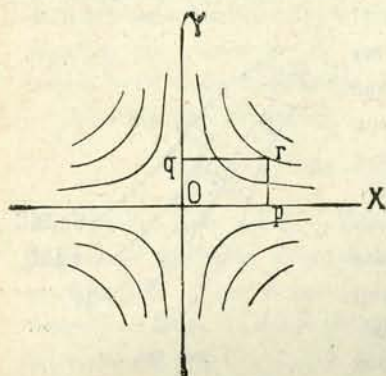



Fig. 209.

Ora modifichiamo alquanto le condizioni di questo esempio. Supponiamo che le forze siano:

$$X = -y \quad , \quad Y = a ,$$

ove a è costante. Ora è impossibile di trovare una funzione U tale che sia $\frac{dU}{dx} = X$ e $\frac{dU}{dy} = Y$, poichè allora si dovrebbe avere: $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$, la quale condizione evidentemente non può essere soddisfatta. Onde non avvi nessuna funzione di forze e quindi nessuna superficie di livello. Se si trasporta l'unità di massa da r in O secondo il cammino rpO, il lavoro compiuto sarà a . Oq; per il cammino rqO sarà: a . Oq + Op . Oq. Se il canale OprqO fosse pieno di un liquido, questo liquido *non potrebbe* essere in equilibrio, ma sarebbe animato da un *moto continuo* nella direzione OprqO. Correnti chiuse di questa specie che continuano indefinitamente, ci sembrano come del tutto al di fuori della nostra esperienza. Ma queste osservazioni richiamano la nostra attenzione sopra un'*importante proprietà* delle forze naturali, la quale consiste in ciò che il *lavoro fatto* da

queste forze si può esprimere mediante una funzione delle coordinate. Quando s' incontrano delle eccezioni a questa legge, allora si è proclivi a riguardarle come apparenti, e si cerca di trovare la spiegazione, che le farà rientrare nella regola.

12. Ora prenderemo in esame alcuni esempi di *moto dei liquidi*. Il fondatore dell' idrodinamica è Torricelli. Osservando l'efflusso di un liquido da un orifizio fatto in un fondo di un vaso, egli scoprì la legge seguente: (1) Se dividiamo in n parti eguali la durata dell'efflusso totale di un liquido contenuto in un vaso e se prendiamo come unità la quantità di liquido, che esce nella n^{esima} od ultima di queste parti, si trova che le quantità uscite rispettivamente nelle $(n-1)^{ma}$, $(n-2)^{ma}$, $(n-3)^{ma}$ ecc. frazioni del tempo stanno fra loro come i numeri 3, 5, 7... Questa osservazione mette chiaramente in evidenza l'analogia, che esiste fra il moto della caduta dei corpi e l'efflusso dei liquidi. Inoltre è facile di notare che se il liquido potesse, mediante la sua velocità acquistata diretta in direzione contraria, innalzarsi ad un livello superiore a quello che esso aveva nel vaso, si avrebbero le conseguenze più curiose. Torricelli osservò anche che esso può *al più* arrivare a questa altezza ed ammise che essa sarebbe *esattamente* conseguita, se fossero rimosse tutte le resistenze. Quindi, fatta astrazione delle resistenze, la velocità di efflusso di un liquido da un orifizio, praticato ad una distanza h sotto il suo livello nel vaso, è data dalla formula: $v = \sqrt{2gh}$. La velocità di efflusso è quindi quella, che acquisterebbe un grave cadendo *liberamente* dall' altezza h, poichè solo in causa di questa velocità, che il liquido può risalire esattamente fino al livello, che esso occupa nel vaso (2).

---

(1) Vedi: " *De motu gravium projectorum*, 1643 ".
n. d. t.

(2) Gli investigatori antichi esponevano i loro teoremi sotto una forma incompleta di proposizioni; per questa ragione essi si limitavano in generale a scrivere che v è proporzionale a $\sqrt{gh}$ o a $\sqrt{h}$.

La legge di Torricelli si accorda esattamente col rimanente delle nostre esperienze, ma tuttavia sentiamo il bisogno di fare un esame più preciso. Varignon ha voluto dedurre questa legge dalla relazione che esiste fra la forza e la *quantità di moto*, che essa genera. Indicando con a la superficie dell'orefizio, con h l'altezza della pressione, con s il peso specifico, con q l'accelerazione di un corpo, che cade liberamente, con v la velocità di uscita e con τ un elemento di tempo, l'equazione ben nota $pt = mv$ dà in questo caso:

$$ahs \,.\, \tau = \frac{av\tau s}{g} \cdot v\,;$$

da cui:

$$v^2 = gh\,.$$

In questa equazione $a \,.\, hs$ rappresenta la pressione, che agisce durante il tempo τ sulla massa liquida $\frac{av\tau s}{g}$. Tenendo conto del fatto che v è una velocità finale, si avrà più esattamente:

$$ahs \,.\, \tau = \frac{a \,.\, \frac{v}{2} \tau s}{g} \cdot v\,;$$

da cui la formula esatta:

$$v^2 = 2gh\,.$$

13. Daniele Bernoulli si è servito del teorema delle *forze vive* per istudiare il moto dei liquidi. Riprendiamo l'esempio precedente, partendo da questo punto di vista, ma dando al ragionamento una forma più moderna. L'eguaglianza che dobbiamo usare è:

$$s = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Abbiasi (fig. 210) un vaso di sezione q, in cui sia stato versato un liquido di peso specifico s ed arrivi all'altezza h. Si supponga

che il livello si abbassi di un'altezza piccolissima dh, nello stesso tempo che una massa liquida $\frac{q \cdot dh \cdot s}{g}$ esce con una velocità v. Il lavoro fatto è uguale a quello compiuto dal peso $q \cdot dh \cdot s$, che cade dall'altezza h: la forma del moto nel vaso qui non ha alcuna influenza. È lo stesso che lo strato $q \cdot dh$ cada direttamente sino all'orifizio del fondo o che esso passi in una posizione a, mentre il liquido di a venga in b, quello di b in c, e che quello di c se ne esca; il lavoro è sempre uguale a $q \cdot dh \cdot s \cdot h$. Eguagliando questo lavoro alla forza viva del liquido uscito si ha:

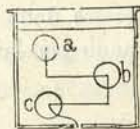



Fig. 210.

$$q \cdot ds \cdot s \cdot h = \frac{q \cdot dh \cdot s}{g} \cdot \frac{v^2}{2};$$

da cui:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

La sola ipotesi fatta in questa dimostrazione è che il *lavoro totale* fatto nel vaso riappare come forza viva del liquido uscito, o che le velocità nel vaso ed il lavoro speso negli attriti sono *trascurabili*. Per vasi abbastanza larghi questa ipotesi si avvicina molto al vero.

Ora si faccia astrazione della gravità del liquido e si supponga che esso che sia spinto da uno stantuffo mobile, che eserciti una pressione p su un'unità di superficie. Lo spostamento dello stantuffo per un'altezza dh fa uscire un volume $q \cdot dh$ di liquido. Indicando con ϱ la densità e con v la velocità, si ha

$$q \cdot p \cdot dh = q \cdot dh \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2};$$

d'onde:

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}}.$$

Liquidi diversi sotto la stessa pressione escono con velocità inversamente proporzionali alla radice quadrata delle loro densità. Ordinariamente si suppone che questa legge sia direttamente applicabile ai gaz, per cui essa è infatti esatta; ma la dimostrazione che se ne dà comunemente è sbagliata, come ora vedremo.

14. Consideriamo due vasi contigui (figura 211) di sezioni eguali, congiunti mediante un orifizio praticato nella parte inferiore della parete comune. Le stesse ipotesi come prima ci daranno per la velocità della corrente nell'orifizio:

$$q \,.\, dh \,.\, s \,.\, (h_1 - h_2) = q \,.\, \frac{dh \,.\, s}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$$

ossia

$$v = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}\,.$$

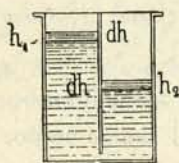



Fig. 221.

Facendo astrazione della gravità dei liquidi, e supponendo che le pressioni degli stantuffi siano p_1 e p_2 similmente si avrà:

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{p}}\,.$$

Per esempio se gli stantuffi impiegati fossero caricati dei pesi P e $\frac{P}{2}$, il peso P scenderebbe di h, mentre il peso $\frac{P}{2}$ si innalzerebbe della stessa lunghezza h. Così rimane un eccesso di lavoro $\frac{P}{2} \,.\, h$, che genera la forza viva del liquido che esce.

Un gas nelle stesse circostanze si comporterebbe differentemente. Quando un gas passa da un vaso, in cui esso è sotto la pressione di un peso P, in un altro, nel quale esso è sotto il peso $\frac{P}{2}$, il primo peso discenderà di un'altezza h; ma poichè i gas raddoppiano di volume, quando la pressione si riduce alla metà, il secondo peso si innalzerà dell'altezza $2h$; talchè il la-

voro totale compiuto sarà: $P \cdot h - \frac{P}{2} \cdot 2h = o$. Quindi nel caso dei gas deve essere compiuto un altro lavoro, che produce il flusso. Questo lavoro è fatto dal gas stesso coll'aumentare del suo volume e col superare una pressione mediante la sua *forza di espansione*. La forza espansiva p ed il volume w di un gaz sono legati dalla relazione ben nota:

$$p \cdot w = k,$$

ove k è una costante, finchè non varia la temperatura del gaz. Supponendo che il volume del gas sotto la pressione p aumenti di dw, il lavoro fatto è dato da:

$$\int p \cdot dw = k \cdot \int \frac{dw}{w}.$$

Se il volume aumenta da w_0 a w, o la pressione da p_0 a p, il lavoro è:

$$k \log\left(\frac{w}{w_0}\right) = k \log\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Se si suppone che questo lavoro serva a far muovere il volume w_0 di densità ϱ con la velocità v, si avrà:

$$v = \sqrt{\frac{2p_0 \log\left(\frac{p_0}{p}\right)}{\varrho}}.$$

Quindi la velocità di efflusso è inversamente proporzionale alla radice quadrata della densità, ma il suo valore numerico è differente da quello, che sarebbe fornito dalla formula precedente.

Però è necessario di fare osservare che questa dimostrazione è anche assai difettosa. Le variazioni istantanee di volume di un gas sono sempre accompagnate da cambiamenti di temperatura, e

quindi da variazioni di forza elastica. Onde i problemi riguardanti i moti dei gas in generale non si possono trattare come problemi puramente *meccanici;* essi si riferiscono sempre ad un tempo alla *termodinamica*.

15. Si è or ora veduto che un gas compresso possiede un lavoro immagazzinato; e perciò è naturale di ricercare se ciò si verifica anche nei liquidi compressi. Infatti ogni fluido che trovasi sotto una pressione qualunque è compresso, e, necessariamente a questa compressione, corrisponde il lavoro assorbito, che ricomparirà quando il liquido si espande. Ma per i liquidi questo lavoro è piccolissimo. S' immagini (fig. 212) un gaz ed un liquido dello stesso volume (rappresentato da OA) sottoposto alla stessa pressione di circa un'atmosfera (rappresentata dalla AB). Se la pressione si riduce alla metà, il volume del

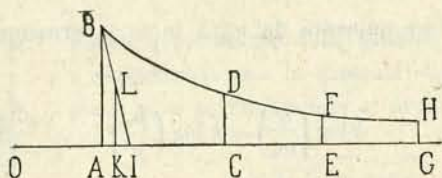



Fig. 212.

gas si raddoppia, ma quello del liquido aumenta solo di $\frac{25}{10^6}$ del suo valore primitivo. Il lavoro di espansione del gas è rappresentato dall'area ABDC, quello del liquido dall'area ABLK, ove $AK = \frac{25}{10^6} . OA$. Se la pressione si riduce a zero, il lavoro totale di espansione del liquido è rappresentato da ABI, con $AI = \frac{5}{10^5} . OA$; quello del gas dall'area compresa fra AB, la retta indefinita AICEG... ed il ramo infinito dell'iperbole BDFH.... Quindi si può *ordinariamente* trascurare il lavoro di espansione del liquido. Ma in alcuni fenomeni, ad esempio nelle vibrazioni sonore dei liquidi, si riscontrano lavori di questa specie e di quest'ordine, che hanno una parte principale; in questi casi si deve

inoltre tener conto delle variazioni di temperatura. Quindi si vede che è solo per il concorso fortunato di *circostanze*, che possiamo trattare, con una sufficiente approssimazione, un fenomeno come una questione di *meccanica pura*.

16. Ora discuteremo l'idea fondamentale che Daniele Bernoulli prese per punto di partenza della sua idrodinamica (1738) (1). Quando cade una massa liquida, l'*altezza della caduta* del suo centro di gravità (*descensus actualis*) è uguale all'*altezza di ascensione*, cui il baricentro delle molecole fluide, separate e rese indipendenti fra di loro, potrebbe risalire, se esse fossero animate verso l'alto di velocità eguali a quelle acquistate con la loro caduta (*ascensus potentialis*). Si vede subito che questa idea è identica a quella, che aveva già servito di punto di partenza a Huygens. Si immagini un vaso pieno di liquido; indichiamo con $f(x)$ la sua sezione alla distanza x del piano orizzontale dal fondo del vaso (fig. 213); se il liquido si muove, allora il suo livello si abbassa di dx; quindi il centro di gravità discende di $\frac{x \, . \, f(x) \, . \, dx}{M}$, ove è $M = \int f(x) \, . \, dx$. Indicando con k l'altezza di ascensione potenziale in una sezione di area eguale all'unità di superficie, nella sezione $f(x)$ essa sarà $\frac{k}{f(x)^2}$. Onde l'altezza di ascensione potenziale del baricentro è: $\frac{k \, . \int \frac{dx}{f(x)}}{M} = k \, . \, \frac{N}{M}$ con $N = \int \frac{dx}{f(x)}$.

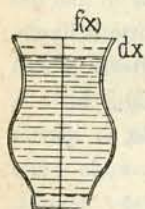



Fig. 213.

Quando il livello del liquido si abbassa di dx, N e k variano entrambe, quindi il principio dà l'equazione:

$$- x \, . \, f(x) \, . \, dx = N dk + k dN.$$

(1) *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii.* n. d. t.

Quest'equazione fu applicata da Bernoulli per risolvere diversi problemi. Si vede facilmente che il principio di Bernoulli può essere applicato con successo, sol quando siano note le *velocità relative* delle singole parti del liquido. Come già il lettore avrà veduto dalla formula precedente, Bernoulli suppose perciò che tutte le molecole liquide, le quali in un istante qualunque si trovano in uno stesso piano orizzontale, rimangano costantemente allo stesso livello, e le velocità nei diversi piani orizzontali siano fra loro in ragione inversa delle sezioni. Questa è l'ipotesi del "*parallelismo degli strati*„. In molti casi essa non corrisponde affatto alla realtà dei fatti; ed in altri casi essa vi si avvicina. Quando il vaso è larghissimo in confronto all'orifizio di efflusso, non è necessaria alcuna ipotesi riguardo al movimento del fluido entro il vaso, come l'abbiam visto rispetto all'esperimento di Torricelli.

17. Alcuni casi particolari del moto dei liquidi sono stati trattati da Newton e da Giovanni Bernoulli. Qui consideriamo un caso, a cui è direttamente applicabile una legge ben nota. Sia l la lunghezza dell'intiera colonna contenuta in un tubo cilindrico ripiegato ad U. Se si esercita una pressione in uno dei due rami, il liquido vi discende per una altezza x sotto il livello ordinario, mentre nell'altro ramo sale della stessa altezza, e così si ha una differenza di livello eguale a $2x$. Indicando con a la sezione del tubo e con s il peso specifico del liquido, lo spostamento x corrisponderà perciò ad una forza $2 . a . s . x$, la quale deve muovere una massa $\frac{a . l . s}{g}$, e perciò produrrà un'accelerazione $2 . d . s . x : \frac{a . l . s}{g} = \frac{2g}{l} . x$. Onde uno spostamento eguale all'unità di lunghezza dà luogo ad un'accelerazione $\frac{2g}{l}$; e si vede che si produrranno delle oscillazioni pendulari della durata:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Il liquido oscilla come un pendolo semplice di lunghezza eguale alla semi-lunghezza totale della colonna liquida.

Giovanni Bernoulli trattò un problema analogo, ma alquanto più generale. I due rami di un tubo cilindrico incurvato in un modo qualunque (fig. 215 *a*) fanno coll'orizzonte, nei punti in cui la superficie del liquido si muove, gli angoli α e β. Spostando una delle superficie della distanza x, l'altra superficie subisce lo stesso spostamento in direzione opposta. Così si ha una differenza di livello $x(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)$; con un procedimento analogo

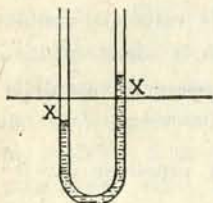
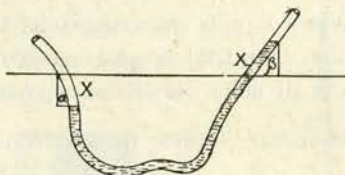



Fig. 214. *Fig. 215 a.*

al precedente, impiegando gli stessi simboli, si avrà:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)}}.$$

Per il pendolo liquido della figura 214 le leggi delle oscillazioni si mantengono *esattamente* vere, astrazion fatta dell'attrito, anche per grandi amplitudini; mentre pel pendolo ordinario esse son vere solo approssimativamente per piccole oscillazioni.

18. Il *centro di gravità* della massa liquida *totale* può salire solo all'altezza, d'onde dovrebbe cadere, affinchè le molecole liquide acquistino le velocità che hanno. In qualunque caso, in cui questo principio sembra presenti un'eccezione, si può dimostrare che essa è solo *apparente*. La fontana di Erone, come è ben noto, consiste di tre vasi sovrapposti A, B, C. L'acqua esce da A e va in C; l'aria spostata in C esercita una pressione in B e produce un getto di acqua, che ricade in A; ed è evidente

che il getto, che esce da B, innalza l'acqua considerevolmente al di sopra del suo livello in questo vaso; ma effettivamente essa passa semplicemente per il circuito della fontana e del vaso A, al livello di C molto più in basso.

Un'altra eccezione apparente del principio in questione ci è fornita dall'*ariete idraulica* di Montgolfier, ove il liquido sembra salire, mediante il lavoro del suo proprio peso, molto al di sopra del suo livello primitivo. Il liquido esce da un serbatoio (fig. 215 *b*) A, passando per un lungo tubo RR, munito di una valvola V, che si apre verso l'interno ed entra in un altro B. Come la corrente diviene molto rapida, la valvola si chiude; ed una massa liquida m, avente una velocità v, viene subito arrestata nel tubo RR; la qual massa deve essere privata della sua quantità di moto. Se ciò si compie in un tempo t, il liquido può esercitare durante questo tempo una pressione $q = \frac{mv}{t}$, che va ad aumentare la sua pressione idrostatica p; onde il liquido può, sollevando una valvola, durante questo intervallo di tempo, penetrare con la pressione $p + q$ in una fontana di Erone H, ed innalzarsi in un tubo SS ad un livello più alto di quello, che corrisponde alla semplice pressione p. Qui bisogna osservare che una parte considerevole di liquido cade sempre nel serbatoio B, prima che la velocità necessaria per chiudere la valvola sia stata prodotta dal lavoro del liquido nel tubo RR. Solo una piccola parte dell'acqua sale nel tubo SS sopra il livello primitivo; la parte maggiore cade da A in B. Se si raccoglie l'acqua che esce dal tubo SS, facilmente si può vedere che il baricentro di questo liquido e di quello ricevuto dal serbatoio B si trova, a causa di perdite diverse, *sotto* il livello di A.

Mediante le seguenti considerazioni possiamo facilmente renderci conto del principio dell'ariete idraulico, cioè della trasmissione del lavoro di una grande massa liquida ad una piccola massa, che in questo modo acquista una gran forza viva. Se chiudiamo il piccolo orifizio O di un imbuto, lo rovesciamo o lo immergiamo dalla parte della maggiore apertura rimasta libera,

assai profondamente in un gran vaso pieno di acqua, e se apriamo bruscamente l'orefizio O, allora lo spazio vuoto si riempie rapidamente, e questo fatto evidentemente fa abbassare leggermente il livello esterno dell'acqua. Il lavoro compiuto corrisponde alla caduta del contenuto dell' imbuto dal centro di gravità S dello strato superficiale sino al centro di gravità S′ del volume dell'imbuto. Per convenienti larghezze del vaso, le velocità dell'acqua vi sono debolissime e la forza viva acquistata è quasi del tutto accumulata nell' imbuto. Se tutte le parti del liquido, che contiene l' imbuto, avessero la stessa velocità, esse potrebbero tutte risalire al livello primitivo; e la loro massa totale potrebbe, rimanendo compatta, salire ad un'altezza tale, che il suo baricentro coincida con S. Ma nelle sezioni più strette dell' imbuto la velocità è maggiore che nelle sezioni più larghe. Quindi il liquido degli strati superiori possiede la parte assai più considerevole della forza viva; perciò esso si separa violentemente dal liquido inferiore, ed esce dal collo dell' imbuto, considerevolmente al di sopra del suo livello iniziale, mentre l'altra parte non raggiunge questo livello, e il centro di gravità dell'insieme non raggiunge ancora una volta il livello primitivo di S.

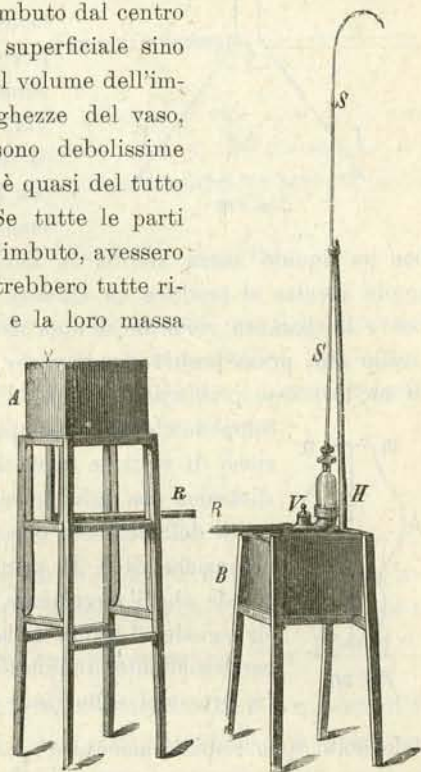



Fig. 215 b.

19. Una delle più importanti contribuzioni di Daniele Bernoulli apportate alla meccanica consiste nell'avere stabilito la distinzione fra le pressioni *idrostatica* ed *idrodinamica*. Il moto

cambia le pressioni dei liquidi; e la pressione di un liquido *in moto* può, secondo le circostanze, essere maggiore o minore della pressione del liquido in *riposo* per una stessa disposizione delle molecole. Con un esempio semplice comprenderemo questo fenomeno. Abbiasi un vaso (fig. 217) A, la cui forma è quella di una superficie di rivoluzione con l'asse verticale; il quale sia mantenuto costantemente pieno

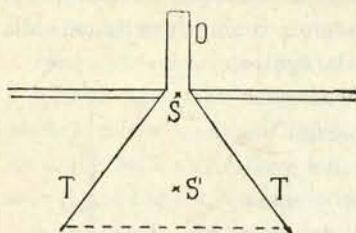
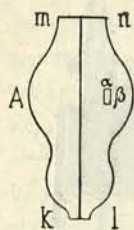



Fig. 216.

con un liquido senza attrito, in modo che il livello *mn* non cambi mentre si produce un efflusso dal fondo *kl*. Indichiamo con z la distanza verticale di una molecola liquida dal piano di livello *mn*, presa positivamente verso il basso. Seguiamo il moto di un elemento prismatico di liquido di base a e di altezza β. Supponendo gli strati paralleli, si può fare astrazione di tutte le velocità perpendicolari alle z. Indichiamo con ϱ la densità del liquido, con v la velocità dell'elemento e con p la sua pressione, che è funzione di z. Il principio delle forze vive richiede che l'incremento di forza viva dell'elemento sia eguale al lavoro della gravità nello spostamento corrispondente, diminuito del lavoro delle pressioni. Le pressioni sulle facce superiore ed inferiore dell'elemento sono rispettivameute $a \,.\, p$ e $a \,.\, (p + \frac{dp}{dz} \,.\, \beta)$. La pressione aumentando dall'alto in basso, l'elemento riceve quindi, verso l'alto, una pressione $a \,.\, \frac{dp}{dz} \,.\, \beta$, il cui lavoro è $a \,.\, \frac{dp}{dz} \,.\, \beta \,.dz$. Quindi si ha l'equazione:

Fig. 217.

$$(1) \qquad a \,.\, \beta \,.\, \varrho \,.\, d\left(\frac{v^2}{2}\right) = a \,.\, \beta \,.\, \varrho \,.\, g \,.\, dz - a \,.\frac{dp}{dz} \,.\, \beta\, dz,$$

ovvero:

$$\varrho \, . \, d \frac{v^2}{2} = \varrho \, . \, g \, . \, dz - \frac{dp}{dz} \, . \, dz \, ,$$

che integrandola dà:

$$(2) \qquad \varrho \, . \, \frac{v^2}{2} = \varrho \, . \, g \, z - p + \text{costante}.$$

Significando con v_1 e v_2 le velocità e con p_1 e p_2 le pressioni nelle due sezioni orizzontali a_1 ed a_2 alle distanze z_1 e z_2 del livello, si può mettere quest'ultima equazione sotto la forma:

$$(3) \qquad \frac{\varrho}{2} \, (v_1^2 - v_2^2) = \varrho \, . \, g \, . \, (z_1 - z_2) + (p_2 - p_1) \, .$$

Nella ipotesi che la sezione a_1 si confonda con il livello superiore del liquido, si ha: $z_1 = o$, $p_1 = o$; inoltre $a_1 v_1 = a_2 v_2$, poichè due sezioni qualunque sono attraversate nello stesso tempo dalla stessa quantità di liquido. Onde si ottiene:

$$p_2 = \varrho g z_2 + \frac{\varrho}{2} \, . \, v_1^2 \, . \, \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2} \, .$$

Quindi la pressione p_2 del liquido *in moto* (pressione idrodinamica) è la somma della pressione $\varrho \, . \, g_1 \, z_2$ del liquido *in riposo* (pressione idrostatica) e di una pressione $\frac{\varrho}{2} \, . \, v_1^2 \, . \, \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1^2}$, che dipende dalla densità, dalla velocità e dalla grandezza della sezione. Nelle sezioni, che sono *maggiori* della superficie libera del liquido, la pressione idrodinamica è *maggiore* della pressione idrostatica ed *inversamente*.

Per chiarire viemmeglio il principio di Bernoulli, immaginiamo che il liquido del vaso A sia senza peso e l'efflusso sia prodotto da una pressione costante p, esercitata sulla superficie libera. Allora l'equazione (3) assume la forma:

$$p_2 = p_1 + \frac{\varrho}{2} \, (v_1^2 - v_2^2) \, .$$

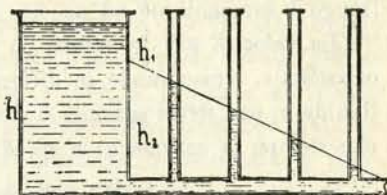
Se noi seguiamo il moto di una molecola liquida nel vaso dalla superficie libera, si vede allora che ad ogni incremento di velocità (nelle sezioni più strette) corrisponde una diminuzione di pressione; e ad ogni diminuzione di velocità (nelle sezioni più larghe) tien dietro un aumento di pressione. Ciò infatti è facile vedere senza ricorrere a considerazioni matematiche. Nel problema ora considerato ogni *cambiamento* di velocità di una molecola qualunque deve essere prodotto esclusivamente dal lavoro delle *forze di pressione* del liquido. Quando perciò un elemento passa per una sezione più stretta, in cui avvi una velocità maggiore, esso può acquistare questa velocità solo alla condizione che sulla sua faccia posteriore agisca una pressione maggiore di quella che agisce sulla faccia anteriore, cioè solo quando si muove nel senso delle pressioni più forti verso le pressioni più deboli, o, in altre parole quando la pressione diminuisce nel senso del moto. Immaginiamo per un istante che la pressione sia la stessa in una sezione larga e nella sezione più stretta seguente; non si produce l'accelerazione dell'elemento nelle parti più strette; gli elementi non escono abbastanza veloci; essi si accumulano, si serrano *all'entrata* della sezione stretta, e producono subito l'incremento della pressione corrispondente. Il caso inverso è evidente.

20. Trattando casi più complicati, i problemi del moto dei liquidi presentano grandi difficoltà, anche quando si fa astrazione dell'*attrito,* e le difficoltà aumentano ancora, se non si può continuare a trascurarlo. Infatti, quantunque queste ricerche siano state incominciate da Newton in poi, tuttavia fin qui si è risolto in questo campo solo un numero piccolissimo di questioni elementari. Ci accontenteremo di qualche esempio semplicissimo. Abbiasi un liquido (fig. 218) che s'innalzi in un vaso sino ad un'altezza h, ed esca non più per un orifizio fatto nella parete, ma per un lungo tubo cilindrico, fissato da una parte; la velocità v di efflusso è minore di quella data dalla formula di Torricelli, poichè una parte del lavoro è consumato dall'attrito; si ha:

$$v = \sqrt{2gh_1}\quad,\ \text{ove è } h_1 < 1.$$

Indicando con h_1 l'*altezza di velocità* e con h_2 *altezza di resistenza*, si può porre $h = h_1 + h_2$. Se mettiamo in comunicazione il cilindro orizzontale di efflusso con tubi verticali laterali, il liquido sale in questi ad un'altezza tale, che fa equilibrio e dà la misura della pressione esistente alla base del canale principale. È notevole osservare

Fig. 218.

che all'origine del canale questa altezza liquida è h_2 e diminuisce nella direzione della corrente fino a zero secondo una legge rappresentata da una retta. Ora trattasi di spiegare questo fenomeno.

La gravità non agisce più *direttamente* sul liquido del canale orizzontale, ma i suoi effetti gli sono trasmessi dalla *pressione* del liquido circostante. Se immaginiamo un elemento liquido prismatico di base a e di lunghezza β, che venga spostato nella direzione della sua lunghezza alla distanza dz, il lavoro fatto, come si è veduto più sopra, è dato dalla:

$$- a \,.\, \frac{dp}{dz} \,.\, \beta \,.\, dz = - a \,.\, \beta \,.\, \frac{dp}{dz} \,.\, dz \,.$$

Quindi per uno spostamento finito abbiamo:

$$(1) \qquad - a\beta \,.\, \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{dz}\, dz = - a\beta\,(p_2 - p_1)\,.$$

Questo lavoro è *fatto*, quando l'elemento del volume si sposta da un punto di pressione *superiore* ad un punto di pressione *inferiore*. La quantità del lavoro eseguito dipende solo dalla grandezza del volume e dalla *differenza* delle pressioni all'inizio ed al termine dello spostamento; essa è indipendente dalla lunghezza e dalla forma del cammino percorso. Se in un caso le pressioni diminuiscono due volte più rapidamente che in un altro, la differenza delle pressioni sulla faccia anteriore e poste-

riore degli elementi, ossia la forza che fa il lavoro, è raddoppiata; ma il *cammino* è ridotto a metà; quindi il lavoro rimane uguale (lungo i segmenti *ab* ed *ac*, fig. 219).

La velocità v è la stessa in tutte le sezioni q del canale orizzontale. Trascurando le differenze di velocità delle molecole liquide in una *stessa* sezione, si consideri un elemento del liquido, che riempe la sezione q; e sia β la sua lunghezza. La sua forza viva è $q \, . \, \beta \, . \, \varrho \, . \, \frac{v^2}{2}$; essa rimane costante nell'intiero cammino del tubo. Ciò è solo possibile, quando la *forza viva consumata dall'attrito* sia sostituita dal *lavoro delle forze di pressione* del liquido. Onde la pressione deve diminuire nella direzione del moto e deve diminuire di quantità eguali per cammini, che corrispondono ad uno stesso lavoro di attrito. Per un elemento liquido $q \, . \, \beta \, . \, \varrho$, che entra nel tubo, il lavoro totale della gravità è $q \, . \, \beta \, . \, \varrho \, . \, g \, . \, h$. Una parte di questo lavoro, che genera la forza viva dell'elemento, che entra nel tubo con la velocità v, è $q \cdot \beta \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2} = q \cdot \beta \cdot \varrho \cdot g \cdot h_1$, poichè $v = \sqrt{2gh}$. Il rimanente di questo lavoro, cioè $q\beta\varrho g h_2$, è perciò consumato *nel tubo*, se si fa astrazione dalle resistenze nel vaso a causa della lentezza del moto.

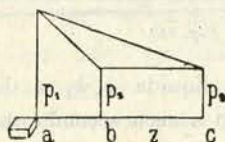



Fig. 219.

Se h_1, h_2 ed o sono le altezze di pressione nel vaso all'inizio del tubo ed alla sua estremità, le pressioni corrispondenti sono $p_1 = h_1 g \varrho$, $p_2 = h_2 g \varrho$ e o; allora l'equazione (1) della pressione dà il lavoro richiesto per generare la forza viva dell'elemento *all'entrata sua* nel canale e cioè:

$$q \cdot \beta \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2} = q \cdot \beta \cdot (p_1 - p_2) = q \cdot \beta \cdot g \cdot \varrho \cdot (h_1 - h_2) = q \cdot \beta \cdot g \cdot \varrho \cdot h_1 ;$$

ed il lavoro trasmesso dalla pressione del liquido all'elemento che attraversa la lunghezza del canale è:

$$q \cdot \beta \cdot p_2 = q \cdot \beta \cdot \varrho \cdot g \cdot h_2 ,$$

ossia esattamente il lavoro consumato nel tubo.

Si supponga per un momento che dall'inizio al termine del tubo le pressioni non decrescano da p_2 a zero secondo una legge espressa da una retta; ma che la loro distribuzione della pressione sia differente, e per fissare meglio le idee che sia costante lungo il canale. Allora le molecole liquide, poste davanti perderanno la loro velocità mediante l'attrito, si produrrà all'origine del canale l'incremento della pressione necessaria per stabilire una velocità costante in ciascun punto. Alla estremità la pressione può essere solo uguale a zero, poichè in questo punto il liquido non è impedito da nulla di uscire subito ad ogni pressione, che si esercitava su esso.

Se immaginiamo il liquido come una massa di sfere elastiche levigate, quelle di queste sfere, che subiscono la più forte pressione, son quelle del fondo del vaso; esse entrano nel tubo in uno stato di compressione, che esse perdono insensibilmente durante il loro moto. Lasciamo al lettore la cura di sviluppare più compiutamente questo concetto.

È evidente, da un'osservazione fatta più innanzi che il lavoro assorbito dalla compressione del liquido è piccolissimo. Il moto del liquido è prodotto dal lavoro della gravità nel vaso, lavoro trasmesso mediante la pressione del liquido compresso, alle molecole che si trovano nel tubo.

Una modificazione interessante a questa esperienza consiste nel formare il canale orizzontale mediante l'unione di parecchi tubi cilindrici di sezioni differenti (fig. 220). Nei tubi *più stretti* la maggior parte del lavoro è assorbito dall'attrito, e la diminuzione della pressione nella direzione del moto vi è quindi più rapida che nei tubi più larghi. Osserviamo ancora che a ciascun passaggio del liquido in una parte più larga del canale, quindi a ciascuna *diminuzione* di velocità, si produce un *incremento* di pressione (un rigurgito positivo) ed a ciascun pas-

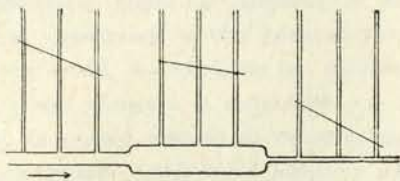



Fig. 220.

saggio del liquido in una parte più stretta, perciò a ciascun *incremento* di velocità, si ha un istantaneo *abbassamento* di pressione (un rigurgito negativo). Infatti la velocità di un elemento liquido, su cui nessuna forza non agisce direttamente può aumentare o diminuire solo quando esso passa in punti di pressione inferiore o superiore.

CAPITOLO QUARTO

Svolgimento formale della meccanica

I. *I problemi isoperimetrici.*

1. Quando mediante l'osservazione siano stati saldamente stabiliti tutti i fatti più importanti di una delle scienze della natura, allora incomincia per essa un nuovo periodo, cioè il periodo *deduttivo,* che tratteremo nel presente capitolo. In esso ci formiamo una immagine mentale dei fatti senza ricorrere continuamente all'osservazione. Ricostruiamo nel nostro pensiero casi più generali e più complicati, immaginando che essi sono composti di elementi più semplici e ben noti fornitici dalla esperienza. Ma il processo dello sviluppo della scienza non è ancora compiuto, fintantochè dall'espressione dei fatti elementari (cioè dei principii) si siano dedotte le espressioni di casi complicati assai comuni (soltanto teoremi), rinvenendo in essi stessi elementi. Allo sviluppo deduttivo della scienza allora segue il suo svolgimento *formale.* Si tratta allora di disporre in un ordine sinottico i fatti che si presentano e che bisogna ricostruire nel nostro pensiero in modo da formarne un *sistema*; talchè ciascuno di essi si possa ritrovare e ristabilire con il *minimo sforzo intellettuale.* In questo metodo di ricostruzione cerchiamo di apportare la più grande *uniformità* possibile per potere assimilarcelo facilmente. Bisogna d'altra parte osservare che i tre periodi: di osservazione, di deduzione e di sviluppo formale non sono nettamente separati; spesso al contrario questi differenti processi camminano di pari passo, quantunque nel complesso non si possa disconoscere la loro successione.

2. Gl' investigatori del XII⁰ secolo e quelli dell' inizio del XVIII⁰ hanno assiduamente studiato una classe particolare di problemi *matematici*, che hanno esercitato una grande influenza sullo sviluppo formale della meccanica. Questi problemi, cui si dà il nome generico di *problemi isoperimetrici*, formeranno ora oggetto delle nostre ricerche. Alcune questioni del massimo e del minimo di certe grandezze, problemi di massimo e di minimo, avevano già preoccupato i matematici dell'antica Grecia. Si dice che già Pitagora insegnasse che il cerchio è la figura di maggior superficie fra tutte le figure piane di dato perimetro. L' idea che esistesse una certa economia nei fenomeni naturali non era estranea agli antichi. Erone trasse le leggi della riflessione della luce dalla ipotesi che essa partendo da un punto A (figura 221) e riflettendosi in M, giunga in B, seguendo il cammino più breve. Infatti supponiamo che il piano della figura sia il piano di riflessione; siano SS la sezione del piano riflettore, A il punto di partenza della luce, M il punto d'incidenza, B il punto di arrivo. Si scorge subito che la linea AMB′ è una retta, essendo il punto V′ il simmetrico di V. Il cammino AMV′ è più breve di ogni altro cammino ANB′, e quindi AMB è minore di ANB. Pappo applicò gli stessi concetti alla natura organica; ad esempio spiegò la forma dei favi delle api colla tendenza alla massima economia possibile nell'uso dei materiali. All' epoca del rinascimento della scienza queste idee non caddero su di un terreno sterile. Esse furono primieramente adottate da Fermat e Roberval, che scoprirono i metodi per la risoluzione di questo genere di problemi. Essi osservarono —, ciò che era stato già fatto prima da Keplero, — che una grandezza y, che dipende da una grandezza x, generalmente si comporta in un modo particolare nell' intorno del massimo e del minimo suo valore. Sia x l'ascissa ed y l'ordi-

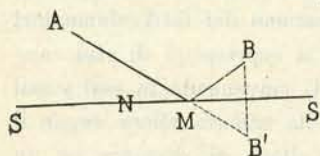



Fig. 221.

nata (fig. 222); se mentre x cresce, y passa per un valore massimo, si vede che il suo incremento, o ascesa, si cambia in decrescenza, o discesa; ed inversamente se y passa per un valore minimo, la sua ascesa si cambia in discesa. I valori vicini al valore massimo o minimo saranno perciò assai prossimi fra loro, e la tangente alla curva nel punto corrispondente sarà parallela all'asse delle ascisse. Per trovare i valori massimi, bisognerà perciò cercare le tangenti parallele all' asse delle x.

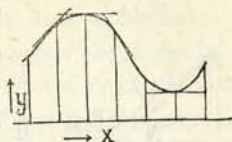



Fig. 222.

Il calcolo traduce subito questo *metodo delle tangenti.* Ad esempio poniamo di dividere una lunghezza data a in due parti x ed $a - x$ in modo, che il rettangolo $x.\ (a - x)$ sia il maggiore possibile. La quantità y, funzione di x, qui è il prodotto $x.\ (a - x)$. Per il valore massimo di y una variazione infinitamente piccola ξ di x non darà luogo ad alcuna variazione di y. Onde troveremo il valore corrispondente di x ponendo:

$$x(a - x) = (x + \xi)(a - x - \xi),$$

$$ax - x^2 = ax + a\xi - x^2 - x\xi - x\xi - \xi^2,$$

$$o = a - 2x - \xi;$$

ora, ξ potendo essere anche piccola quanto si vuole, si ha:

$$o = a - 2x \quad , \quad x = \frac{a}{2}.$$

In questo modo si può tradurre in linguaggio algebrico l'idea concreta dal metodo delle tangenti; così vediamo che vi è contenuto il germe *del calcolo differenziale.*

Fermat cercò di mettere le leggi della rifrazione della luce sotto una forma analoga a quella che Erone aveva dato alle leggi della riflessione. Egli ammette che la luce, che parte da A

e si riflette in M (fig. 223), giunge in B, non percorrendo il cammino più breve. Se il cammino AMB è percorso nel tempo più breve, allora un cammino infinitamente prossimo ANB a quello reale sarà percorso nello *stesso* tempo. Se conduciamo da N su AM e da M su NB le perpendicolari NP e MQ, si vede che il cammino percorso prima della rifrazione è diminuito della lunghezza MP=MN. sen α, e che il cammino percorso di poi è invece aumentato di NQ=MN. sen β. Indicando con v e v_2 le velocità nel primo e nel secondo mezzo si trova che la durata del percorso AMB sarà minima, quando si avrà:

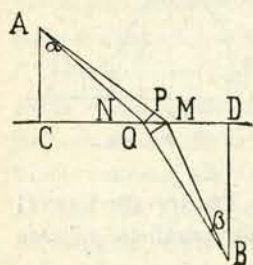



Fig. 223.

$$\frac{MN \cdot \text{sen}\,\alpha}{v_1} - \frac{MN \cdot \text{sen}\,\beta}{v_2} = o\,,$$

ossia:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = n\,,$$

ove n è l'indice di rifrazione. Le leggi di riflessione di Erone ora si presentano, come osserva Leibniz, qual caso particolare di quelle della rifrazione. Per velocità eguali $v_1 = v_2$ le due condizioni del minimo della *durata* e del minimo della *spazio* percorso sono identiche.

Huygens nelle sue ricerche sull'ottica applicò ed ulteriormente perfezionò le idee di Fermat, considerando il moto della luce non solo in linea retta, ma anche secondo una curva, nei mezzi in cui la velocità di propagazione varia da un punto ad un altro in modo continuo. Egli riconobbe che la legge di Fermat si verificava in questi casi più generali. Così dunque nella moltiplicità dei fenomeni di propagazione della luce, la proprietà caratteristica fondamentale pare essere una tendenza verso un *minimo* impiego di *tempo*.

3. Proprietà analoghe di massimo o di minimo si manifestano nei fenomeni meccanici. Come l' abbiamo già fatto osservare, Giovanni Bernoulli conosceva che una catena liberamente sospesa nelle sue estremità prende una forma tale che il suo baricentro si abbassa il *più possibile*. Questa idea si presenta naturalmente come una delle più semplici all' investigatore che pel primo riconosca la portata *generale* del principio degli spostamenti virtuali. Queste osservazioni richiamarono l'attenzione sulle proprietà del massimo e del minimo e gl' investigatori ora incominciarono generalmente a farne uno studio più approfondito. Il problema della *brachistocrona,* posto da Giovanni Bernoulli, dà il più forte impulso a questa tendenza scientifica; esso è il seguente: " Si richiede di determinare la curva che deve seguire un grave per passare dal punto A al punto B, posti in un piano verticale, impiegando *il minor tempo possibile* „. Giovanni Bernoulli risolvè il problema in modo assai ingegnoso; Leibniz, L'Hôpital, Newton e Giacomo Bernoulli pur essi ne diedero delle soluzioni.

La soluzione più notevole è quella di Giovanni Bernoulli stesso. Egli osservò che problemi di questa specie erano già stati risoluti, invero non per il moto dei gravi, ma bensì per il moto della luce. Quindi *sostituì,* assai a proposito, il *moto di propagazione della luce* a *quello della caduta dei* gravi (Cf. Cap. III. § VIII°. n. 8 e seg.), e fece l'ipotesi che i due punti A e B si trovassero in un mezzo tale, che la velocità della luce segua la stessa legge che governa un corpo che cade; e ciò richiede che questo mezzo sia composto di strati orizzontali di densità decrescenti verso il basso in modo tale, che $v = \sqrt{2gh}$ rappresenta la velocità della luce in uno strato posto ad una distanza h al di sotto di A. Il raggio di luce che in queste condizioni va da A in B descrive questo cammino nel minor tempo possibile, e quindi dà la curva della *durata minima di discesa.*

Siano a, a', a''... gli angoli formati con la verticale, perpendicolare alla direzione degli strati, dagli elementi della curva,

posti a diversi livelli, e $v, v', v''\dots$ le velocità corrispondenti. Si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{v} = \frac{\operatorname{sen} a'}{v'} = \frac{\operatorname{sen} a''}{v''} = \dots\dots = k = \text{costante};$$

o, indicando con x la distanza verticale di un elemento di curva al livello A e con y la sua distanza orizzontale dalla verticale del punto A, queste eguaglianze si possono scrivere così:

$$\frac{\frac{dy}{ds}}{v} = k;$$

da cui:

$$dy^2 = k^2v^2ds^2 = k^2v^2(dx^2 + dy^2),$$

o $v = \sqrt{2gx}$; e quindi

$$dy = dx \,.\, \sqrt{\frac{x}{a - x}} \quad \text{con} \quad a = \frac{1}{2gk^2}.$$

Questa equazione è l'equazione differenziale di una cicloide descritta da un punto della circonferenza di un cerchio di raggio $r = \frac{a}{2} = \frac{1}{4gk^2}$, ruotando senza sdrucciolare sopra una retta.

Per trovare la cicloide che passa per A e B (fig. 224) osser-

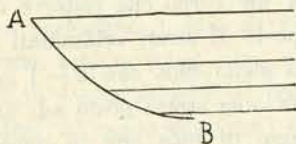
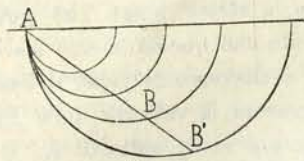



Fig. 223 a. *Fig. 224.*

viamo che tutte le cicloidi, che hanno generazioni consimili, sono curve *simili*. Tutte le cicloidi che partono dal punto A e sono generate da un rotolamento sulla retta AD, ammetteranno il

punto A per *centro di similitudine.* Quindi basta costruire una qualunque di esse e condurre per A la retta AB, che la incontra in B'. Indicando con r' il raggio del cerchio generatore di questa cicloide ausiliare ed r il raggio richiesto, si avrà: $r = r' \cdot \frac{AB}{AB'}$.

Questa soluzione di Giovanni Bernoulli eseguita intieramente senza alcun metodo e subito mediante la mera *immaginazione* geometrica e l'avere saputo sagacemente utilizzare le cognizioni acquistate per caso precedentemente costituisce in vero un fatto notevole e degno di ammirazione. Dobbiamo riconoscere che Giovanni Bernoulli fu un genio artistico veramente grande nel campo delle scienze fisiche. Il carattere scientifico di suo fratello Giacomo era intieramente diverso: egli possedeva assai più spirito critico, ma assai meno immaginazione creatrice. Egli

Vignetta dal titolo: *Leibnitzii et Johann Bernoullii commercium epistolicum* Lausannae et Genevae, Bousquet, 1745.

diede pure una soluzione dello stesso problema, ma in forma meno felice; però non lasciò di sviluppare ad un tempo con maggior profondità un metodo generale di risoluzione delle questioni di questo genere. Così in questi due fratelli troviamo le due caratteristiche fondamentali del genio scientifico, separate

fra loro, le quali nei più grandi investigatori, in Newton ad esempio, si trovano riunite mirabilmente. Si vede subito che queste due tendenze, quando si incontrano in persone differenti, possono urtarsi e venire a conflitto aperto, mentre in altre circostanze, quando si trovano riunite in una stessa mente, il loro contrasto può essere inavvertito.

4. Giacomo Bernoulli constatò che fino allora l'oggetto principale della ricerca aveva consistito nel trovare per quali *valori* di una quantità variabile un'altra quantità variabile, che dipende dalla prima (funzione di questa) passava per un valore massimo o minimo. Ma ora si tratterebbe di trovare qual'era, fra un'*infinità di curve,* quella che possiede una proprietà determinata di massimo o di minimo. Giacomo Bernoulli osservò con ragione che questo problema è di un carattere intieramente differente, e richiede perciò un nuovo metodo.

Nella risoluzione di questo problema Giacomo Bernoulli parte dai principii fondamentali seguenti (Acta eruditarum, Maggio 1697) (1):

1) Quando una curva possiede una certa proprietà di massimo o di minimo, anche ciascuno dei suoi elementi, per quanto piccolo esso sia, la possiede.

2) Allo stesso modo come i valori vicini al valore massimo o minimo di una grandezza *sono eguali* fra loro per cambiamenti infinitamente piccoli della variabile indipendente, così anche quella grandezza, che per la curva cercata deve essere massima o minima, ha lo *stesso* valore per le curve infinitamente vicine.

3) Inoltre nel caso particolare della brichistocrona si deve ammettere che la velocità conseguita alla fine dell' altezza di una caduta h è uguale a $\sqrt{2gh}$.

Si consideri un arco piccolissimo ABC (fig. 225) della curva cercata; si conduca la orizzontale dal punto B, e si supponga che l'elemento di curva si trasformi in ADC. Mediante consi-

---

(1) Vedi anche sue opere Vol II°. p. 768.

derazioni del tutto analoghe impiegate nella discussione della legge di Fermat si ottiene la relazione già nota fra la velocità di caduta ed il seno dell' angolo di inclinazione dell' elemento colla verticale. Quindi in questo ragionamento si deve supporre per il principio 1) che l'elemento ABC è anche brachistocrono, e pel principio 2) che l'elemento ADC è percorso nello stesso tempo, in cui è percorso ABC. I calcoli di Giacomo Bernoulli sono assai lunghi; ma i suoi tratti caratteristici si scorgono immediatamente; essendo fissati i principii suepposti, il problema è risolto.

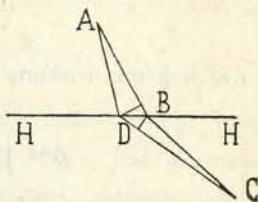



Fig. 225.

Secondo l' uso dei matematici di quell' epoca Giacomo Bernoulli, dopo aver dato la soluzione del problema della brochistocrona, propose il *problema* più generale *dell' isoperimetro* sotto la forma seguente: " Fra tutte le curve isoperimetre (cioè dello stesso perimetro o della stessa lunghezza), che si possono condurre fra due punti fissi, trovare quella che rende massima o minima l'area compresa fra l' asse delle ascisse, le ordinate dei punti estremi ed un' altra curva, la cui ordinata sia una certa funzione determinata dell' ordinata o dell' arco della curva cercata corrispondente alla stessa ascissa ".

Per esempio supponiamo di determinare fra i punti (fig. 226) B ed N la curva BFN, la quale fra tutte le curve della stessa lunghezza data, che va da B ad N, rende massima l'area BZN, le cui ordinate sono $PZ = \overline{PF}^n$ $LM = \overline{LK}^n$ ecc. Poniamo che la relazione fra le ordinate corrispondenti di BZN e di BFN sia data dalla curva BH, talchè per ottenere PZ da PF basta abbassare FGH perpendicolarmente su BG (che essa stessa è perpendicolare a BN) e poi prendere $PZ = HG$, e così per le altre ordinate. Inoltre facciamo $BP = y$, $PF = x$ e $PZ = x.^n$

Giovanni Bernoulli diede subito una soluzione di questo

problema sotto la forma:

$$y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}},$$

ove a è una costante arbitraria. Per $n = 1$ si ha:

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a - \sqrt{a^2 - x^2}\,;$$

cioè BFN è un semi-cerchio descritto su BN come diametro. La superficie BZN è allora identica a BFN. Questa soluzione non è esatta per il caso generale, ma è valida nel caso particolare.

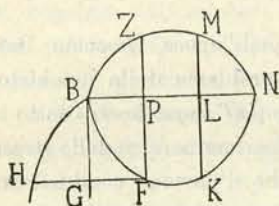



Fig. 226.

Giacomo Bernoulli apertamente si impegnò di fare quanto segue:

1.° di scoprire il metodo di suo fratello;

2.° di indicare i suoi errori e contraddizioni;

3.° infine di dare la soluzione esatta.

La gelosia e l'animosità reciproca dei due fratelli ben presto si resero palesi e degenerarono in una disputa violenta ed acrimoniosa, assai poco lodevole, che durò fino alla morte di Giacomo (avvenuta a Basilea nel 1705), dopo la quale convintosi del suo errore, adottò il metodo rigoroso di suo fratello. Giacomo Bernoulli sospettò — e con ogni probabilità fondatamente — che Giovanni, sedotto dai risultati delle sue ricerche intorno alla catenaria ed alla curva delle vele sotto l'azione del vento, avesse nuovamente tentato una soluzione *indiretta*, immaginando la curva BFN piena di un liquido di peso specifico variabile, e determinando questa curva colla condizione che il centro di gravità sia nella posizione più bassa possibile. Indicando con p l'ordinata PZ, il peso specifico del *liquido* nell'ordinata $\mathrm{PF} = x$

deve essere $\frac{p}{x}$, e similmente in ogni altra ordinata. Il peso di un filo liquido verticale è allora $\frac{pdy}{x}$, ed il suo momento rispetto a BN è:

$$\frac{1}{2} . x . \frac{p . dy}{x} = \frac{1}{2} . p . dy .$$

Quindi affinchè il baricentro sia nella posizione più bassa possibile occorre che la somma $\frac{1}{2}\int pdy$ o $BZN = \int pdy$ sia massisima. Ma Giacomo Bernoulli ragionevolmente osservò che in questa soluzione non si tiene conto del fatto, cioè che ogni variazione della *curva* (fig. 227) BFN dà luogo ad un cambiamento del *peso* del liquido; e perciò sotto questa forma semplice non è più valida.

Giacomo Bernoulli stesso diede una soluzione di questo problema. Egli suppose ancora che il piccolo elemento di curva FF‴ possiede la stessa proprietà dell'intiera curva; e considerando quattro punti consecutivi F, F′, F″, F‴, i cui due estremi F e F‴ son fissi, fa variare F′ ed F″ in modo, che la lunghezza dell'arco F F′ F″ F‴ rimanga *la stessa;* ciò è solo possibile evidentemente per lo spostamento di *due* punti. Noi non terremo dietro ai suoi calcoli complicati e difficili. Il principio del procedimento della soluzione è chiaramente indicato da ciò che si è detto. Conservando le notazioni impiegate più sopra, si possono esprimere in sostanza i suoi risultati, asserendo che quando è

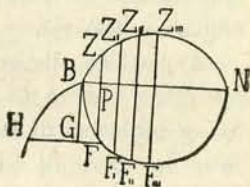



Fig. 227.

$dy = \frac{pdx}{\sqrt{a^2 - p^2}}$, $\int pdy$ è un massimo; e quando è:

$$dy = \frac{(a - p)\, d\, x}{\sqrt{2ap - p^2}} ,$$

$\int pdy$ è minimo.

I dissensi fra i due fratelli furono, possiamo senz'altro asserirlo, grandemente da deplorarsi. Ma bisogna anche dire che il genio dell'uno e la profondità dell'altro arrecarono i migliori frutti, mediante l'impulso che diedero le loro soluzioni alle idee di Eulero e di Lagrange.

5. Eulero *(Problematis isoperimetrici solutio generalis;* Com. Acad. Petr. T. VI, 1738) dà pel primo un metodo generale per risolvere queste questioni di massimo e di minimo, in altre parole per risolvere i problemi degli isoperimetri fondandosi tuttavia ancora sopra lunghissime considerazioni geometriche; ma i suoi risultati non possedevano la generalità analitica. Eulero ebbe una concezione chiarissima dell'insieme dei problemi di questa categoria; e scorse nettamente le loro differenze, che classificò così:

1). Si domanda di determinare fra *tutte* le curve quella per cui una proprietà A è massima o minima.

2). Si domanda di determinare fra tutte le curve, che hanno *in comune* una proprietà A, quella per cui B è massima o minima.

3). Si richiede di determinare fra le curve, che hanno *in comune* due proprietà A e B quella per cui C è massima o minima e così via.

Appartiene alla prima classe il problema di trovare la curva *più breve,* che va da un punto M ad un punto N (fig. 228). Si ha un problema della seconda classe, se si domanda qual'è fra tutte le curve di lunghezza *data* A, che vanno da M ad N, quella che rende massima *l'area* MPN. Finalmente si ha un esempio di problemi della terza classe, se si domanda qual è fra tutte le curve, che vanno da M ad N, delle quali son date la lunghezza A e l'area MPN = B, quella che, ruotando intorno all'asse MN, genera la superficie di rivoluzione di area minima e così via. Si può qui osservare che la ricerca di un massimo o di un minimo assoluto, senza condizioni preliminari, non ha senso. Infatti, ad esempio, le curve fra quelle, che si domandano

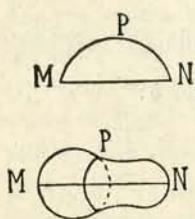



Fig. 228.

nel primo problema, quella del più breve cammino ha la proprietà *comune* di passare per i punti M ed N..

La risoluzione dei problemi della prima classe richiede la variazione di *due* elementi o di *un* punto della curva; per quelli della seconda basta far variare *tre* elementi o *due* punti della curva; ed infatti la parte della curva, che ha subìto la variazione, deve possedere in comune colla parte, che è rimasta invariabile, la proprietà A ed anche la proprietà B; poichè B deve essere massima o minima, e quindi deve soddisfare a *due* condizioni. Similmente la risoluzione dei problemi della terza classe richiede la variazione di *quattro* elementi; e così via.

Si vede che la risoluzione di un problema di una categoria, eccettuata la prima, implica quella del suo inverso. Così per la terza categoria si fanno variare quattro elementi di curva; talchè la parte che ha subìto la variazione ha in comune con la parte primitiva le proprietà A e B ed anche la proprietà C (poichè quest'ultima deve essere massima o minima). Ma precisamente queste stesse condizioni debbono essere soddisfatte, allorchè fra tutte le curve, che posseggono le proprietà B e C, si cerca quella, che rende A massima o minima; o, quando, fra le curve che hanno in comune A e C, si cerca quella che fornisce il massimo od il minimo di B. Così per prendere un esempio della seconda classe, il *cerchio* racchiude la maggior superficie B fra tutte le curve di lunghezza A data; inversamente fra tutte le curve di area data il *cerchio* è quello di minor lunghezza A. Le condizioni necessarie, affinchè le curve abbiano una proprietà A comune, od affinchè questa proprietà sia massima o minima sono espresse esattamente nello stesso modo. Eulero fondandosi su questa identità di espressione riconobbe la possibilità di ricondurre alla prima categoria i problemi delle categorie superiori. Ad esempio se si domanda qual'è fra tutte le curve, per cui A ha lo stesso valore, quella che rende B massimo, bisognerà cercare la curva, che rende $A + mB$ massimo, ove m è una costante *arbitraria*. Infatti affinchè $A + m B$ resti la stessa, qualunque sia m, in una variazione della curva cercata,

bisogna che le variazioni di A e B siano separatamente eguali a zero.

6. Eulero in quest'ordine di idee fece fare alla meccanica un importantissimo progresso. Trattando il problema della brachistocrona in un mezzo resistente, problema studiato da Hermann e da lui, riconobbe che i suoi metodi erano insufficienti. Nel caso della brachistocrona nel vuoto, la velocità dipende *solo* dall'altezza di caduta; la velocità in un elemento della curva non dipende affatto dagli altri elementi. Quindi si può effettivamente asserire che ogni arco della curva, piccolo a piacere, è brachistocrono. Ma in un mezzo resistente il caso è ben diverso. L'intiera lunghezza e la forma del cammino precedente influiscono sulla velocità in un elemento. L'intiera curva può essere brachistocrona senza che necessariamente ciascuno de' suoi elementi separatamente possegga la stessa proprietà. Mediante considerazioni di questa specie Eulero riconobbe che il principio posto da Giacomo Bernoulli non era valido in generale e i problemi di questa specie richiedevano un trattamento più particolareggiato.

7. Il gran numero di problemi risoluti e l'ordine metodico dato ad essi a poco a poco condussero Eulero a scoprire quei metodi, che sostanzialmente non differivano da quello che più tardi sviluppò Lagrange sotto una forma sua propria ed alquanto differente, il cui insieme ora chiamasi il *calcolo delle variazioni*. Così Giovanni Bernoulli pel primo trovò per analogia una soluzione *accidentale* di un tal problema. Giacomo Bernoulli sviluppò un metodo *geometrico* per la risoluzione di problemi consimili. Eulero alla sua volta *generalizzò* i problemi ed il metodo geometrico. E finalmente Lagrange emanicipandosi intieramente dalla considerazione delle figure geometriche, diede un metodo *analitico*. Lagrange osservò che gl'incrementi che ricevono le funzioni in conseguenza di un cambiamento della loro *forma* sono interamente *analoghi* agl' incrementi che esse ricevono in conseguenza di un cambiamento delle loro variabili indipendenti. Per

distinguere le due specie di incrementi Lagrange denotò i primi con δ, i secondi con d. Mediante l'osservazione di questa analogia Lagrange potè scrivere le equazioni che menano alla soluzione dei problemi di massimo e minimo. Lagrange non diede, nè cercò mai nemmeno di dare un'ulteriore prova del suo metodo, che si è mostrato di una fertilità grandissima. Il suo lavoro è intieramente originale. Con una perspicacia, il cui valore economico è grandissimo, egli scorse le basi, che gli parvero abbastanza sicure ed utilizzabili, per potere edificare su di esse. I principii fondamentali si giustificano da sè stessi mediante la loro efficacia. Invece di preoccuparsi di darne una dimostrazione, Lagrange dimostrò con qual successo essi possano essere impiegati. (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies,* Misc. Taur. 1762).

Si comprende facilmente quali difficoltà i contemporanei ed i successori di Lagrange ebbero a superare per afferrare la sua idea, Eulero invano si sforzò di spiegare la differenza che passa tra una variazione ed un differenziale immaginando delle costanti, contenute nella funzione, la cui variazione dà luogo ad un cambiamento di forma di quest'ultima. L'incremento del valore della funzione, prodotto dall'incremento di queste costanti, sarebbe allora la variazione; mentre il differenziale sarebbe l'incremento della funzione corrispondente a quelli delle variabili indipendenti. Ma queste idee dànno una nozione del calcolo delle variazioni particolarmente timida, ristretta ed illogica, la quale concezione certamente non si avvicina in nulla a quella di Lagrange. Anche il trattato moderno di Lindelöf, così eccellente per molti rispetti, presenta lo stesso difetto. Secondo la nostra opinione Jellett è il primo che ha fatto una esposizione compiuta ed esatta delle idee di Lagrange. Pare che Jellett abbia chiaramente espresso ciò che Lagrange non aveva potuto stabilire intieramente o forse aveva giudicato superfluo di esporre.

8. La concezione di Jellett in sostanza è la seguente. Generalmente le quantità sono divise in *costanti* e *variabili;* quest'ultime essendo suddivise in variabili indipendenti (o arbitrarie) ed in variabili dipendenti (funzioni), nello stesso modo si può immaginare la forma di una funzione come *determinata* o *indeterminata* (variabile). Se una forma di una funzione $y = \varphi(x)$ è variabile, il valore della funzione y può variare tanto per un incremento dx della variabile indipendente x, quanto per una variazione della *forma*, con un passaggio dalla forma φ ad una forma φ_1. Il primo cambiamento è il differenziale dy; il secondo è la variazione δy. Quindi si ha:

$$dy = \varphi(x + dx) - \varphi(x),$$

e

$$\delta y = \varphi_1(x) - \varphi(x).$$

La variazione di una funzione indeterminata, la cui forma subisce un cambiamento, non dà luogo ad alcun problema all'infuori del cambiamento del valore di una variabile indipendente. Possiamo prendere a piacere una modificazione qualunque di forma e produrre così un cambiamento qualunque di valore. Un problema non è posto, finchè non si domanda la variazione della funzione *determinata* F di una funzione indeterminata φ (contenuta in F) per una variazione di forma di quest' ultima funzione φ. Ad esempio abbiasi una curva di equazione *indeterminata* $y = \varphi(x)$. La lunghezza S di questa curva fra le ascisse x_0 e x_1 è:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]^2} \, . \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx,$$

ove S è una funzione *determinata* della funzione indeterminata φ. Quando si fissa la forma della curva, allora si può dedurne il valore di S. Ogni cambiamento della curva corrisponde ad una

variazione δS della lunghezza dell'arco, che si può determinare. Nell'esempio dato la funzione S non contiene direttamente la funzione y, ma bensì la sua derivata prima $\frac{dy}{dx}$, la quale alla sua volta dipende da y.

Sia $u = F(y)$ una funzione determinata della funzione indeterminata $y = \varphi(x)$; si ha:

$$\delta u = F(y + \delta y) - F(y) = \frac{dF(y)}{dy} \delta y.$$

Inoltre sia $u = F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ una funzione determinata della funzione indeterminata $y = \varphi(x)$. Una variazione di forma di φ fa variare y di δy e $\frac{dy}{dx}$ di $\delta \frac{dy}{dx}$. La variazione corrispondente di u è:

$$\delta u = \frac{dF\left(y, \frac{dy}{dx}\right)}{dy} . \delta y + \frac{dF\left(y, \frac{dy}{dx}\right)}{d\frac{dy}{dx}} \cdot \delta \frac{dy}{dx},$$

e l'espressione $\delta \frac{dy}{dx}$ sarà, secondo la definizione, data da:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d(u + \delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d \,.\, \delta y}{dx}.$$

Così si trova facilmente:

$$\delta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \text{ ecc.}$$

Ora siamo giunti a questo problema: Per qual forma della funzione $y = \varphi(x)$ l'espressione:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V \,.\, dx,$$

nella quale

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \right),$$

è massima o minima?, ove φ denota una funzione indeterminata e F una funzione determinata. Il valore di U può cambiare per una variazione dei limiti x_0 ed x_1, ma all'infuori di questi limiti, la variazione della variabile indipendente x, come tale, non influisce sulla U. Se supponiamo i limiti fissi, allora è inutile di ulteriormente preoccuparsi di x. Il solo altro modo, per cui il valore di U è suscettibile di variazione, consiste in un cambiamento della *forma* di $y = \varphi(x)$, che produce nelle espressioni $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. .... le variazioni di *valore* corrispondenti $\delta y, \frac{\delta dy}{dx}, \delta\frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ e così via. Indichiamo con DU l'incremento totale di U, la cui espressione eguagliata a zero dà la condizione di massimo o minimo; esso è uguale alla somma del differenziale dU e della variazione δU. Quindi si ha:

$$DU = dU + \delta U = o,$$

ovvero:

$$DU = V_1\, dx_1 - V_0\, dx_0 + \delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta V \,.\, dx = o.$$

In questa equazione $V_1 dx_1$ e $- V_0 dx_0$ sono gl'incrementi dovuti alla variazione dei limiti. Rispetto a δV ne viene, da ciò

che è stato detto più sopra, che si può scrivere:

$$\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}\delta\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots =$$

$$= \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots$$

Per brevità porremo:

$$\frac{dV}{dy} = N\,,\ \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} = P_1\,,\ \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = P_2\,,\ldots$$

Allora si ha:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,.\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(N dy + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + P_3\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots\right).\,dx\ .$$

Qui la difficoltà aumenta pel fatto che nel secondo membro si trovano non solo δy, ma ancora $\frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2} \ldots$; ed invero queste quantità dipendono le une dalle altre, ma non si scorge subito la natura di questa dipendenza. Si può rimuovere tale difficoltà mediante l'integrazione per parti, la cui formula ben nota è:

$$\int u dv = uv - \int v du\,;$$

e che nel nostro caso ci dà:

$$\int P_1\frac{d\delta y}{dx}\,.\,dx = P_1\delta y - \int\frac{dP_1}{dx}\delta y\,.\,dx\,,$$

$$\int P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2}\,.\,dx = P_2\frac{d\delta y}{dx} - \int\frac{dP_2}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot dx =$$

$$= P_2 \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \delta y + \int \frac{d^2 P_2}{dx^2} \delta y dx \,,$$

e così via.

Introducendo in questi integrali i limiti, allora si pone la condizione $DU = o$ sotto la forma:

$$o = V_1 \, dx_1 - V_0 \, dx_0$$

$$+ \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \ldots\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \ldots\right)_0 \delta y_0$$

$$+ \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \ldots\right)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \ldots\right)_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \frac{d^3 P_3}{dx^3} + \ldots\right) \delta y dx \,,$$

la quale espressione ora contiene solo δy sotto il segno integrale.

I due termini della *prima linea* di questa espressione sono *indipendenti* dalla variazione della forma della funzione e dipendono solo dalla variazione dei *limiti*. I termini delle linee successive, sino all'ultima esclusivamente, dipendono solo dalle variazioni della funzione per i valori *limiti* della variabile indipendente; gl'indici 0 ed 1 indicano d'altra parte che bisogna introdurre questi limiti nelle espressioni. Infine l'espressione dell'ultima linea dipende dalla *variazione di forma* della funzione, prendendo queste parole nel loro senso più generale. Rappresentando con $a_1 - a_0$ il secondo membro, esclusa l'ultima linea, e con β l'espressione fra le parentesi sotto il segno integrale, questa equazione si può brevemente scrivere:

$$o = a_1 - a_0 + \int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx \,;$$

che equivale alle seguenti:

$$a_1 - a_0 = o, \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = o; \tag{2}$$

se questi due termini non fossero separatamente nulli, l'uno di essi determinerebbe l'altro. L'integrale di una funzione indeterminata non può d'altronde, essere dato *unicamente* dai valori di questa funzione ai limiti. Quindi si ha in generale:

$$\int_{x_0}^{x_1} \beta \delta y dx = o;$$

e, poichè δy nel suo senso più generale è arbitraria, questa equazione richiede:

$$\beta = o.$$

La natura della funzione $y = \varphi(x)$, che rende massima o minima l'espressione U, è così determinata dalla equazione:

$$\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}_1}{dx} + \frac{d^2\mathrm{P}_2}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{P}_3}{dx_3} + \ldots = o. \tag{3}$$

L'equazione (3) fu trovata da Eulero; ma Lagrange pel primo ha dimostrato in qual modo, mediante l'uso della condizione ai limiti, si poteva usare l'equazione (1) per la determinazione completa della funzione. L'equazione (3) determina in *generale* la forma della funzione $y = \varphi(x)$, che deve verificarla; ma questa funzione contiene delle costanti *arbitrarie,* che possono essere determinate solo mediante la condizione ai limiti. Rispetto alle notazioni Jellett fa osservare a ragione che è un'incongruenza scrivere, come ha fatto Lagrange, i due primi termini dell'equazione (1) sotto la forma $\mathrm{V}_1 \delta x_1 - \mathrm{V}_0 \delta x_0$; egli impiegò la notazione ordinaria dx_1, dx_0 per gl'incrementi delle variabili indipendenti.

9. Per viemeglio illustrare l'uso di queste equazioni proponiamoci di determinare la linea più breve, cioè la forma della funzione, che rende massimo o minimo l'integrale:

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx.$$

Quindi qui si ha:

$$V=F\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Nell'equazione (3) tutti i termini si annullano, all'infuori di quello che contiene P_1, e si ha:

$$P_1=\frac{dV}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

L'equazione (3) si riduce a:

$$\frac{dP_1}{dx}=o,$$

la quale mostra che P_1, e quindi $\frac{dy}{dx}$, unica variabile che contenga P_1, è indipendente da x. Quindi si ha infine:

$$\frac{dy}{dx}=a,\qquad y=ax+b,$$

ove a e b sono costanti, che si determinano mediante la condizione ai limiti. Se la retta deve passare per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1), si ha inoltre:

$$(m)\begin{cases} y_0=ax_0+b, \\ y_1=ax_1+b. \end{cases}$$

L'equazione (1) svanisce, poichè è $dx_0 = dx_1 = o$, $\delta y_0 = \delta y_1 = o$, e si anuullano ancora i coefficienti $\delta \frac{dy}{dx}, \delta \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Quindi le costanti a e b sono determinate unicamente mediante le due equazioni (m).

Se si dànno solo i limiti x_0 ed x_1, rimanendo y_0 ed y_1 indeterminate, si ha ancora: $dx_1 = dx_0 = o$, e l'equazione (1) prende la forma:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} (\delta y_1 - \delta y_0) = o,$$

che dà:

$$a = o,$$

poichè δy_1 e δy_0 sono arbitrarie. L'equazione della retta è allora $y = b$; ed essendo b indeterminata, la retta è una parallela qualunque all'asse delle ascisse.

È importante fare osservare che l'equazione (1) e le condizioni ausiliarie (espresse dalle equazioni (m) nell'esempio precedente) si completano in generale fra loro rispetto alla determinazione delle costanti arbitrarie.

Se richiedesi che:

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

sia minima, l'integrazione della equazione differenziale, cui si riduce l'equazione (3), dà:

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c}{c}} \right);$$

$2\pi Z$ è minimo nello stesso tempo che Z. Poichè la curva trovata genera, ruotando intorno l'asse delle ascisse, la superficie di

rivoluzione di area minima. Inoltre il minimo di Z corrisponde alla posizione più bassa del centro di gravità della curva considerata come un filo omogeneo pesante; onde la curva è una catenaria. L'equazione ai limiti permette di determinare agevolmente le costanti c e c'.

Nella risoluzione dei problemi di meccanica si fa una distinzione fra gl'incrementi delle coordinate dx, dy, dz, che si producono *realmente* nel tempo, e gl'incrementi *possibili* δx, δy, δz, che si possono considerare per esempio se si applica il principio degli spostamenti virtuali. Questi ultimi incrementi non sono in generale delle variazioni, cioè non sono cambiamenti di valori dovuti a cambiamenti di forma di una funzione. Si possono considerare δx, δy, δz come funzioni indeterminate delle coordinate x, y, z, e quindi si debbono trattare come variazioni solo nel caso, in cui il sistema meccanico considerato è un continuo, per esempio un filo, una superficie flessibile, un corpo elastico, un liquido.

Scopo di quest'opera non è di sviluppare teorie matematiche, ma semplicemente di studiare la parte puramente fisica della meccanica. Tuttavia era necessario discorrere della storia dei problemi degli isoperimetri e del calcolo delle variazioni, poichè le ricerche fatte in questo campo hanno esercitato una grande influenza sullo sviluppo della meccanica. Il senso intuitivo delle proprietà generali dei sistemi, e particolarmente delle proprietà di massimo e minimo, fu talmente acuito da questo genere di problemi, che furon facilmente scoperte le proprietà di massimo e di minimo nei sistemi meccanici. È invero da Lagrange in poi, ordinariamente i principii generali della meccanica si mettono sotto la forma di teoremi di massimo e minimo; e questa predilezione rimarrebbe incomprensibile senza conoscerne lo sviluppo storico.

II. *Concezioni teologiche, animiche e mistiche nella meccanica.*

1. Se in una conversazione intendiamo di parlare di un uomo assai pio, del quale ci sfugge il nome, noi assai facilmente corriamo col nostro pensiero al consigliere X o al signor conte Y; non ci verrà in mente che esso sia un assiduo osservatore della natura. Sarebbe tuttavia un errore di credere che in ogni tempo siano esistite fra le concezioni scientifiche e le teologiche degli uomini le attuali relazioni alquanto tese, che talvolta degenerano anche in dispute acerbe. Basta dare uno sguardo alla storia della scienza per convincersi del contrario.

Ci compiacciamo sovente di parlare dei " conflitti " fra la scienza e la teologia, o meglio fra la scienza e la chiesa; e questo è un tema che si presta a moltissime considerazioni. Da una banda abbiamo un lungo catalogo di delitti commessi da parte della chiesa a danno del progresso; dall'altra un'imponente schiera di martiri, ove troviamo i nomi illustri di Giordano Bruno e di Galileo; e fu solo per circostanze fortunate se Descartes, pio come era, potè sfuggire allo stesso fato. Ma queste lotte sono state a sufficienza narrate dalla storia; e se insistiamo solamente su di esse, consideriamo unicamente un lato della questione, e così cadiamo nell'errore. Allora si giunge facilmente a credere che la scienza ha subìto una repressione da parte della chiesa, e che, liberatasi da questa *sola* repressione, si sarebbe subito innalzata ad altezze insperate. Senza dubbio la lotta degli scienziati contro le esterne opposizioni dovè essere aspra; in essa la chiesa non rifuggì di ricorrere a qualunque mezzo per assicurarsi la vittoria, e i suoi modi di procedere furono i più egoistici, privi di ogni scrupolo, e più crudeli di quelli adoprati da qualsiasi altra parte politica. Ma gli scienziati ebbero inoltre da sostenere un forte combattimento contro le loro proprie idee preconcette,

e specialmente contro il pregiudizio che la teologia dovesse essere la base di ogni scienza. Solo a poco a poco ed assai lentamente questo pregiudizio fu vinto.

2. Ora lasciamo parlare i fatti ed esaminiamo innanzi tutto alcune opinioni personali.

Napier, l'inventore dei logaritmi, viveva nel XVI secolo; era un puritano austero ed un teologo zelante. Egli si dedicò a speculazioni le più disparate. È autore di un commento esegetico dell'Apocalisse, con proposizioni e dimostrazioni matematiche. Ad esempio nella proposizione 26ª egli sostiene che il papa è l'Anticristo; nella proposizione 36ª asserisce che le locuste ivi nominate, siano i Turchi ed i Maomettani e così via.

Biagio Pascal (XVII secolo), uno dei pensatori più geniali che s'incontrano nel campo della matematica e della fisica, era profondamente ortodosso ed ascetico. Ad onta della dolcezza del suo carattere, la forza della sua convinzione gli fece a Rouen denunciare come eretico un professore di filosofia. La guarigione di sua sorella mediante il contatto di una reliquia esercitò sopra di lui una grande impressione, e la ritenne per miracolosa. Tuttavia non annetteremo grande importanza a questi fatti per sè stessi, poichè l'intiera sua famiglia era assai inclinata alla esaltazione religiosa, e la sua vita ne presenta anche altri esempî. La profondità della sua fede si palesa nella sua risoluzione di abbandonare totalmente la scienza e di vivere secondo il cristianesimo. Egli era uso di dire, che quando desiderava di essere consolato, l'intiera sapienza del mondo non poteva servirgli a nulla; ma solo gl'insegnamenti del cristianesimo gli davano ciò di cui egli aveva bisogno. La sincerità del suo desiderio di convertire gli eretici si scorge nelle sue “ Lettres provinciales „, in cui egli insorge contro le orribili sottigliezze inventate dai dottori della Sorbona, precisamente per perseguitare i giansenisti. La sua corrispondenza con diversi teologi dei suoi tempi è assai notevole; e la nostra meraviglia diviene grandissima, quando vediamo nelle sue lettere discutere seriamente se ancora il diavolo fosse capace di far miracoli.

Ottone di Guericke, l'inventore della pompa aspirante, incominciò il suo libro, scritto circa due cento anni or sono, con una discussione sul miracolo di Giosuè, che egli cercava di mettere d'accordo col sistema di Copernico. Come proemio alle sue ricerche sullo spazio vuoto e sulla natura dell'aria troviamo inoltre in quest'opera intieri capitoli, che si occupano della localizzazione del paradiso, dell'inferno e così via. Quantunque Guericke realmente si sforzi di rispondere a tali questioni, per quanto gli fosse ragionevolmente possibile, tuttavia si vede facilmente in quale imbarazzo si è trovato; mentre presentemente un teologo illuminato si rifiuterebbe persino di occuparsi di tali questioni. Eppure Guericke viveva in un'epoca posteriore alla Riforma!

Anche Newton non disdegnò di occuparsi della spiegazione della Apocalisse. Era altresì assai difficile discutere con lui di questioni di questo genere. Si conta che un giorno Halley, essendosi permesso di scherzare sulle discussioni teologiche, si ebbe questa salace risposta: " Io ho studiato queste cose, voi no! „.

Non è necessario che ci intratteniamo lungamente su Leibniz, l'inventore del migliore dei mondi e dell'armonia prestabilita — invenzioni che hanno trovato una eccellente confutazione nel " Candide „ di Voltaire, romanzo in apparenza divertente, ma in sostanza serio e profondamente filosofico. Ma ognuno sa come Leibniz fosse ad un tempo teologo, filosofo e scienziato.

Altri esempî assai notevoli presenta il secolo XVIII. Eulero pure nelle sue " Lettres à une princesse d'Allemagne „ tratta insieme le questioni teologico-filosofiche con le questioni scientifiche. Egli discute la difficoltà che s'incontra per comprendere le reciproche azioni del corpo e dello spirito, essendo data la loro differenza essenziale, cui egli crede fermamente. Non ama d'altra parte il sistema dell'occasionalismo, sviluppato da Descartes e dai suoi successori, secondo il quale Dio eseguisce in ciascun istante il movimento corrispondente all'intenzione dell'anima, la quale è incapace da sè stessa ad eseguirlo. Egli prende in ischerzo, non senza malizia, l'armonia prestabilita, secondo la quale si ferma un accordo dall'origine fra i movimenti del corpo

e le intenzioni dell'anima — benchè entrâmbe non siano affatto in connessione fra loro — precisamente come esiste l'armonia fra due orologi differenti, ma perfettamente d'accordo. Osserva che in questa concezione il suo proprio corpo gli è così estraneo come quello di un rinoceronte del centro dell'Africa, il quale potrebbe precisamente essere così bene in armonia prestabilita con la sua anima.

Ascoltiamo le sue parole (1): " Si dans le cas d'un déréglement de mon corps, Dieu ajustait celui d'un Rhinocéros, en sorte que ses movements fussent tellement d'accord avec les ordres de mon âme, qu'il levât la patte au moment que je voudrais lever la main, et ainsi des autres opérations, ce serait alors mon corps. Je me trouverais subitement dans la forme d'un Rhinocéros au milieu de l'Afrique, mais non obstant cela mon âme continuerait les mêmes opérations. J'aurais également l'honneur d'écrire a V. A., mais je ne sois pas comment elle recevrait mes lettres ". Si potrebbe quasi credere che Eulero abbia voluto imitare Voltaire; e tuttavia, per quanto la sua critica metta fortemente il dito nel punto essenziale, l'azione reciproca dell'anima e del corpo rimane per lui un miracolo. Ad onta di ciò egli s'ingolfa in un labirinto di sofismi intorno alla libertà della volontà. Le " Lettres " di Eulero ci offrono una buona rappresentazione delle questioni, di cui uno scienziato poteva occuparsi a quell'epoca: egli vi tratta del legame fra l'anima ed il corpo, del libero arbitrio, dell'influenza della libertà sugli avvenimenti dell'universo, della preghiera, del male fisico e morale, della conversione dei peccatori e di altre cose dello stesso genere; e tutto ciò nella stessa opera, in cui sono contenuti un gran numero di idee assai chiare intorno alla fisica ed un'eccellente esposizione della logica, nella quale sono impiegati per la prima volta i diagrammi circolari.

---

(1) In quest'epoca si scriveva quasi sempre in latino. Quando un dotto tedesco desiderava di essere particolarmente condiscendente o gentile scriveva in francese.

3. Gli esempî suesposti sono a sufficienza; e li abbiamo intenzionalmente scelti fra i *più grandi* investigatori scientifici. Quello, che si è riscontrato in questi scienziati in fatto di teologia, appartiene alla loro vita privata più intima. Essi ci dicono apertamente delle cose, che non erano obbligati a dirci, cose intorno alle quali potevano serbare il silenzio; ci presentano le loro opinioni sincere su di esse, non delle opinioni che sarebbero state loro imposte dal di fuori. Essi non si sentono coscienziosamente costretti dalla teologia. In una città ed in una Corte, che ospitano Voltaire e Lamettrie, Eulero non aveva nessuna ragione di nascondere le sue vere convinzioni.

Secondo l'opinione moderna questi uomini avrebbero potuto almeno osservare, che le questioni di questo genere non potevano trattarsi là convenientemente ove erano trattate,e che esse non erano questioni scientifiche. Per quanto possa essere grande lo stupore di vedere questa contraddizione fra una teologia tradizionale e le convinzioni scientifiche, che si sono create da sè stesse, pure tutto ciò non ci autorizza a menomare nel nostro pensiero l'autorità di questi uomini. La loro straordinaria potenza intellettuale si manifesta in ciò anche quando, ad onta delle idee ristrette del loro tempo, delle quali non era possibile liberarsi compiutamente, essi poterono allargare il loro orizzonte in modo, che noi possiamo ora per loro merito raggiungere un punto di vista intieramente libero.

Per essere imparziali bisogna anche riconoscere che nell'epoca, in cui avvenne lo sviluppo generale della meccanica, lo spirito *teologico* regnava da per tutto. Questioni teologiche venivano sollevate per ogni cosa, ed avevano un'influenza su tutto. Quindi non bisogna stupirsi se anche la meccanica siasi smarrita su questa via. Possiamo vedere ancora meglio, entrando nei particolari, quanto questa penetrazione fosse universale.

4. Nel capitolo precedente si è già detto qualche cosa intorno a tendenze analoghe dell'antichità presso Erone e Pappo. All'inizio del secolo XVII troviamo Galileo occupato in ricerche sulla resistenza dei materiali. Egli dimostrò che un tubo vuoto

presenta una resistenza alla flessione maggiore di quella di una verga massiccia della stessa lunghezza e della stessa quantità di materia; ed adoprò subito questa esperienza per spiegare la forma delle ossa degli animali, che spesso sono tubi cilindrici vuoti. Un esempio comune di questo fenomeno ci è dato da un semplice foglio di carta prima disteso, poi arrotolato a forma di tubo. Una trave orizzontale, incastrata per una estremità e caricata dall' altra, può essere assottigliata all' altra estremità caricata, senza arrecar danno alla resistenza, anzi risparmiando materia. Galileo determinò la forma di una trave di egual resisistenza in ciascuna sezione. Infine egli fece ancora osservare che animali geometricamente simili, ma di corporature assai differenti, soddisfano alle leggi della resistenza solo in proporzioni assai ineguali.

Le forme delle ossa, delle piume, delle paglie e di altri organi animali o vegetali, perfettamente adattate alle loro funzioni fino nei loro più minuti particolari, dovevano fare un' impressione profonda sopra un osservatore intelligente. Questo adattamento meraviglioso è spesso ancora presentato come una prova manifesta dell' esistenza di una sapienza superiore onnipotente, che governa la natura. Ad esempio si prendano in esame le piume delle estremità delle ali. Anzitutto vediamo lo scapo, che è un tubo vuoto, il cui diametro diminuisce verso l'estremità libera, onde una forma di egual resistenza. Poi vediamo ripetersi in piccolo la stessa costruzione in ciascuna barba della piuma. Occorrerebbe una grandissima conoscenza tecnica per imitare solamente una tale penna e renderla adatta al suo scopo, senza parlare nemmeno di inventarla. Pertanto non si deve dimenticare che la scienza non ha per oggetto la semplice ammirazione, ma invece la ricerca. Si sa in qual modo, secondo la sua teoria della evoluzione, Darwin tentasse di risolvere questi problemi. Si può mettere in dubbio se la sua soluzione sia completa; Darwin stesso ne dubitava. Tutte le condizioni esterne rimarranno impotenti, se non vi sarà qualche cosa in loro presenza, che vuole adattarvisi. Ma non è men vero che questa

teoria costituisca il primo serio tentativo, che sia stato fatto per sostituire la ricerca all' ammirazione pura e semplice della natura organica.

Nel XVIII secolo si discutevano ancora volentieri le idee di Pappo sulle celle degli alveari delle api. In un'opera pubblicata nel 1867 col titolo " Homes without Hands (pag. 428) „ , Wood racconta la storia seguente : " Maraldi had been struck with the great regularity of the cells of honeycomb. He measured the angles of the lozenge-shuped plutes, or rhombs, that form the terminal walls of the cells, and found them to be respectively 109° 28′ and 70° 32′. Réaumur, convinced that these angles were in some way connected with the economy of the cells, requested the mathematician König to calculate the form of a hexagonal prism terminated by a pyramid composed of three equal and similar rhombs, which woold give the greatest amount of space with a given amount of material. The answer was, that the angles should be 109° 26′ and 70° 34′. The difference, accordingly, was two minutes. Maclaurin (1) dissatisfied with this agreement, repeated Maraldi's measurements, found them correct, and discovered, in going over the calculation, an error in the logarithmic table employed by König. Not the bees, but the mathematicians were wrong, and the bees had helped to detect the error! „.

Ecco la traduzione: " Maraldi fu assai sorpreso della regolarità delle celle delle api. Misurò gli angoli delle loro facce a losanghe e li trovó eguali a 109° 28′ e 70° 32′. Réaumur convinto che questi angoli dovessero essere in relazione all'economia della cella, pregò il matematico König di calcolare un prisma esagonale sormontato da una piramide formata di tre losanghe eguali, talchè il contenuto sia massimo e la superficie minima. Si ebbe per risposta che gli angoli delle losanghe dovevano essere 190° e 26′ e 70° 34′. Quindi vi era una differenza di

(1) Vedi *Philosophical Transactions* del 1743.

due minuti. Maclaurin poco soddisfatto di questo risultato approssimato, ricominciò le misure di Maraldi e le trovò esatte; riprese i calcoli e scoprì un errore nelle tavole dei logaritmi impiegate da König. Quindi non erano le api, ma i matematici che avevano sbagliato, e così le api vennero in aiuto nella scoperta dell' errore! „.

Chi conosce come si misurano gli angoli di un cristallo ed ha veduto una cella di ape, la cui superficie è rugosa e niente tersa, metterà sicuramente in dubbio, che nella misura degli angoli delle celle si possa giungere a questa approssimazione di due soli minuti. Questa storia quindi non è altro che un innocente racconto matematico; si aggiunga che non ne conseguirebbe nulla da essa, anche se fosse vera. Inoltre aggiungiamo che, dal punto di vista matematico, il problema è posto in modo troppo imperfetto, affinchè si possa giudicare sino a qual punto le api l'abbian risolto.

Le idee di Erone e di Fermat sul moto della luce, di cui si è parlato nel capitolo precedente, ricevettero subito da Leibniz un colorito teologico, ed ebbero una parte assai importante, come si è già fatto vedere, nello sviluppo del calcolo delle variazioni. Nella corrispondenza, che ebbe Leibniz con Giovanni Bernoulli, si trovano ancora questioni teologiche mescolate alle dissertazioni matematiche. Il loro linguaggio è spesso ornato di similitudini e di espressioni prese dalla Bibbia. Ad esempio Leibniz scrive che il problema della brachistocrona lo tenta come il pomo tentò Eva.

Maupertuis, il celebre presidente dell'Accademia di Berlino, e l'amico intimo di Federico il Grande, diede un nuovo impulso all'indirizzo teologico della fisica mediante il suo principio della minima azione. Nella Memoria, in cui è esposto il suo principio in una forma alquanto oscura, e da cui si rileva la mancanza completa in Maupertuis di spirito di precisione matematica, l'autore dichiara che il suo principio è quello, che meglio risponde alla sapienza del creatore. Maupertuis era un uomo spirituale, ma una mente debole ed un facitore di progetti. Ne

fanno fede le sue proposte di fabbricare una città, in cui si sarebbe parlato solo latino, di perforare nel terreno un pozzo enorme e profondo per potere scoprire nuove sostanze, di fare nuove ricerche fisiologiche mediante l'oppio e mediante la dissezione delle scimie, di spiegare la formazione dell'embrione mediante la gravitazione ecc. Voltaire ha fatto di lui una critica salace nella sua *Histoire du docteur Akakia,* che fu origine prima della rottura fra lui e l'imperatore Federico.

Il principio di Maupertuis sarebbe senza dubbio subito scomparso dalla scena scientifica, se Eulero non ne avesse ripreso l'idea. Eulero, uomo veramente grande, lasciò ad esso il nome che aveva ed a Maupertuis la gloria della sua invenzione, ma ne fece una cosa nuova, pratica ed utilizzabile. L'idea reale di Maupertuis è assai difficile a spiegarsi, mentre quella di Eulero si spiega subito con un semplice esempio. Quando un corpo è obbligato a rimanere sopra una superficie data, ad esempio la superficie della Terra, il moto che esso riceve da un impulso qualunque è tale, che tra il suo punto di partenza e quello di arrivo esso descrive il cammino più breve. Ogni altro cammino che gli si assegnasse, sarebbe più lungo e richiederebbe per percorrerlo un tempo maggiore. Questo principio si applica alla teoria dei venti ed a quella delle correnti marine. Tuttavia Eulero ha conservato il punto di vista teologico. Egli voleva spiegare il fenomeno non soltanto mediante *cause* fisiche, ma anche per mezzo delle sue *finalità.*

“ Quum enim mund universi fabrica sit perfectissima, atque a creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat; quam ob rem dubium prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus, ope methodi maximorum et minimorum, aeque feliciter determinari quaeant, atque ex ipsis causis efficientibus „, (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimine proprietate gaudentes, Lausannae, 1744).

Ecco la traduzione: “ Siccome la costruzione del mondo, dice egli, è la più perfetta possibile ed è dovuta ad un crea-

tore infinitamente saggio, non avviene nulla al mondo, che non presenti proprietà di massimo o di minimo. Perciò non avvi alcun dubbio che non sia egualmente possibile di determinare tutti gli effetti dell'universo mediante le loro cause finali, coll'aiuto del metodo dei massimi e dei minimi, precisamente come mediante le loro cause efficienti „.

5. Le idee della invariabilità della quantità di materia, della costanza della somma delle quantità di moto, della indistruttibilità del lavoro o della energia, che presentemente governano tutte le scienze fisiche, hanno avuto origine dall' influenza delle concezioni teologiche. Esse scaturiscono da questa proposizione, espressa da Descartes nei suoi " Principesde la Philosophie „ che abbiamo già ricordato, secondo la quale la quantità di materia e la quantità di moto, create sin dall' origine, sono invariabili; poichè solo la loro invariabilità può essere in armonia con la stabilità del creatore dell' universo. Le idee sul modo di calcolare la somma delle quantità di moto si sono considerevolmente modificate da Descartes a Leibniz e più tardi presso i loro successori; a poco a poco è nato ciò che presentemente si chiama " principio della conservazione dell'energia „; ma assai lentamente scomparve il vecchio fondo teologico. E in vero non si può negare, che rispetto a questa legge non pochi scienziati anche oggi si abbandonano ad un misticismo di un genere speciale.

Durante gl'intieri secoli XVI° e XVII°, e sino alla fine del secolo XVIII, la tendenza universale era di vedere in ciascuna legge di fisica une disposizione particolare del creatore. Un osservatore attento vede pertanto questa idea trasformarsi a poco a poco. Mentre con Descartes e Leibniz la fisica e la teologia sono ancora assai frammischiate, in seguito vediamo uno sforzo notevole, non tanto per scartare compiutamente la teologia, quanto per separarla nettamente dalla fisica. Le disquisizioni teologiche sono relegate tanto al principio, quanto alla fine dei trattati di fisica; ogni volta che la cosa è possibile, il dominio

teologico si restringe alla creazione, e lascia, a partire da questo punto in poi, il campo libero alla fisica.

Verso la fine del secolo XVIII° si è colpiti da un notevole cambiamento apparentemente subitaneo, ma sostanzialmente avvenuto come una conseguenza necessaria del processo di sviluppo che si è descritto. Lagrange dopo avere, in un lavoro giovanile, voluto fondare tutta la meccanica sul principio della minima azione di Eulero, riprese da capo lo stesso soggetto e dichiarò che egli voleva astenersi intieramente da tutte le speculazioni teologiche e metafisiche, come assai nocive ed assolutamente estranee alla scienza. Egli ricostruì la meccanica su altre basi; e nessuno spirito competente potrebbe negare la superiorità della nuova esposizione. Dopo Lagrange tutti gli scienziati adottarono le sue vedute, e così fu sostanzialmente determinata l'odierna attitudine della fisica riguardo alla teologia.

6. Quindi quasi tre secoli furono necessari, affinchè l'idea della separazione completa fra la fisica e la teologia siasi potuto intieramente sviluppare dal suo primo stato embrionale in Copernico sino alla sua finale promulgazione da parte di Lagrange. Pertanto non bisogna disconoscere che i grandi genii, come Newton, ebbero sempre una concezione assai chiara di questa verità. Ad onta dei suoi sentimenti profondamente religiosi, Newton non frammischiò mai la teologia colle questioni scientifiche. Infatti egli termina la sua Ottica alle ultime pagine della quale risplende ancora un'intensa chiarezza del suo genio, con una esclamazione di profonda umiltà davanti alla vanità di tutte le cose terrestri. Ma le sue ricerche ottiche diversamente da quelle di Leibniz non contengono in se stesse alcuna traccia di teologia. Si può dire la stessa cosa di Galileo e di Huygens. I loro scritti sono per così dire perfettamente conformi al modo di vedere di Lagrange, e possono, sotto questo punto di vista, considerarsi come classici. Ma le concezioni e le tendenze di un'epoca si misurano non dagli eccelsi intelletti, ma dai genï mediocri.

Per formarsi un'idea convincente del processo, che ora ab-

biamo delineato, bisogna ancora tener conto dei punti seguenti: in uno stato di coltura intellettuale, in cui la religione era la sola educazione e la sola concezione dell'universo, s'imponeva naturalmente l'idea di trattare tutte le cose da un punto di vista teologico e di considerare la teologia come sufficiente in tutti i campi di ricerca. Se ritorniamo colla mente all'epoca, in cui si suonava l'organo coi pugni, in cui abbisognava per fare i calcoli una tavola di moltiplicazione scritta davanti a sè, in cui si faceva mediante la mano ciò che, presentemente si fa colla mente, si poteva pretendere dagli uomini di quest'epoca, che si fossero messi a lavorare con uno spirito *critico* contro le loro proprie concezioni? Il pregiudizio si dissipò a poco a poco, lentamente, a mano a mano che le grandi scoperte geografiche, tecniche e scientifiche del XV° e del XVI° secolo allargavano l'orizzonte e svelavano i dominî, in cui l'antica concezione si trovava impotente, poichè essa si era formata *anteriormente* al loro acquisto. La grande libertà di pensiero, che si manifesta nei casi isolati all'inizio del medio-evo prima presso i poeti e poi presso gli scienziati, rimane tuttavia sempre difficile a comprendersi. Il progresso intellettuale in questa epoca deve essere stato il lavoro di un piccolissimo numero di pensatori isolati veramente straordinarî, le cui idee dovevano essere attaccate solo mediante fili ben sottili alle concezioni popolari, ed erano assai più adatte ad urtare e violentare queste ultime, che ad apportare la trasformazione di esse. Solo negli scritti del secolo XVIII° sembra guadagnar terreno il lavoro di schiarimento. Vediamo le scienze umanitarie, storiche, filosofiche e naturali avvicinarsi ed aiutarsi a vicenda nella lotta per il libero pensiero. Chi, attraverso la letteratura solamente, ha potuto partecipare a questo slancio ed a questa emanicipazione dell'intelletto umano, conserva durante tutta la vita, per il XVIII° secolo, un senso di melanconico rimpianto.

7. Quindi l'antico punto di vista fu abbandonato. La storia della meccanica ora si riconosce solo dalla forma dei suoi teoremi, la qual forma rimarrà a noi estranea, finchè non si terrà

conto della loro origine. La concezione teologica in questo modo cedè a poco a poco il posto ad una concezione più sobria come ora brevemente faremo vedere, la quale era intimamente connessa ad un notevole progresso del pensiero.

Quando si dice che la luce si muove secondo una traiettoria, in cui impiega il minor tempo possibile, si esprimono in questo modo più cose. Innanzitutto non si sa ancora *perchè* la luce tenga questo cammino di durata minima. Facendo l'ipotesi della saggezza del creatore si rinuncia allora ad ogni ulteriore esame. Ora si sa che la luce si muove per *tutti* i cammini; ma solo su quelli di minor durata di tempo a percorrerli le onde luminose acquistano una maggiore intensità; talchè si può constatare un risultato sensibile; quindi *pare* solo che la luce si propaghi secondo la traiettoria di minor durata di tempo a percorrerla. Dopo che venne abbandonato il pregiudizio, si scoprirono, accanto a prove di una pretesa economia della natura, casi della più sorprendente prodigalità; Jacobi ne mostrò alcuni esempî, che avevano attinenza col principio di Eulero intorno alla minima azione. Molti fenomeni naturali non fanno questa impressione di economia, semplicemente perchè essi divengono visibili solo quando si produce casualmente un insieme economico di effetti. Questa idea è nel dominio della natura inorganica la stessa di quella che Darwin ha svolto nella natura organica. Istintivamente agevoliamo la concezione della natura attribuendo ad essa le rappresentazioni economiche che ci sono famigliari.

Spesso i fenomeni della natura presentano proprietà di massimo e di minimo, perchè sono scomparse le cause di un cambiamento ulteriore. La catenaria ha il baricentro posto nella posizione più bassa possibile, per l'unica ragione, che sola questa posizione di esso impedisce ogni caduta ulteriore degli anelli della catena. I liquidi presentano una superficie minima sotto l'influenza delle forze molecolari, poichè può solo sussistere un equilibrio stabile, quando le forze molecolari non sono capaci di diminuire ulteriormente l'area della superficie. Quindi il punto essenziale non è nel massimo o nel minimo, ma nel fatto che il

lavoro in queste circostanze scompare; il qual lavoro è precisamente il fattore determinate di questo cambiamento. Onde è assai meno imponente, ma perciò anche molto più chiaro e ad un tempo più rigoroso e più generale, invece di parlare della tendenza economica della natura, il dire che si verifica soltanto ciò che può avvenire, essendo date tali forze e tali circostanze determinate.

Ora possiamo giustamente domandarci: Come avviene che, quantunque il punto di vista teologico che ha condotto alla enunciazione dei principii della meccanica sia errato, questi principii sono esatti in tutte le loro parti essenziali? La risposta è facile. Anzitutto la concezione teologica ha solo fornito il *modo* di espressione del principio, e non il suo *contenuto,* che è stato fornito dalla osservazione. Un analogo effetto sarebbe stato esercitato da qualunque altra concezione dominante, ad esempio da una concezione *mercantile*, che ha probabilmente esercitato un'influenza sul pensiero di Stevino. Inoltre la concezione teologica della natura è nata dalla tendenza dello spirito umano di abbracciare l'intiero universo in un *sistema unico,* la quale tendenza è propria alle scienze della natura ed è perfettamente conforme al loro scopo. La filosofia teologica della natura è un tentativo senza speranza ed un ritorno verso un livello inferiore di coltura; ma perciò non bisogna ripudiare la *sana radice,* d'onde essa è uscita, e che non è diversa dalla radice della vera ricerca naturale.

Invero la scienza non può compiere nulla con la semplice considerazione dei fatti *particolari,* quando essa non getti di quando in quando uno sguardo sull'*insieme*. Le leggi della caduta dei corpi di Galileo, il principio delle forze vive di Huygens, quello degli spostamenti virtuali, ed anche il concetto di massa si possono ottenere, come già si è visto, solo mediante la considerazione alternativa del fatto particolare e dell'insieme dei fenomeni naturali. Nella rappresentazione mentale dei fenomeni meccanici si può partire dalle proprietà delle masse particolari (dalle leggi elementari) e comporre l'immagine del feno-

meno; ma possiamo anche limitarci alle proprietà dell'intiero sistema (alle leggi integrali). Le proprietà di una massa richiedono sempre relazioni fra queste ed altre masse; così la velocità e l'accelerazione implicano una relazione con il tempo e l'intiero universo; quindi si vede che non esistono leggi *puramente* elementari. Onde sarebbe contradditorio escludere dai nostri studî, come meno certo, questo necessario sguardo sopra il tutto e sulle proprietà generali della natura. Ci limiteremo ad esigere da un nuovo principio *prove tanto più perfette*, quanto esso è più generale e la sua portata è maggiore, riguardo alla maggiore possibilità di errore.

L'idea dell'azione di una volontà e di una intelligenza nella natura non è in alcuna guisa frutto esclusivo del monoteismo cristiano. Essa è più famigliare e più conforme al paganesimo ed al feticismo. Il paganesimo per altro cerca la volontà e l'intelligenza nei particolari, mentre il monoteismo ne cerca l'espressione nell'insieme. Del resto non esiste un puro monoteismo. Il monoteismo della Bibbia non è intieramente emancipato dalla credenza nei demoni, negli stregoni e nei maghi; queste concezioni pagane s'incontrano ancora più spesso nel crististianesimo del medio-evo. Sarebbe superfluo parlare delle torture, che la Chiesa e lo Stato facevano subire agli stregoni, e dei roghi, ove venivano arsi; queste atrocità venivano ispirate non tanto dalla sete di guadagno, quando dalla prevalenza delle idee teologiche. Nella sua notevole opera sulla “ *Cultura primitiva* „. Tylor studia la stregoneria, la superstizione e la credenza nei miracoli presso tutti i popoli selvaggi, ed instituisce un parallelo fra le opinioni del medio-evo sugli stregoni: l'analogia è sorprendente. Il supplizio del fuoco per gli stregoni, così frequente in Europa nei secoli XVI° e XVII°, si applica ancora vigorosamente nell'Africa centrale. Come lo dimostra Tylor, si riscontrano presso di noi tracce di queste circostanze in moltissimi costumi, di cui si è smarrito il senso, avendo mutato il nostro punto di vista.

8. Le scienze fisiche assai lentamente si sono emanicipate da

queste concezioni. Nella celebre opera di Giambattista Porta "*Magia Naturalis*", pubblicata nel XVI° secolo, la quale contiene importanti scoperte fisiche, si trovano pratiche di stregonerie e demonologie di ogni maniera, che appena sono superate da quelle dei "medicastri" indiani. Per la prima volta nel 1600 l'opera di Gilberto "*De magnete*" impose certi limiti al sovrannaturale nella scienza. Quando noi riflettiamo che anche Lutero diceva di avere personalmente incontrato il diavolo, e che Keplero, la cui zia era stata arsa come stregona e la cui madre fu prossima a subire la stessa sorte, dichiara che non si può negare la stregoneria, e non ha il coraggio di emaniciparsi intieramente dall'astrologia, allora noi possiamo rappresentarci sotto vivi colori lo stato delle menti degli uomini meno illuminati di que' tempi.

Tylor giustamente osserva che la scienza odierna conserva tracce di feticismo, per esempio nella sua concezione della forza; e l'estensione generale della superstizione spiritica mostra assai chiaramente che anche la società odierna istruita non ha *ancora* potuto liberarsi dalle concezioni del paganesimo.

Il fatto, che queste idee si conservano sì ostinatamente, è dovuto ad una causa profonda. Dei molti impulsi, che regolano l'uomo con una potenza sì indemoniata, che la nutrono, la conservano e la propagano senza che egli possa conoscerli, di questi impulsi di cui il medio-evo ci presenta un caso straordinariamente patalogico, solo una piccolissima parte di essi è accessibile all'analisi ed alla conoscenza astratta. Il carattere generale di tutti questi impulsi istintivi è un sentimento d'identità e di comunità con tutta la natura, un sentimento che preoccupazioni troppo esclusivamente intellettuali possono far tacere per un certo tempo, ma che non può essero soffocato, e che certamente, si fonda sopra una *base sana*, qualunque siano d'altra parte le assurdità religiose, cui può aver dato origine.

9. Quando vediamo gli enciclopedisti del secolo XVIII° ritenersi assai vicini al loro scopo, che consisteva nella spiegazione fisico-meccanica di tutta la natura, e Laplace immaginare un

genio, che avrebbe potuto presagire lo stato dell'universo in un istante qualunque dell'avvenire, se egli avesse conosciuto in un istante iniziale tutte le masse che lo compongono, con le loro posizioni e le loro velocità, non solo questa sovraestimazione entusiastica della portata delle concezioni fisiche e meccaniche, conseguite nel XVIII° secolo, ci pare assai giustificabile, ma essa è veramente per noi uno spettacolo riconfortante, nobile ed elevato, e possiamo simpatizzare dall'imo del nostro cuore con quella gioia intellettuale unica nella storia.

Ma ora che è trascorso un secolo e siamo divenuti già riflessivi, questa concezione del mondo degli enciclopedisti ci appare come una *mitologia meccanica* in opposizione alla mitologia animica delle antiche religioni. Entrambe contengono amplificazioni abusive ed immaginarie di una conoscenza unilaterale. Ma una ricerca fisica più circospetta condurrà all' analisi delle sensazioni. Allora riconosceremo — ed incominciamo presentemente a farlo — che la nostra sensazione di fame non è essenzialmente diversa dalla tendenza che ha l' acido solforico verso lo zinco, e che la nostra volontà non è così differente dalla pressione che esercita la pietra sul proprio sostegno. Così noi ci sentiremo più prossimi alla natura senza che vi sia il bisogno di scomporci in un' incomprensibile massa nebulosa di molecole, o di fare dell' universo un sistema di aggruppamenti di spiriti. Naturalmente possiamo solo conghietturare la *direzione*, in cui possiamo aspettarci che una ricerca lunga e piena di fatica ci conduca verso la luce. Sarebbe fare della mitologia e non della scienza, se si volesse *anticipare* il risultato o tentare di introdurlo, per quanto in piccola parte, nelle ricerche scientifiche odierne.

La scienza fisica non si presenta con la pretensione di essere una spiegazione *compiuta* del mondo, ma con la *coscienza* di lavorare per una concezione *futura* dell' universo. La più alta filosofia che possa seguire un investigatore scientifico consiste precisamente nel *tollerare* una concezione incompleta, e nel preferirla ad un' altra, in apparenza perfetta, ma insufficiente. Le

opinioni religiose degli uomini rimangono *cose strettamente private*, finchè essi non cercano di imporle agli altri, o di applicarle a questioni, che appartengono ad altri dominii. Gli stessi scienziati hanno a questo riguardo opinioni assai differenti, secondo le profondità delle loro vedute e la loro estimazione del valore delle conseguenze.

La scienza non ricerca affatto ciò, che non è accessibile assolutamente alla esatta investigazione, o non ancora inaccessibile ad essa. Può avvenire che que' campi, che sono ancora chiusi ad essa, si aprano più tardi alla sua attività. Allora nessun uomo di giudizio sano, leale verso sè stesso e verso gli altri, non esiterà un solo istante a cambiare la sua *opinione* sopra una cosa riguardante questo campo con la *conoscenza* di essa.

Quando vediamo la società odierna cambiare spesso di avviso rispetto ad una stessa quistione e modificare il suo punto di vista, secondo le disposizioni e le situazioni del momento, come il registro di un organo, cosa che non possiamo tacere senza un profondo turbamento morale, dobbiamo considerare questo stato di cose come una conseguenza naturale e necessaria di ciò, che la nostra filosofia ha d'incompleto e di transitorio. Una concezione sufficiente del mondo non ci può *essere data*, dobbiamo acquistarcela; e solo lasciando il campo libero alla intelligenza ed alla esperienza là, ove esse debbono decidere da sole, possiamo sperare di avvicinarci, per il bene dell'umanità, all'ideale di una concezione *unitaria* del mondo, che solo è compatibile con la disposizione di uno spirito sanamente costituito.

III. *La meccanica analitica.*

1. La meccanica di Newton è puramente *geometrica.* Egli ricava i suoi teoremi dalle sue ipotesi primitive interamente mediante costruzioni geometriche. Il suo procedimento è spesso così artificiale, come già osservò Laplace, che la scoperta di questi teoremi fatta in tal modo non è verosimile. Inoltre si constata che l'esposizione di Newton non è così candida come quelle di Galileo e di Huygens. Il metodo di Newton, che è quello seguito dagli antichi geometri, chiamasi il metodo *sintetico.*

Quando deduciamo i resultati da ipotesi date, il metodo dicesi *sintetico.* Se inversamente si ricercano le condizioni della esistenza di una proposizione o delle proprietà di una figura, il metodo chiamasi *analitico.* La generalizzazione di questo secondo metodo è in gran parte dovuta all'applicazione dell'algebra alla geometria; per questa ragione usasi ordinariamente chiamare analitico il metodo algebrico. Per essere esatti, ciò che presentemente si chiama meccanica analitica, in opposizione alla meccanica di Newton, si dovrebbe chiamare *meccanica algebrica.*

2. Le basi della meccanica analitica sono state gettate da Eulero (*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita;* Petrop. 1736). Ma mentre il metodo di Eulero nel moto curvilineo decompone tutte le forze in normali e tangenziali, e ricorda così davvicino l'antico metodo geometrico, il processo di Maclaurin (*A complete system of fluxions*, Edinburgo, 1742) segna un importantissimo progresso, decomponendo tutte le forze secondo tre direzioni fisse, e ciò dà ai calcoli una simmetria ed una chiarezza incomparabilmente maggiori.

3. Fu finalmente Lagrange che ha portato al più alto grado di sviluppo la meccanica analitica. Nella sua *Mécanique analytique* (Parigi, 1788) s'industriò a dare, *una volta per sempre*, tutte le dimostrazioni necessarie ed a condensare il maggior numero di cose in una sola formula. Allora si possono trattare tutti i

casi particolari, che si presentano secondo uno schema semplice, simmetrico e chiaro; così rimane solo da fare un lavoro mentale puramente meccanico. La meccanica di Lagrange costituisce una stupendo contributo all'*economia* del pensiero.

Nella statica Lagrange parte dal principio degli spostamenti virtuali. Le forze $P_1, P_2, P_3 \dots$ in numero qualunque sollecitano uno stesso numero di punti materiali $m_1, m_2, m_3 \dots$, che ricevono gli spostamenti infinitamente piccoli $p_1, p_2, p_3 \dots$ compatibili coi legami del sistema. Mettendo da banda il caso eccezionale, in cui l'equazione si trasforma in ineguaglianza, la condizione di equilibrio è:

$$\Sigma P.p = o .$$

Ora riferiamo il sistema a tre assi coordinati ortogonali; siano $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \dots$ le coordinate dei punti materiali; $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots$ le componenti delle forze, e δx_1, $\delta y_1, \delta z_1; \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2; \dots$ le componenti degli spostamenti parallelamente agli assi. Nella determinazione del lavoro bisogna considerare, per ciascuna delle componenti della forza, solo la componente parallela allo spostamento del suo punto di applicazione. Allora il principio viene espresso dalla equazione:

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o; \tag{1}$$

ove il segno Σ indica che bisogna fare la somma dei valori della espressione $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ per ciascun punto del sistema.

Il principio di D'Alembert fornisce l'equazione fondamentale della dinamica. Sopra i punti $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ di masse $m_1, m_2 \dots$ agiscono le forze $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots$ L'effetto dei legami del sistema è di far prendere ai punti le accelerazioni, che sarebbero state comunicate a questi stessi punti *liberi* dalle altre forze: $m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}, m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}, m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}; m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2}, m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2}$,

$m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2}$; . . . Le forze applicate X, Y, Z e le forze effettive $m \frac{d^2x}{dt^2}, m \frac{d^2y}{dt^2}, m \frac{d^2z}{dt^2}$ si fanno equilibrio sul sistema. Allora il principio degli spostamenti virtuali dà:

$$(2) \quad \Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right] = o. \text{ (1)}$$

4. Come si vede, Lagrange, attenendosi all'uso comune, dedusse la dinamica dalla statica; ma questo metodo non era punto *necessario*. Al contrario possiamo, con egual proprietà, partire dal principio che i legami (trascurando le loro deformazioni) non facciano alcun lavoro, vale a dire dal principio secondo il quale tutto il lavoro effettuato possibile provenga da forze applicate. Questo principio si esprime mediante l'equazione (2), la quale allora serve di punto di partenza, e nel caso particolare di equilibrio (o moto di accelerazione nulla) si riduce all'equa-

---

(1) In altre parole: " A causa dei legami esistenti fra i punti del sistema è evidente che le forze applicate ad essi non fanno acquistare a detti punti quelle accelerazioni, che essi avrebbero acquistate se fossero stati liberi; invece esse fanno effettivamente acquistare ai punti del sistema le accelerazioni $\frac{d^2x_1}{dt^2} \ldots; \frac{d^2x_2}{dt^2} \ldots; \frac{d^2x_n}{dt^2} \ldots$; le quali sarebbero poi le accelerazioni che i punti del sistema, supposti bene inteso liberi, acquisterebbero quando fossero sottoposti alle forze $m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \ldots; m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \ldots; m_n \frac{d^2x_n}{dt^2}$ (*). Onde a causa dei legami una parte delle forze agenti $X_1, Y_1, Z_1; \ldots; X_n, Y_n, Z_n$, cioè $X_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \ldots; \ldots; X_n - m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} \ldots$, va perduta, vale a dire le forze: $X_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \ldots; \ldots; X_n - m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} \ldots$ si fanno fra loro equilibrio. Applicando perciò ad esse il principio degli spostamenti virtuali avremo l'equazione (2). *n. d. t.*

(*) Si rammenti che è: Forza: Accelerazione = Massa per definizione; onde si ha: Forza = Massa $\times$ Accelerazione.

zione (1). Questo metodo avrebbe fatto della meccanica analitica un sistema ancora più logico.

L'equazione (1), la quale esprime che nel caso di equilibrio il lavoro elementare corrispondente ad uno spostamento qualunque è nullo, ci offre il mezzo di ottenere facilmente i risultati, che abbiamo già discussi (Cap. I, § VI, n° 11). Se si ha:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz},$$

cioè se X, Y, Z sono le derivate parziali di una stessa funzione V delle coordinate, l'espressione totale sotto il segno Σ è la variazione δV di V. Quindi si ha: $\delta V = o$; onde V è in generale massima o minima.

5. Ora illustreremo l'uso della equazione (1) con un semplice esempio. Se tutti i punti di applicazione delle forze sono *indipendenti* fra loro, il problema *cessa* di esistere. Un punto qualunque è in equilibrio solo se la forza che agisce su esso, e quindi le sue tre componenti sono nulle. Tutte le δx, δy, δz sono intieramente arbitrarie, e l'equazione (1) sussiste in generale solo, se tutti i loro coefficienti sono nulli.

Ma se i punti non possono muoversi indipendentemente gli uni dagli altri, le loro reciproche dipendenze sono espresse dalle equazioni della forma:

$$F(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots) = o;$$

o brevemente: $F = o$. Quindi gli spostamenti sono legati fra loro dalle equazioni come queste:

$$\frac{dF}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dF}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dF}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dF}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dF}{dy_2}\delta y_2 + \frac{dF}{dz_2}\delta z_2 + \ldots = o,$$

che brevemente scriveremo:

$$DF = o.$$

Se n è il numero dei punti del sistema, vi sono $3n$ coordinate, e l'equazione (1) contiene $3n$ spostamenti δx, δy, δz. Ma se fra queste coordinate esistono m equazioni $F = o$, allora esisteranno pure m equazioni della forma $DF = o$ fra le $3n$ variabili δx, δy, δz. Queste equazioni permettono di ottenere m spostamenti in funzione dei $3n - m$ altri spostamenti, e di sostituirli coi loro valori nell'equazione (1). Quest'ultima equazione conterrà dunque ancora $3n - m$ spostamenti arbitrarî, i cui coefficienti occorrerà eguagliarli a zero. Così otteniamo $3n - m$ equazioni fra le forze e le coordinate, cui bisogna aggiungere le m equazioni di condizione $F = o$. Onde si hanno $3n$ equazioni, che sono sufficienti per determinare le $3n$ coordinate della posizione di equilibrio, quando le forze son *date*, e si *domanda* la *forma* di equilibrio del sistema.

Il problema inverso consiste nella determinazione delle forze, che mantengono l'equilibrio del sistema per una data posizione; esso è indeterminato. Si hanno per la determinazione delle $3n$ componenti delle forze solo $3n - m$ equazioni, poichè queste componenti non entrano nelle m equazioni $F = o$.

Prendiamo come esempio una leva $OM = a$ (fig. 229), la quale possa girare intorno all'origine delle coordinate O nel piano XY ed abbia alla sua estremità M una seconda leva $MN = b$. Siano x, y, x_1, y_1 le coordinate di M ed N, ed X, Y, X_1, Y_1 le forze applicate a questi punti. L'equazione (1) diviene:

$$X\delta x + X_1\delta x_1 + Y\delta y + Y_1\delta y_1 = o\,. \tag{3}$$

Esistono due equazioni $F = o$, che sono:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - a^2 = o \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - b^2 = o\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Quindi le condizioni $DF = o$ ci dànno le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} x\delta x + y\delta y = o \\ (x_1 - x)\,\delta x_1 - (x_1 - x)\,\delta x + (y_1 - y)\,\delta y_1 - (y_1 - y)\,\delta y = o\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Quest'ultime equazioni forniscono il mezzo di esprimere due delle variazioni in funzione delle altre due, le quali allora si sostituiranno nella equazione (3). Per fare questa eliminazione Lagrange ha impiegato un processo perfettamente uniforme e sistematico, che si può seguire macchinalmente senza alcun lavoro della mente. Ora noi impiegheremo questo metodo. Esso consiste nel moltiplicare ciascuna equazione (5) per un coefficiente indeterminato λ, μ, e poi sommare queste equazioni con l'equazione (3). Così otteniamo:

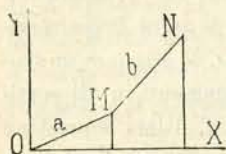



Fig. 229.

$$[X + \lambda x - \mu (x_1 - x)]\,\delta x + [X_1 + \mu (x_1 - x)]\,\delta x_1 +$$

$$+ [Y + \lambda y - \mu (y_1 - y)]\,\delta y + [Y_1 + \mu (y_1 - y)]\,\delta y_1 = o\,.$$

Ora possiamo eguagliare a zero i coefficienti dei quattro spostamenti, poichè due di essi sono arbitrarî, e si possono scegliere convenientemente le indeterminate λ e μ, cioè in modo che si annullino anche i coefficienti degli altri due; ciò che d'altra parte equivale ad eliminare questi due ultimi spostamenti. Quindi si hanno le quattro equazioni:

$$(6)\qquad \begin{cases} X + \lambda x - \mu (x_1 - x) = o\,, \\ X_1 \qquad + \mu (x_1 - x) = o\,, \\ Y + \lambda y - \mu (y_1 - y) = o\,, \\ Y_1 \qquad + \mu (y_1 - y) = o\,. \end{cases}$$

Innanzi tutto supponiamo che *siano date* le coordinate, e si domandino le *forze*, che mantengono il sistema in equilibrio. Allora dalla 5ª e dalla 4ª equazione si ottiene:

$$\mu = \frac{-X_1}{x_1 - x} \quad , \quad \mu = \frac{-Y_1}{y_1 - y}\,;$$

da cui ho:

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{x_1 - x}{y_1 - y}\,; \tag{7}$$

quindi la forza applicata in N ha la direzione MN. Dalla 1ª e dalla 2ª equazione si ricava d'altronde:

$$\lambda = \frac{-X + \mu(x_1 - x)}{x}\ ,\quad \lambda = \frac{-Y + \mu(y_1 - y)}{y}\,;$$

da cui si ottiene facilmente:

$$\frac{X + X_1}{Y + Y_1} = \frac{x}{y}\,; \tag{8}$$

quindi la risultante delle forze applicate in M ed N ha la direzione di OM (1).

Quindi le quattro componenti sono soggette solo alle *due* condizioni (7) ed (8). Il problema è indeterminato; ciò che del resto è evidente *a priori,* poichè il valore assoluto delle com-

---

(1) La interpretazione meccanica di questi coefficienti indeterminati λ e μ si può mostrare in questo modo. Le equazioni (6) esprimono le condizioni di equilibrio di due punti *liberi*, su cui, oltre le forze X, Y, X_1, Y_1, agiscono altre forze, che sono rappresentate dagli altri termini dei primi membri di questa equazione e distruggono le componenti X, Y, X_1, Y_1. Ad esempio il punto N è in equilibrio, se X_1, Y_1 sono rispettivamente distrutte dalle componenti $u(x_1 - x)$ e $\mu(y_1 - y)$ di una forza d'intensità ancora *indeterminata*. Questa forza ausiliaria è prodotta dal legame e può essere sostituita; la sua direzione è determinata. Indicando con a l'angolo che essa fa con l'asse delle ascisse si ha:

$$\text{tang}\ a = \frac{\mu(y_1 - y)}{\mu(x_1 - x)} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\,.$$

Quindi la forza dovuta ai legami agisce secondo la direzione di b.

ponenti non ha alcun effetto sull'equilibrio, ma soltanto sulle loro direzioni e relazioni.

In secondo luogo supponiamo che le *forze* siano date e si domandino le *coordinate*. Partiremo ancora dalle equazioni (6), cui bisogna aggiungere le due equazioni (4). Dopo l'eliminazione di λ e μ, rimangono le due equazioni (7) e (8) e le equazioni (4). Allora facilmente si ottiene:

$$x = \frac{a(X+X_1)}{\sqrt{(X+X_1)^2+(Y+Y_1)^2}},$$

$$y = \frac{a(Y+Y_1)}{\sqrt{(X+X_1)^2+(Y+Y_1)^2}},$$

$$x_1 = \frac{a(X+X_1)}{\sqrt{(X+X_1)^2+(Y+Y_1)^2}} + \frac{bX_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},$$

$$y_1 = \frac{a(Y+Y_1)}{\sqrt{(X+X_1)^2+(Y+Y_1)^2}} + \frac{bY_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}.$$

Queste formule risolvono il problema. Per quanto sia semplice questo esempio, tuttavia è sufficiente per dare una idea chiara del genere e del significato del metodo di Lagrange. Il meccanismo della soluzione è stabilito una volta per sempre; e, applicandolo ad un caso speciale qualunque, è quasi inutile di riflettervi ancora. L'esempio che abbiam dato è così elementare, che si poteva risolvere con la semplice ispezione della figura; così si ha nell'applicazione del metodo il vantaggio di un controllo facile.

6. Ora noi spiegheremo ancora con un esempio l'uso dell'equazione (2), che esprime il principio di D'Alembert sotto la forma che gli ha dato Lagrange. Anche qui non si ha alcun problema, se le masse sono fra loro indipendenti; ciascuna di esse segue la forza che le è applicata; le variazioni δx, δy z sono totalmente arbitrárie, e ciascun coefficiente si può separatamente egua-

gliare a zero. Così il moto di n masse è determinato da $3n$ equazioni differenziali simultanee.

Se esistono fra le coordinate equazioni di condizione $F = o$, esse condurranno alle equazioni $DF = o$ fra gli spostamenti o variazioni, con cui si procederà esattamente come si è fatto nell'applicazione dell'equazione (1). È d'uopo osservare che si deve far uso delle equazioni $F = o$ tanto sotto la loro forma finita, quanto sotto la loro forma differenziata, come si vedrà bene nell'esempio che segue.

Un punto materiale di massa m si può muovere sopra una retta $y = ax$ posta in un piano verticale XY (fig. 230) ed inclinata sull'orizzonte; se ne domanda il moto. L'equazione (2) in questo caso diviene:

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = o;$$

e poichè è: $X = o$ e $Y = -mg$, avremo:

$$\frac{d^2y}{dt^2}\delta x + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = o. \tag{9}$$

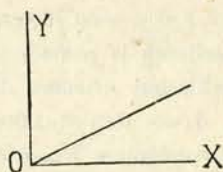



Fig. 230.

L'equazione $F = o$ qui è:

$$y = ax; \tag{10}$$

che dà per equazione $DF = o$ la:

$$\delta y = a\delta x.$$

Eliminando δy dall'equazione (9), essendo δx arbitraria, si ha:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right).a = o;$$

ma derivando la (10) due volte si ha:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2x}{dt^2};$$

e quindi:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a\left(g + a\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = o. \tag{11}$$

L'integrazione di questa equazione dà:

$$x = \frac{-a}{1+a^2} \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} + b \cdot t + c,$$

$$y = \frac{-a^2}{1+a^2} \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} + abt + ac,$$

ove b e c sono le costanti d'integrazione, che si determinano mediante la posizione e la velocità iniziale del punto m. Sarebbe facilissimo ottenere direttamente questo risultato.

L'uso dell'equazione (1) richiede alcune precauzioni, quando la condizione $F = o$ contiene il tempo. Per comprendere la via da seguire in questo caso, si riprenda l'esempio precedente supponendo che la retta sia animata da un moto verticale di traslazione verso l'alto, con l'accelerazione γ. Partiremo ancora dalla equazione (9):

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y = o.$$

L'equazione $F = o$ diviene:

$$y = ay + \gamma\frac{t^2}{2} \cdot \tag{12}$$

Per formare $DF = o$ si prenda la variazione della (12) rispetto solo ad x ed y, poichè qui si tratta degli spostamenti *possibili* in una conformazione *in ogni istante dato* del sistema, e non

degli spostamenti, che si producono *realmente* nel tempo. Quindi si porrà come nel caso precedente:

$$\delta y = a \delta x \, ;$$

e si ottiene come prima:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \frac{d^2x}{dt^2}\right) . a = o \, . \tag{13}$$

Ma qui la relazione fra x ed y è quella che dà il moto *reale*. Per ottenere un'equazione solo in x, bisogna differenziare la (12) rispetto a t, e così abbiamo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \, ,$$

poi sostituire nella (13), che diviene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \gamma + a \frac{d^2x}{dt^2}\right) a = o \quad ;$$

ed integrando si ha:

$$x = \frac{-a}{1+a^2} (g + \nu) \frac{t^2}{2} + bt + c \, ,$$

$$y = \left[\gamma - \frac{a}{1+a^2} (g + \gamma)\right] . \frac{t^2}{2} + abt + ac.$$

Se la massa m, che giace sulla retta in moto, fosse senza peso, si avrebbe:

$$x = \frac{-a}{1+a^2} . \gamma . \frac{t^2}{2} + bt + c \, ,$$

$$x = \frac{1}{1+a^2} . \gamma . \frac{t^2}{2} + a . b . t + c \, ,$$

risultati che facilmente si potrebbero ottenere, considerando che la massa m si comporta sulla retta, animata dell'accelerazione γ verso l'alto, come se essa fosse animata dell'accelerazione γ verso il basso sulla retta immobile.

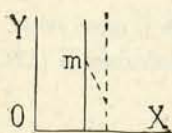
7. Le considerazioni seguenti permetteranno di comprendere meglio ancora il procedimento di utilizzare l'equazione (12) negli esempi precedenti. L'equazione (2), che non è altro che il principio di D'Alembert, esprime che tutto il *lavoro* possibile, per uno spostamento dato qualunque, proviene dalle forze applicate e non dai legami del sistema. Ma ciò non è vero se non quando si faccia astrazione dei cambiamenti dei legami nel *tempo*. Quando i legami variano col tempo, essi fanno un lavoro. Allora si può applicare l'equazione (2) agli spostamenti effettivi solo a condizione che si computino fra le forze applicate quelle che producono i cambiamenti dei legami.

Y m 0 X

Fig. 231.

Sia m una massa mobile sopra una retta parallela ad OY (fig. 231); supponiamo che la posizione di questa retta cambi col tempo, e sia:

$$x = \gamma \frac{t^2}{2} \quad , \quad (\mathrm{F} = o)\,, \tag{14}$$

la sua equazione. Il principio di D'Alembert dà ancora l'equazione (9); ma $\mathrm{DF} = o$ dà qui $\delta x = o$, e l'equazione (9) si riduce a:

$$\left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = o\,; \tag{15}$$

da cui, poichè δy è arbitrario, ho:

$$g + \frac{d^2y}{dt^2} = o$$

$$y = -g\frac{t^2}{2} + at + b\,;$$

alla quale bisogna aggiungere l'equazione (14) per avere il valore di x:

$$x = \gamma \frac{t^2}{2}\,.$$

È evidente che l'equazione (15) non dà tutto il lavoro fatto in uno spostamento *realmente* compiuto nel tempo; ma solo quello di qualche *possibile* spostamento sulla retta supposta per un istante come fissa.

Immaginiamo la retta senza massa, che si muova parallelamente a se stessa mediante la forza $m\gamma$; si ottiene invece della (2) l'equazione:

$$\left(m\gamma - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(- mg - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = o\,;$$

da cui essendo δx, δy totalmente arbitrarie, otteniamo le due equazioni:

$$\gamma - \frac{d^2x}{dt^2} = o\,,$$

$$-g - \frac{d^2y}{dt^2} = o\,,$$

che dànno i risultati suesposti. La *differenza* apparente, che si trova nel metodo di trattare i problemi come questo, deriva da una lieve inconseguenza, che consiste di non tenere al principio egualmente conto di tutte le forze che si hanno, ma di considerarne una parte come *supplementare*, tanto per rendere più facile il calcolo.

8. Siccome i diversi principii della meccanica esprimono solo gli aspetti differenti degli stessi fatti, si può facilmente dedurre gli uni dagli altri; per darne un esempio, ricaveremo il principio delle forze vive dall'equazione (2) precedente. Quest'ultima contiene solo gli spostamenti istantanei possibili (virtuali); ma quando i legami sono indipendenti dal tempo, gli spostamenti reali sono pure essi virtuali e ad essi si può applicare il principio. Quindi allora possiamo sostituire ai δx, δy, δz gli spostamenti reali dx, dy, dz e scrivere:

$$\Sigma(\mathrm{X}dy + \mathrm{Y}dy = \mathrm{Z}dz) = m\,\Sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)\cdot$$

Indichiamo con v la velocità; sostituendo a dx la $\frac{dx}{dt}.dt$ ecc., il secondo membro dà:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}.dt+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}.dt+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}.dt\right)=$$

$$d\Sigma m\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\,d\Sigma mv^2;$$

da cui integrando si ha:

$$\int\Sigma\,(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)=\Sigma\,\frac{1}{2}\,m\,(v^2-v_0^2),$$

ove v e v_0 sono rispettivamente le velocità iniziale e finale. Si può sempre trovare il valore dell'integrale del primo membro, se le condizioni del problema permettono di ricondurre tutte le variabili ad una sola; così ad esempio quando si conosce il corso del moto in funzione del tempo, ovvero le traiettorie dei punti mobili. Questa riduzione è inutile, quando X, Y, Z sono le derivate parziali di una stessa funzione U delle coordinate:

$$\mathrm{X}=\frac{d\mathrm{U}}{dx}\;,\quad \mathrm{Y}=\frac{d\mathrm{U}}{dy}\;,\quad \mathrm{Z}=\frac{d\mathrm{U}}{dz}\;;$$

come è sempre il caso quando le forze sono solo centrali. Il primo membro allora è un differenziale esatto, e si ha:

$$\Sigma(\mathrm{U}-\mathrm{U}_0)=\frac{1}{2}\,\Sigma m\,(v^2-v_0^2),$$

cioè la differenza dei valori della funzione di forze all'inizio ed alla fine del moto è uguale alla differenza corrispondente delle

forze vive. Quindi queste ultime allora sono anche funzioni delle coordinate.

Abbiasi per esempio un corpo mobile nel piano XY con $X = -y$, $Y = -x$; si avrà:

$$\int (-y dx - x dy) = -\int d(xy) = x_0 y_0 - x_1 y_1 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Ma per $X = -a$, $Y = -x$, l'integrale del primo membro diviene: $\int (a dx + x dy)$. Questo integrale lo si può ottenere se si conosce la traiettoria del punto, cioè se y è dato in funzione di x. Se, ad esempio, $y = px^2$, esso dà:

$$-\int (a + 2px^2)\, dx = a(x_0 - x) + \frac{2p(x^3_0 - x^3)^3}{3}.$$

La differenza fra i due casi è questa: nel *primo* caso il lavoro è semplicemente funzione delle coordinate, vi è una funzione di forze, il lavoro elementare è un differenziale esatto, il lavoro è *dato* dai valori *iniziali* e *finali* delle coordinate del punto; nel *secondo* caso il lavoro dipende dall'intiera traiettoria del punto mobile.

9. Questi semplici esempî, che in se stessi non presentano difficoltà alcuna, bastano per illustrare la natura generale delle operazioni della meccanica analitica. Non bisogna attendersi da questa meccanica nuovi schiarimenti del *principio* sulla natura dei fenomeni meccanici. Al contrario la conoscenza dei principii deve essere essenzialmente completata prima che possiamo pensare alla formazione di una meccanica analitica, il cui unico scopo consiste nella *padronanza* pratica più semplice di tutti i problemi che si possono incontrare. Chi non riconosce questa situazione, non potrebbe comprendere l'importante contributo di Lagrange, che è essenzialmente *economico*. Poinsot non ha intieramente evitato questo errore.

10. È necessario aggiungere che i lavori di Möbius, di Hamilton, di Grassmann e di altri preparano una nuova trasfor-

mazione della meccanica. Questi investigatori hanno sviluppato concetti matematici, che si adattano alle rappresentazioni geometriche in modo più esatto e più immediato dei concetti della geometria analitica ordinaria. I vantaggi della geometria analitica e della intuizione geometrica sono così riuniti; ma questa trasformazione si trova evidentemente ancora al di fuori dei limiti di una esposizione storica.

L'*Ausdehnungslehre* (algebra non commutativa) del 1844, nella quale Grassmann espose per la prima volta le sue idee, è importante sotto molti punti di vista. L'introduzione contiene interessantissime osservazioni sulla teoria della conoscenza. L'*Ausdehnungslehre* è svolta come una scienza generale, di cui la geometria non è altro che un caso particolare a tre dimensioni; e ciò fornisce all'autore il modo di rifare la critica dei principii di quest'ultima scienza. I concetti nuovi e fecondi della somma dei segmenti, del prodotto dei segmenti, ecc., sono anche applicabili alla meccanica. Grassmann fa anche la critica dei principii di Newton e crede di poterli ridurre ad una espressione *unica*: "Die Gesammtkraft (oder die Gesammtbewegung), die einem Verein von materiellen Theilchen zu irgend einer Zeit einwohnt, ist die Summe aus der Gesammtkraft (oder der Gesammtbewegung), die ihm zu irgend einer früheren Zeit einwohnt, und den sämmtlichen Kräften, die ihm in der Zwischenzeit von aussen mitgetheilt sind; wenn nämlich alle Kräfte als Strecken aufgefasst werden von constanter Richtung und Länge, und auf an Masse gleiche Punkte bezogen werden.... „. Ecco la traduzione: "La forza complessiva (o il moto complessivo), che è inerente ad un aggregato di molecole materiali in un istante qualunque, e la somma della forza complessiva (o del moto complessivo), che gli è inerente ad un istante anteriore qualunque, e dell'insieme delle forze che gli sono, nell'intervallo, comunicate dall'esterno, supposto che tutte le forze siano date come segmenti di direzione e di lunghezza costanti, e che siano riferite a punti di masse eguali . . . „. Grassmann qui intende per forze le velocità indistruttibili impresse alle molecole considerate. Questa

concezione è intieramente assai prossima a quella di Hertz. Le forze (velocità) si rappresentano con segmenti, i momenti con le aree contate in direzioni determinate, ecc.; e con ciò ogni sviluppo riesce assai comprensibile e conciso. Grassmann per altro considera che il vantaggio principale del suo metodo consiste nel fatto, che il calcolo è in ciascun istante l'espressione genuina del processo mentale, mentre questo è lasciato compiutamente da banda dal metodo ordinario delle coordinate cartesiane. La differenza fra l'analisi e la sintesi da capo scompare, e così si trovano riuniti i vantaggi dei due metodi. L'applicazione del metodo analogo di Hamilton, fatta più indietro a un esempio (cap. II, § II, n. 5) offre il mezzo di farci un'idea adeguata di questo vantaggio.

IV. *La scienza come economia del pensiero.*

1. Ogni scienza si propone di sostituire e di *risparmiare* le esperienze mediante la copia e la rappresentazione dei fatti nel pensiero. Questa rappresentazione invero è più maneggevole della esperienza stessa, e può, sotto molti rapporti, esserle sostituita. Questa funzione di *economia*, che compenetra tutto l'essere della scienza, si manifesta già chiaramente anche in un esame generale. Il riconoscimento di questo carattere di risparmio fa nello stesso tempo scomparire ogni misticismo dal campo scientifico. La comunicazione della scienza mediante l'insegnamento ha per iscopo di risparmiare certe esperienze ad un individuo, trasmettendogli quelle di un'altra persona; e così le esperienze di intiere generazioni vengono trasmesse ad intere generazioni successive per mezzo di libri raccolti nelle biblioteche e così sono risparmiate ad esse. La lingua, che è il mezzo di questa comunicazione, costituisce naturalmente anche un fattore di risparmio. Le esperienze sono più o meno perfettamente scomposte in elementi più semplici e più famigliari, ed in seguito *simbolizzate* a scopo di comunicazione, ma

sempre sacrificando la precisione fino ad un certo punto. Il simbolismo del linguaggio articolato è puramente nazionale e senza dubbio esso rimarrà per molto tempo ancora così. La lingua scritta si avvicina gradatamente all'ideale di una scrittura universale; essa non è più una semplice trascrizione della lingua parlata. Le cifre, i segni algebrici e matematici, i simboli chimici, la notazione musicale, la scrittura fonetica (di Brücke), tutti questi simboli, di una natura già assai astratta e di un uso quasi intieramente internazionale, devono in sostanza essere considerati come parti attualmente esistenti di questa scrittura universale. L'analisi dei colori è stata fisicamente e fisiologicamente spinta così innanzi, che un sistema internazionale esatto dinotazioni per i colori fisici e le sensazioni di colore non presenta più le difficoltà di principio.

Infine la scrittura cinese è veramente ideografica; popoli diversissimi la comprendono nello stesso senso e la leggono nelle lingue parlate differentissime; un sistema di segni più semplice potrebbe far sì che la scrittura cinese divenisse universale. La semplificazione della grammatica mediante la soppressione di ciò, che essa contiene di convenzionale o di regole dovute a circostanze storiche accidentali, e la riduzione delle forme a ciò, che è indispensabile, cose quasi realizzate dalla lingua inglese, devono evidentemente precedere la fondazione di una lingua scritta universale. Un tal sistema avrebbe d'altra parte altri vantaggi oltre la sua universalità: la *lettura* di uno scritto sarebbe inseparabile dalla sua *comprensione*. I nostri figli leggono spesso cose, che essi non comprendono; un chinese può leggere solo ciò, che comprende.

2. Quando facciamo nel pensiero la riproduzione di fatti, noi non possiamo riprodurli *compiutamente*, ma solo riproduciamo quell'aspetto di essi, che ci è parso più *importante*, guidati in ciò direttamente od indirettamente da un interesse pratico. Le nostre riproduzioni sono sempre astrazioni invariabili; ed anche qui possiamo constatare una tendenza alla economia.

La natura è composta degli elementi dati dai sensi. L'uomo primitivo innanzi tutto sceglie certi complessi di questi elementi,— quelli che si presentano a lui con una certa stabilità relativa ed hanno per lui maggiore importanza. Le prime e più antiche parole sono i nomi di “ cose „, e in questa mera designazione si riconoscerebbe già un'astrazione da tutto ciò che circonda quelle cose e dai lievi cambiamenti continui subìti da questi complessi, i quali, essendo meno importanti, non sono osservati. Nella natura non avvi cosa alcuna invariabile. Una cosa è un'astrazione; un nome è un simbolo per un *complesso* di elementi, di cui non si considera il cambiamento. Indichiamo l' intiero complesso con *una* parola, con un *unico* simbolo, quando si ha bisogno di richiamare ad un tempo tutte le impressioni, che la compongono. Più tardi, giunti ad un grado superiore, richiamiamo la nostra attenzione su questi cambiamenti, e quindi diviene naturalmente impossibile di conservare ad un tempo il concetto d' invariabilità, per poco che non si voglia giungere a nozioni vacue e contradditorie, come quella della “ cosa in sè „. Le sensazioni non sono “ simboli di cose „. La “ cosa „ è invece un simbolo mentale per un complesso di sensazioni di una stabilità relativa. I veri *elementi* del mondo non sono le cose (gli oggetti, i corpi), ma bensì i colori, i suoni, le pressioni, gli spazi, le durate (ciò che comunemente diciamo sensazioni).

Lo scopo dell' intiera operazione è puramente quello di economizzare. Incominciamo la rappresentazione dei fatti mediante i complessi comuni e famigliari più durevoli; e dopo avere fatto questa rappresentazione la completiamo correggendo i complessi non comuni. Ad esempio: si parlerà di un cilindro perforato o di un cubo a spigoli smussati; queste espressioni prese alla lettera implicano per tanto contraddizione, se non si accetta il modo di vedere qui esposto. Qualunque *giudizio* è un'amplificazione od una correzione di una rappresentazione anteriore.

3. Quando parliamo di cause e di effetti, noi arbitrariamente facciamo risaltare nella rappresentazione mentale di un fatto, quegli elementi dei quali a noi importa osservare la connessione.

Nella natura non avvi nè cause, nè effetti; la natura ha solo una esistenza individuale; la natura semplicemente *è*. Le ripetizioni di casi simili, in cui A è sempre connesso a B, cioè le conseguenze identiche di circostanze identiche, nelle quali consiste precipuamente l'essenziale della relazione di causa ed effetto, esistono solo nell'astrazione, che impieghiamo a scopo di riprodurre i fatti nel pensiero. Quando una cosa ci è divenuta famigliare, non sentiamo più il bisogno di porre in evidenza la connessione delle caratteristiche, non dirigiamo più la nostra attenzione su ciò, che si verificherà di nuovo; allora non parliamo più nè di cause, nè di effetti. Così diciamo in principio che il calore è la causa della forza espansiva del vapore; quando questa relazione ci è divenuta famigliare, rappresenteremo ad un tempo il vapore con la sua temperatura e la sua tensione corrispondenti. Similmente ci rappresenteremo subito l'acido come la causa, che fa divenir rossa la tintura di tornasole; in seguito questo cambiamento di colore sarà messo fra le proprietà dell'acido.

Hume fu il primo a porre la questione: Come può una cosa A agire sopra un'altra B? Hume non riconosceva alcuna causalità, ma semplicemente una successione nel tempo, che per noi è divenuto abituale e *famigliare*. Kant giustamente osservò che la semplice osservazione non può insegnarci la *necessità* della connessione di A e di B. Egli suppone un'idea innata, in cui è compreso ogni caso fornito dall'esperienza. Schopenhauer, che in sostanza adotta lo stesso modo di vedere, distingue quattro forme del " principio della ragione sufficiente „ — la forma logica, la forma fisica, la forma matematica ed infine la legge di motivazione. Ma queste forme differiscono solo per la *materia*, cui esse si applicano la quale in parte appartiene all'esperienza *esterna* ed in parte all'esperienza *interna*.

La spiegazione naturale e più semplice sembra apparentemente questa: i concetti causa ed effetto nascono innanzi tutto da uno sforzo che si fa per riprodurre i fatti. Primieramente la connessione di A e B, di C e D, di E ed F ecc. si presenta

come abituale. Ma se poi, quando possediamo già molte esperienze, osserviamo un legame fra M ed N, spesso si verificherà che riconosceremo M come composto di A, C, E; ed N come composto di B, D, F, i cui legami già ci sono famigliari, e ci sembra che posseggano una più alta autorità. La nuova esperienza si illustra mediante tutte le altre più antiche. Onde avvi così un' " idea ", in cui è contenuta ogni esperienza nuova, ma essa è sviluppata mediante l' esperienza stessa. L' idea della *necessità* della connesione fra causa ed effetto probabilmente deriva dal nostro moto *volontario* e dai cambiamenti, che produciamo indirettamente con questo movimento, come Hume l' ha asserito, ma senza tuttavia averlo sostenuto. L'autorità dei concetti di causa ed effetto è potentemente rafforzata dal fatto, che essi si sono sviluppati *istintivamente* ed involontariamente, e dal fatto che sentiamo distintamente di non avere in nulla noi stessi contribuito alla loro formazione. Inoltre si può dire che il sentimento di causalità non è stato acquistato dall' individuo, ma si è formato durante lo sviluppo della specie. Quindi causa ed effetto sono astrazioni, il cui ufficio consiste nell'economizzare il lavoro mentale. Alla domanda: *perchè* esse si formano? è impossibile di rispondere, poichè è precisamente mediante l' astrazione delle uniformità, che impariamo a domandarci " perchè ".

4. Quando si considerano i particolari della scienza, il suo carattere di economia è ancora più appariscente. Le scienze, che diconsi descrittive debbono limitarsi quasi alla descrizione dei fatti particolari. Quando la cosa è possibile, i caratteri comuni a più fenomeni sono una volta per sempre messi in rilievo. Per quelle scienze, che hanno raggiunto un più alto grado di sviluppo, le regole di ricostruzione di un gran numero di fatti si possono comprendere in un'*unica* espressione. Invece, per esempio, di numerare uno ad uno i diversi casi di rifrazione della luce, possiamo riprodurli e prevederli tutti, quando si sappia che il raggio incidente, il raggio di riflessione e la normale siano

in uno stesso piano e che sia $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} = n$. Invece di tener conto degli innumerevoli fenomeni di rifrazione nei diversi mezzi e sotto angoli differenti, allora si ha solo da osservare il valore n, tenendo conto delle relazioni suesposte, e ciò è assai più facile. Qui la tendenza alla economia è evidente. Nella natura non esiste d'altra parte alcuna *legge* di rifrazione, ma solo molti casi di questo fenomeno. La legge di rifrazione è un metodo di ricostruzione conciso, riassuntivo, fatto per *nostro uso* ed inoltre *unicamente* riguardante il lato geometrico del fenomeno.

5. Le scienze, nelle quali è maggiormente sviluppata la caratteristica dell'economia, son quelle che si occupano di quei fenomeni che son decomponibili in un piccolo numero di elementi tutti valutabili numericamente, come ad esempio la meccanica, che considera solo gli spazî, i tempi e le masse. Queste scienze usufruiscono di tutta l'economia delle matematiche. La matematica è una economia nel calcolare. I numeri sono segni di ordinamento; essi stessi sono raggruppati in un sistema semplice a scopo di concisione e di risparmio. Le operazioni sui numeri sono riconosciute indipendenti dalla natura degli oggetti; esse si apprendono una volta per sempre. La prima volta, che si debbono addizionare 7 oggetti a 5 altri oggetti della stessa specie, si conta l'insieme totale di essi; ma si osserva poi che si può fare tale enumerazione a partire da 5 e contare 7; infine in seguito a parecchie ripetizioni consimili si vede che possiamo intieramente risparmiarci l'enumerazione, e dire anticipatamente il suo *risultato* come già noto.

Tutte le operazioni di calcolo hanno per iscopo di *risparmiare* il contar diretto e di sostituirgli il risultato di processi di enumerazioni precedentemente fatte. Non vogliamo ricominciare la stessa operazione più spesso che non sia necessario. Già le quattro regole dell'aritmetica forniscono numerose prove dell'esattezza di questa concezione. Ritroviamo la stessa tendenza nell'algebra, in cui sono esposte una volta per sempre le opera-

zioni della *stessa forma,* che si possono eseguire indipendentemente dal valore dei numeri. Così ad esempio l'eguaglianza:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y ,$$

ci insegna che in tutti i casi futuri, qualunque siano i numeri x ed y, si potrà sostituire l'operazione semplice del 2° membro all' operazione complicata del 1° membro. Perciò risparmiamo di eseguire l'operazione complicata in tutti i casi futuri. La matematica è il metodo col quale si sostituiscono, quando è possibile, e nel modo *più economico,* le *nuove* operazioni sui numeri mediante altre precedentemente eseguite e che quindi è inutile di ricominciare. In questo processo può accadere di servirsi di risultati di operazioni eseguite secoli prima.

Calcoli mentali difficili possono spesso essere utilmente sostituiti da calcoli mentali eseguiti in un modo meccanico. Così, ad esempio, la teoria dei determinanti deve la sua origine all'osservazione, cioè che è inutile di ricominciare ogni volta di nuovo la risoluzione delle equazioni lineari:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= o \\ a^2 x + b^2 y + c^2 &= o , \end{aligned}$$

che dànno:

$$x = - \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = - \frac{\text{P}}{\text{N}} , \; y = - \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = - \frac{\text{Q}}{\text{N}} ;$$

ma questa soluzione si può subito ottenere mediante i coefficienti, purchè si scrivano secondo uno schema determinato, su cui si opererà in modo *meccanico,* così:

$$\text{N} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{P} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{Q} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

Nelle operazioni matematiche lo spirito può anche essere liberato da *ogni* lavoro; perciò basta *simbolizzare* mediante segni di operazione meccanica ogni operazione, che sia stata una volta precedentemente eseguita; e ciò risparmia la funzione cerebrale per i problemi più importanti, invece di prodigarla ai casi, che non sono altro che una ripetizione. Il mercante adopera un simile processo di risparmio, quando invece di prendere direttamente il danaro nella sua cassa, si serve di buoni di cassa. Il lavoro manuale del calcolatore si può anche sopprimere mediante l'uso di macchine calcolatrici, parecchie delle quali sono già usate comunemente. Le idee che ora abbiamo esposto furono già, all' inizio del secolo XIX, assai chiaramente comprese dal matematico Babbage, inventore di una di queste macchine (1).

Un risultato numerico non richiede sempre un calcolo *reale*; vi si può giungere indirettamente. Ad esempio si vede facilmente che, per una curva, la cui area limitata all' ordinata di ascissa x è x^m, un incremento $mx^{m-1}\,dx$ dell'area corrisponde ad un incremento dx dell'ascissa. Allora si sa anche che

$$\int m\,x^{m-1}\,d\,x = x^m,$$

cioè si riconosce che la grandezza x^m appartiene all'incremento $m\,x^{m-1}\,d\,x$, precisamente come si riconosce l'albero dalla sua corteccia. In matematica ci serviamo molto di questi risultati analoghi, accidentalmente trovati per *inversione*.

Può sembrare strano che un lavoro scientifico compiuto da lungo tempo si possa costantemente usare di nuovo, mentre non avviene in questo modo per il lavoro meccanico. Quando un uomo, che tutti i dì deve fare una certa via, ne trova per caso una più corta, che fa da qui innanzi, si risparmia infatti, mediante il ricordo che ne conserva, una parte del lavoro; solo il ricordo non è un lavoro propriamente detto, ma una *libe-*

---

(1) Anche, come si sa, Pascal aveva inventata una macchina per calcolare *n. d. t.*

razione di un certo lavoro. Le cose avvengono esattamente nello stesso modo nell'uso dei concetti scientifici.

Chi studia matematiche, senza cercarne la comprensione nel modo indicato, deve spesso risentire l'impressione sgradevole che la penna e la carta siano più intelligenti di lui. Le matematiche, intese a questo modo come ramo d'insegnamento, sono appena più istruttive dello studio della Cabala o dei quadri magici; e devono necessariamente conferire allo spirito una tendenza mistica, i cui effetti si faranno eventualmente sentire.

6. Anche le scienze fisiche offrono esempî di economia del pensiero intieramente simili a quelli già considerati. Basterà indicarne brevemente qualcuno. Il concetto di momento d'inerzia ci risparmia la considerazione delle masse parziali. Mediante il concetto di funzione delle forze risparmiamo la fatica di ricercare quali siano le componenti delle forze; la semplicità delle dimostrazioni, che si fonduno sull'uso di questa funzione, è dovuta al fatto che un gran numero di dimostrazioni dovette precedere la scoperta delle sue proprietà. La diottrica di Gauss ci risparmia lo studio delle superficie rifrangenti particolari di un sistema diottrico e sostituisce adesso la considerazione dei fochi principali e dei punti nodali; lo studio di queste superficie ha tuttavia dovuto necessariamente precedere la scoperta di questi punti notevoli; la diottrica di Gauss ci *risparmia* solo la *ripetizione* di tale studio.

Dunque si deve dire che non esiste risultato scientifico, che possa essere stato ottenuto da principio senza l'aiuto di alcun metodo. Ma a causa della breve durata della vita e dei limiti ristretti delle nostre facoltà intellettuali, una sapienza, degna veramente di questo nome, può solo essere acquistata mediante la *più grande* economia mentale. La scienza stessa si può perciò considerare come un problema di minimo, che consiste nell'esporre i fatti per quanto perfettamente è possibile con il *minor dispendio intellettuale.*

7. Secondo noi ogni scienza ha la missione di sostituire l'esperienza. Onde essa deve, a questo scopo, da una parte

rimanere sempre nel dominio dell'esperienza, e dall'altra uscirne, aspettandosi sempre da questa una conferma od un'infirmazione. Ove non è possibile di confermare o d'infirmare, la scienza non può far nulla. Essa agisce ed agisce solamente nel dominio dell'esperienza *incompleta*. Come esempî di questa tendenza della scienza si può citare la teoria della elasticità e quella della conducibilità del calore; entrambe attribuiscono alle più piccole particelle dei corpi solo le proprietà direttamente osservabili sui corpi di volume maggiore. Il confronto fra la teoria e l'esperienza si può sempre spingere più innanzi mediante il perfezionamento dei processi di osservazione.

L'esperienza isolata senza le idee, che l'accompagnano, ci rimarrebbe per sempre estranea. Le idee *più scientifiche* sono quelle, che rimangono valide nel dominio *più esteso*, e completano ed arricchiscono *di più* l'esperienza. Nella ricerca si procede mediante il principio di *continuità;* poichè esso solo può darci una concezione utile ed economica dell'esperienza.

8. Si può direttamente osservare le oscillazioni di una lunga verga elastica, fissa ad un'estremità; possiamo vederle, toccarle, rappresentarle graficamente ecc. Per una verga più corta le oscillazioni sono più rapide e non si possono più vedere direttamente; la verga dà un'immagine confusa, che è una esperienza nuova. Solo la sensazione del tatto rimane ancora simile alla precedente; noi possiamo far descrivere alla verga il diagramma del suo movimento, e attenendoci alla *rappresentazione* grafica delle oscillazioni, prevedere il risultato dell'esperienza. Per una verga ancora più corta si modifica anche la sensazione del tatto. Ora la verga emette un suono; quindi si produce un fenomeno nuovo. Ma tutti i fenomeni non essendo intieramente cambiati *in una volta,* ed invece essendosi modificati gli uni dopo gli altri, l'idea di oscillazione, *accompagnatrice* dell'intiero fenomeno, non è legata a nessuno dei fenomeni particolari; quindi essa rimane ancora sempre *utile* e conserva la sua funzione di economia. Similmente quando il suono è divenuto così alto e le oscillazioni così piccole, che i mezzi di osserva-

zione precedenti non possono più servire, rimane *vantaggioso* di immaginarci la verga sonora come oscillante, e possiamo predire le oscillazioni delle linee oscure nello spettro della luce polarizzata con una verga di vetro. Se *tutte* le esperienze si trasformassero istantaneamente ad un tempo in *nuove*, mediante una ulteriore diminuzione della lunghezza della verga, la rappresentazione per mezzo delle oscillazioni perderebbe la sua *utilità*, poichè essa non offrirebbe più nessun mezzo di *completare* le osservazioni nuove mediante le antiche.

Quando alle azioni degli uomini, che possiamo osservare, aggiungiamo nella nostra mente sensazioni ed idee, per noi non percettibili, ma simili alle nostre, questa rappresentazione ha ancora un valore economico, poichè essa rende l'esperienza intelligibile, cioè essa la completa e la risparmia. Questa rappresentazione non deve essere per questo considerata come una grande scoperta scientifica, poichè essa s'impone a noi in modo così potente, che ogni fanciullo la può di nuovo scoprire. Precisamente è questo stesso processo che seguiamo, quando immaginiamo che un corpo in moto, scomparso dietro una colonna, od una cometa, divenuta invisibile, continuano a muoversi secondo le loro traiettorie con tutte le proprietà precedentemente osservate, per non essere meravigliati dalla loro riapparizione dall'altra parte. Riempiamo le lacune di continuità della esperienza con le rappresentazioni che l'esperienza stessa ci ha suggerito.

9. Le teorie scientifiche attualmente accettate non si presentano tutte in modo così naturale e inartificioso. Quando ad esempio spieghiamo i fenomeni chimici, elettrici, ottici mediante le teorie atomiche, questa concezione ausiliare degli atomi non è stata fornita dal principio di continuità; essa invece è stata costruita con uno scopo determinato. È impossibile di discernere gli atomi; come tutte le sostanze, essi sono astrazioni. Inoltre si attribuiscono ad essi assolutamente proprietà contradditorie con i fatti osservati fin qui. Certamente le teorie atomiche possono servire ad aggruppare serie di fatti, ma l'investigatore della natura, che ha approfondito le regole

date da Newton, considererà queste teorie solo come ausiliarî *provvisorî* e si sforzerà di sostituire ad essi una concezione più naturale.

La teoria atomica ha nelle scienze fisiche una funzione analoga a quella di certe rappresentazioni matematiche ausiliari: essa è un *modello* matematico per la descrizione dei fatti. Quando rappresentiamo le oscillazioni con una formula sinusoidale, il fenomeno del raffreddamento mediante la funzione esponenziale, lo spazio percorso nella caduta dai gravi mediante il quadrato del tempo, non ricorre alla mente di alcuno che l'oscillazione *in sè* sia legata alla funzione esponenziale, o che il fènomeno della caduta *in sè* sia legato alla funzione intera di 2° grado. Si è semplicemente notato che fra le grandezze osservate esistono relazioni analoghe a quelle di certe funzioni precedentemente *famigliari*, e si sono utilizzate queste rappresentazioni *più famigliari* per completare comodamente l'esperienza. I fenomeni naturali, che nei loro rapporti non sono identici a funzioni ben note, sono assai difficili a rappresentarsi: i progressi delle matematiche possono fare scomparire queste difficoltà. Ho fatto vedere altrove che fra questi processi matematici ausiliari, possiamo utilmente servirci dello spazio a più di tre dimensioni, senza che occorra d'altra parte considerarlo null'altro che una mera astrazione. (1).

---

(1) I lavori di Lobatschewsky, Bolyai, Gauss, Riemann, come si sa, hanno stabilito che, ciò che noi diciamo spazio, non è altro che un caso *particolare* e *sensibile* del caso *immaginabile più generale* di una moltiplicità quantitativa a più dimensioni. Lo spazio della vista e del tatto è una multiplicità *tripla*; esso ha tre dimensioni; ogni luogo di questo spazio è determinato da tre caratteristiche indipendenti fra loro. Ma è possibile di *immaginare* multiplicità spaziali simili a quattro ed a più dimensioni. La specie della moltiplicità si può anche immaginare differente da quella data dal nostro spazio. Secondo noi tale concezione, che è principalmente dovuta al lavoro di Riemann, è assai importante. Le proprietà del nostro spazio ci si presentano subito come oggetti di esperienza, e tutte le pseudo-teorie geometriche, che pretendono di stabilirle, sono sovvertite.

Avviene così per tutte le ipotesi fatte a scopo di spiegare nuovi fenomeni. Le nostre idee sui fenomeni elettrici procedono per così dire da sè per una via naturale, quando osserviamo che tutto ciò avviene come se fluidi attrattivi e repulsivi si trovassero sulle superficie dei conduttori. Ma queste rappresentazioni ausiliarie non hanno alcuna relazione con il fenomeno *in sè stesso.*

Un essere sferico e non avente alcun altro spazio per punto di confronto troverebbe il suo spazio omogeneo; potrebbe supporlo infinito e la sola esperienza potrebbe convincerlo del contrario. Ad esempio conducendo per due punti di un cerchio massimo altri cerchi massimi perpendicolari al primo, e percorrendo i due cammini così tracciati, questo essere sferico probabilmente non si aspetterà che questi cerchi s'intersechino in qualche punto. Analogamente nel nostro spazio l'esperienza sola può insegnarci se esso è finito, se le parallele si tagliano, ecc. L'importanza di questa nuova concezione si può difficilmente esagerare. Il progresso che Riemann ha fatto fare alla scienza è paragonabile a quello che i primi viaggi di circumnavigazione hanno fatto fare alle opinioni che si avevano sulla figura della Terra.

Le ricerche teoriche sulle possibilità matematiche, di cui parliamo, debbono rimanere estranee ad ogni questione di *realità attuale.* Non occorre più di rendere responsabili illustri matematici delle mostruosità, che sono state provate dalle loro ricerche. Lo spazio della vista e del tatto è a *tre* dimensioni; nessuno ne dubita. Quando i corpi scompariranno da questo spazio o vi s'introdurranno, allora si potrà discutere la questione di sapere, se sia più facile e più efficace di considerare lo spazio dato come facente parte di uno spazio a quattro o più dimensioni; qnesta quarta dimensione rimarrà ancora sempre un'astrazione.

Alcuni hanno fatto servire la quarta dimensione per ispiegare pretesi fenomeni, come l'introduzione dei corpi dentro vasi ermeticamente chiusi, dei nodi fatti o disfatti nelle corde formanti una linea chiusa, ecc., le quali cose non sono altro che raggiri. Infatti la quarta dimensione ci fornisce il mezzo di spiegarli, nello stesso modo che la terza dimensione ci permette di concepire che si possa uscire da una superficie chiusa, od entrarvi, senza romperne il contorno. È doloroso che certe persone si permettano di utilizzare concezioni scientifiche, cui troppo spesso non annettono alcun significato, per ingannare incosciamente o no il pubblico.

Prima dei lavori di Riemann io avevo considerato lo spazio a più di tre dimensioni come un ausiliario fisico e matematico. Tuttavia spero che nessuno non si servirà di ciò che ho pensato, detto o scritto intorno a questo soggetto per sostenere racconti spiritici o storie di fantasmi (Cfr. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*).

10. L'idea di economia del pensiero si svolse in me per mezzo delle mie esperienze professorali nella pratica dell'insegnamento. Già la possedevo, quando nel 1861 incominciai le mie lezioni come privato docente, e credevo allora di essere solo a possederla; e ciò si troverà ben perdonabile. Ma presentemente sono invece convinto che almeno un presentimento di questa idea deve essere stato sempre un possesso comune a *tutti* gli investigatori, che hanno riflettuto sulla *ricerca* in generale. Questo modo di vedere può esprimersi mediante forme differentissime. Così potrei segnalare il " leitmotiv „ (1) di *semplicità* e di *bellezza*, così sorprendenti presso Copernico e Galileo, non solo come estetica, ma ancora come economia. Le " Regulae philosophandi „ di Newton sono pure essenzialmente influenzate da questo punto di vista, benchè il principio di economia non sia esplicitamente enunciato. Mac-Cormac in un interessante articolo intitolato " *An episode in the history of philosophy* „ (The open Court, 4 aprile 1896) ha dimostrato che Adamo Smith nei suoi " *Essays* „ è giunto assai vicino al pensiero dell'economia nella scienza. Più recentemente questa idea è stata novellamente espressa, benchè sotto forme diverse, da me in un discorso sulla conservazione del lavoro (1871), da Clifford nelle sue " *Lectures and essays* „ (1872), da Kirchhoff nella " *Mekcanica* „ (1874) e da Avenarius (1876). Io ho parlato nel mio *Erhaltung der Arbeit* (p. 55, nota 5) di una conversazione con l'economista E. Herrmann, in cui erano state discusse idee simili; ma tuttavia non mi è nota alcuna pubblicazione di questo autore su questo soggetto.

11. Io potrei qui rinviare l'esposizione più compiuta, che ho fatto di queste idee, alle mie *Populär-wissenschaftlichen Vorlesungen* (pp. 203 e seg.) e ai miei *Principien der Wärmelehre* (p. 294). In quest'ultima opera le osservazioni di Petzoldt (Vierteljahrschz. f. wissenschaftl. Philosophie, 1891) sono pure prese in

(1) Testo guidatore. *n. d. t.*

considerazione. Husserl nella prima parte delle sue ricerche sulla logica (*Logische Untersuchungen*, 1900) ha presentato nuove riflessioni contro l'economia del pensiero. La mia replica a Petzoldt risponde in parte a queste critiche; ed io penso che conviene aspettare, per rispondervi compiutamente, la pubblicazione del resto dell' opera, ed allora vedere se fosse possibile un accordo. Tuttavia farò qualche osservazione. Come investigatore della natura io sono uso di cominciare la ricerca dal caso speciale, di lasciarlo agire su di me, e di assurgere da esso al caso più generale. Ho seguito questa abitudine anche nei miei studî sullo sviluppo della conoscenza fisica. Io dovetti così procedere, perchè una teoria generale della teoria era per me un còmpito troppo difficile, doppiamente difficile, in un campo in cui un minimo dei principî indubitabili, generali, indipendenti fra loro ed all'infuori dei quali tutto si può dedurre, non era dato, ma doveva subito essere scoperto. Un tal còmpito offrirebbe assai più probabilità di riuscita nella scienza matematica. Quindi io indirizzai la mia attenzione sui fenomeni particolari: adattamento del pensiero ai fatti, adattamento dei pensieri gli uni agli altri (1), economia del pensiero, similitu-

---

(1) Populär — wissenschaftl. Vorlesungen, p. 246, ove l'adattamento dei pensieri gli uni agli altri è descritto come oggetto della teoria propriamente detta. Secondo me Grassmann dice in sostanza la stessa cosa nella sua introduzione all'*Ausdehnungslehre* del 1844, p. 19: " Die oberste Theilung aller Wissenschaften ist die in remle und formalè, von deven die ersteren das sein, als das dem Denken selbstständig gegenubertretende. iu Denken übbilden und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung des Denkens mit jevem Sein; die letzteren hingegen das durch das Denken selbst Gestzte zum Gegenstande haben, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung der Denkprocesse nuter sich „.

Ecco la traduzione: " La prima divisione di tutte le scienze è la divisione in reali e formali, secondo la quale le prime costruiscono nel pensiero la realtà come presentantesi al pensatore con una esistenza sua propria, e trovano la loro verità nell'armonia del pensiero con quella realtà; e nella quale le seconde invece studiano le leggi per mezzo del pensiero, e trovano la loro verità nell'accordo dei processi mentali fra loro „.

dine, esperimentazione mentale, stabilità e continuità del pensiero, ecc.

In ciò mi fu talvolta profittevole e disingannante il considerare il pensiero volgare come la intiera scienza quale fenomeno biologico organico, in cui per conseguenza il pensiero *logico* doveva essere esaminato come un *caso limite ideale*. Io non dubito un istante solo che si possa iniziare la ricerca da ambedue i capi. Io stesso ho segnalato i miei studî come abbozzi (1) di conoscenza psicologica. Da ciò si può vedere che io faccio distinzione fra questioni psicologiche e logiche, come deve farlo del resto chi cerca di spiegare psicologicamente i processi logici. Ma chi ha letto attentamente l'analisi logica delle concezioni di Newton, fatta in quest'opera, potrà difficilmente rimproverarmi di voler *fare scomparire* la differenza fra il pensiero naturale, *cieco*, ed il pensiero *logico*. Analogamente se l'analisi logica in tutte le scienze ci fosse presente, intieramente finita, la ricerca bio-psicologica della loro evoluzione resterebbe sempre per me un bisogno, ciò che escluderebbe che si analizzasse di nuovo queste ultime ricerche dal punto di vista logico. Se si concepisce l'economia del pensiero come puramente teleologico, e quindi come un " leitmotiv „ provvisorio, la riduzione di questo ad una base più profonda (2), lungi da essere esclusa, è, dal fatto stesso, richiesta. Ma facendo astrazione di ciò, l'economia del pensiero è anche un *ideale logico* chiarissimo che conserva il suo valore, anche dopo un'analisi logica *compiuta*. Può essere dedotto in diversi modi il sistema di una scienza dagli stessi principî. Ma *uno* di questi sviluppi corrisponde al principio di economia meglio di un altro, come l'ho spiegato a proposito della diottrica di Gauss (3). Per quanto presentemente posso vedere, io non credo che le ricerche di Husserl infirmeranno questi dati.

---

(1) *Principien der Wärmelehre* — Prefazione alla 1ª edizione.
(2) *Analyse der Empfindungen*, 2ª edit. pagg. 64 e 65.
(3) Wärmelehre p. 394.

Il fatto che, se spesso prima e dopo di me l'idea dell'economia del pensiero è stata con vantaggio applicata, mentre, come è naturale, diminuisce il mio apprezzamento del mio merito personale, accresce l'importanza della dottrina. E precisamente ciò che per Husserl è un abbassamento del pensiero scientifico, il suo contatto con il pensiero volgare (" cieco? „) mi sembra come un elemento di grandezza, poichè è precisamente così che la scienza getta radice nella vita profonda dell'umanità e reagisce potentemente su questa.

CAPITOLO V.

Relazioni della Meccanica con le altre scienze

I. *Relazioni della Meccanica con la Fisica.*

1. Non esistono fenomeni puramente meccanici. Quando due masse a vicenda si comunicano accelerazioni, allora pare che si verifichi semplicemente un fenomeno di moto. Ma di fatto ad un tal fenomeno sono sempre associati i cambiamenti termici, magnetici ed elettrici che, nella misura in cui si producono, modificano il fenomeno. Inversamente condizioni termiche, magnetiche, elettriche e chimiche possono produrre un moto. Quindi i fenomeni puramente meccanici sono astruzioni intenzionali o forzate, il cui scopo consiste nel facilitarne vieppiù l'esame. La stessa cosa si verifica per tutte le altre classi di fenomeni fisici. A giusto rigore ogni fenomeno appartiene a tutti i rami della fisica, che sono stati separati gli uni dagli altri per ragioni in parte convenzionali, in parte fisiologiche, in parte storiche.

2. L'opinione che considera la meccanica come la base fondamentale di tutti gli altri rami della fisica, e secondo la quale tutti i fenomeni fisici debbono avere una spiegazione *meccanica*, è a nostro parere un pregiudizio. La concezione storicamente più antica non deve necessariamente *essere* la base della comprensione dei fatti scoperti più tardi. A mano a mano che i diversi fenomeni vengono scoperti e classificati in numero sempre maggiore, possono sorgere ed instaurarsi concezioni direttrici intieramente nuove. Presentemente non è ancora possibile conoscere quali siano i fenomeni fisici, che penetrano *più profondamente* le cose, o conoscere se il fenomeno meccanico non sia più precisamente il più superficiale di tutti, e se tutti non siano di una *eguale profondità*. Anche in meccanica non

sì considera più la legge più antica, quella della leva, come la base di tutte le altre.

La concezione meccanica della natura ci pare come un'ipotesi storicamente assai semplice, giustificabile e forse molto utile, per un tempo, ma in complesso del tutto artificiale. Per rimanere fedeli al metodo, che ha condotto i più grandi investigatori della natura, Galileo, Newton, Sudè-Carnot, Faraday e T. R. Mayer, alle loro grandi scoperte, dobbiamo restringere la nostra scienza fisica all'espressione dei *fatti osservabili,* senza costruire ipotesi dietro questi fatti, cioè dove nulla più esiste, che si possa conoscere o provare. Quindi dobbiamo solo scoprire le connessioni reali dei moti delle masse, dei cambiamenti di temperatura, dei cambiamenti di valore della funzione potenziale, dei cambiamenti chimici, senza immaginare altro dietro questi elementi, che sono le caratteristiche fisiche direttamente o indirettamente date dalla osservazione.

Ho già altrove (1) svolto questa idea rispetto ai fenomeni termici, e l'ho ad un tempo abbozzata per quello che riguarda l'elettricità. Nella teoria della elettricità qualunque ipotesi di fluido o di mezzo è inutile e deve scomparire, poichè tutte le condizioni elettriche sono date per mezzo dei valori del potenziale V e delle costanti dielettriche. Se supponiamo che la differenza dei valori di V è misurata dalle forze (all'elettrometro) ed invece di considerare la quantità di elettricità consideriamo V come il concetto primordiale, o come una caratteristica fisica misurabile, la quantità di elettricità di un isolatore unico è dato dalla:

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dv,$$

ove x, y, z sono le coordinate dell'elemento di volume dv; e

(1) Mach, Die Geschichte unz die Wurzel des Satdes der Erhaltung der Arbeit.

l'energia è data dalla:

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int V\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dv.$$

Così Q e W si presentano come concetti *dedotti,* non contenendo più alcuna concezione di fluido o di mezzo. Se procedendo in questo modo in tutti i rami della fisica, ci limitiamo alla espressione quantitativamente concettuale dei fatti, tutte le nozioni inutili ed oziose si eliminano immediatamente con tutti i *pretesi* problemi, che vi si connettono.

Queste righe, che furono scritte nel 1883, potevano allora essere solo apprezzate ben poco dalla maggior parte dei fisici. Ma si osserverà che in seguito le concezioni fisiche si sono assai avvicinate all'ideale da noi propugnato. Le *Untersuchung über die Ausbreitung der elektrischen, Kraft* (1892), cioè " Ricerche sulla propagazione della forza elettrica „ (1892) di Hertz, offrono un eccellente esempio di questa descrizione dei fenomeni mediante semplici equazioni differenziali.

Per giungere ad emanciparsi dalle rappresentazioni convenzionali o fondate sopra circostanze storiche secondarie è utilissimo confrontare fra loro i concetti direttivi nei diversi campi della conoscenza scientifica, e di cercare, per ciascun concetto dato in un ramo, il concetto corrispondente di un altro ramo. Così troviamo che le temperature ed i potenziali corrispondono alle velocità delle masse in moto. *Un* valore dato della velocità, della temperatura o del potenziale non cambia da *sè stesso.* Ma mentre per i potenziali e le velocità bisogna, cercando la nostra concezione odierna, tener solo conto delle differenze, il significato di temperatura non è intieramente dato dalla differenza con altre temperature. La massa corrisponde alla capacità calorifica, la quantità di calore al potenziale di una carica elettrica, l'entropia alla quantità di elettricità e così via. La ricerca di queste analogie e di queste differenze conduce ad una *fisica comparata,* che un dì ci permetterà di esprimere sinteticamente vastissimi

dominii di fatti, senza addizioni *arbitrarie*. Allora si sarà giunti ad ottenere una fisica omogenea, senza ricorrere all'artefizio delle teorie atomiche. Cfr. *Principien der Wärmelehre* (pp. 396 e seg.).

Si scorge facilmente che mediante le ipotesi meccaniche non può effettivamente realizzare alcun *risparmio* propriamente detto del pensiero scientifico. Anche se un'ipotesi fosse intieramente sufficiente alla descrizione di una classe di fenomeni, ad esempio, i fenomeni termici, accettandola non abbiamo fatto altro che sostituirla alla relazione reale che esiste fra i fenomeni termici e meccanici. I fatti fondamentali vengono sostituiti da un egual numero di ipotesi, e ciò evidentemente non è un guadagno. Quando un'ipotesi può considerevolmente facilitare l'intelligenza di nuovi fatti, sostituendo ad essi idee già famigliari, e così la sua efficacia è esaminata. Si errerebbe quando si aspettasse *maggior* luce dall'ipotesi che dai fatti *stessi*.

3. Lo sviluppo della concezione meccanica della natura è stato favorito da molte circostanze. In primo luogo esiste fra tutti i fenomeni naturali ed i fenomeni meccanici un legame manifesto che ci mena alla spiegazione dei fenomeni ancora poco noti per mezzo dei fenomeni meccanici meglio conosciuti. Inoltre fu proprio in meccanica a scoprirsi le prime grandi leggi generali e di grande estensione. Una di queste leggi è il teorema delle forze vive $\Sigma(U_1 - U_0) = \Sigma \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$, secondo il quale l'incremento di forza viva di un sistema, nel passare da una posizione ad un'altra, è uguale all'incremento della funzione di forze (od al lavoro), che si esprime mediante una funzione delle posizioni iniziale e finale. Se ora consideriamo il lavoro, che il sistema *può* fare, ciò che Helmholtz chiama la sua *forza di tensione* S, un lavoro qualunque U, *realmente eseguito* dal sistema, allora apparirebbe come una diminuzione della forza di tensione primitiva K; si ha: $S = K - U$, ed il teorema delle forze vive assume la forma:

$$\Sigma S + \frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \text{costante},$$

cioè che ogni diminuzione della forza di tensione è composta da un aumento eguale di forza viva. Il teorema posto sotto questa forma ha assunto il nome di *principio della conservazione dell'energia;* infatti esprime che la somma della forza di tensione (energia potenziale) di un sistema e della sua forza viva (energia cinetica) è costante. Ma siccome nella natura un lavoro fatto può non produrre solo forza viva, ma anche una quantità di calore od un potenziale di una carica elettrica, ecc., si vede in questo principio l'affermazione dell'esistenza di un fenomeno meccanico a base di tutti i fenomeni naturali. Tuttavia essa non esprime altro che una relazione quantitativa invariabile fra i fenomeni meccanici ed i fenomeni di altre specie.

4. Sarebbe un errore il credere che un esame più profondo e più generale delle scienze della natura sia principalmente stata la conseguenza della concezione meccanica dell'universo. Questo esame in tutti i tempi è stato la caratteristica dei grandi investigatori; esso ha contribuito alla costruzione della meccanica e quindi non ha potuto essere un *risultato* di quest'ultima. Galileo ed Huygens hanno sempre alternato la considerazione del fenomeno particolare con quella dell'insieme complessivo, ed i risultati da essi ottenuti sono il frutto di uno sforzo continuo verso una concezione semplice e logica. Essi giungono a determinare la relazione fra la velocità acquistata nella caduta di corpi isolati o di sistemi e l'altezza della caduta, solo mediante lo studio più accurato dei casi particolari dei moti di caduta, combinato con la considerazione che i corpi, abbandonati a sè stessi, tendono solo a cadere. A tal uopo Huygens insisteva sull'impossibilità del moto perpetuo; quindi egli già possedeva il punto di vista moderno; sentiva l'*incompatibilità* della rappresentazione di un moto perpetuo e delle rappresentazioni comuni di fenomeni meccanici naturali.

Le finzioni di Stevino — come quella della catena chiusa giacente sul prisma — sono altrettanti esempî di una stessa penetrazione di spirito, che consiste nell'applicazione, ad un caso

particolare, di una rappresentazione formata con molte esperienze. Lo scorrimento della catena chiusa sembrò a Stevino che fosse un moto di caduta senza caduta, un moto *senza scopo*, come un atto intenzionale, che non rispondesse a nessuna intenzione, una tendenza verso una variazione che la variazione prodotta non soddisfaceva affatto. Poichè il moto è in generale connesso alla caduta, nel caso particolare la caduta sarà anche annessa al moto. Chiaramente qui si vede un'intenzione della dipendenza *reciproca* di v ed h, espressa dall'equazione $v = \sqrt{2gh}$, ma naturalmente sotto una forma meno precisa. Con il suo spirito sottile di ricerca Stevino scoprì nella finzione del moto della catena una contraddizione che sarebbe sfuggita ad un pensatore meno profondo.

Si trova nei lavori di Sadi Carnot lo stesso processo di confronto fra il lavoro e l'insieme, fra il particolare ed il generale; ma non più *limitato* alla meccanica. Quando Carnot scoprì che la quantità di calore Q, che passa dalla temperatura t alla temperatura t' per un lavoro fatto L, può dipendere solo dalla temperatura ed in nessun modo dalla natura dei corpi, il suo pensiero seguì esattamente il metodo di Galileo. Così ancora procedè J. R. Mayer, quando enunciò il suo principio dell'equivalenza del lavoro e del calore; le concezioni meccaniche della natura gli furono perfettamente estranee: egli non ne ebbe affatto bisogno. Chi si fa grucce delle concezioni meccaniche della natura per giungere a comprendere l'equivalenza del lavoro e del calore, comprende solo a metà il progresso realizzato da questo principio. Ma per quanto si apprezzino altamente i lavori originali di Mayer, tuttavia non bisogna per questo stimarne meno il merito dei fisici di professione Joule, Holmholtz, Clausius, Thomson, che hanno fatto molto, e forse tutto, per *stabilire* e *perfezionare* la nuova concezione nei suoi particolari. Supporre che essi abbiano preso a prestito le idee di Mayer ci pare del tutto inutile. Chi ciò afferma avrebbe l'obbligo di *provarlo*. Parecchie manifestazioni simultanee di una stessa idea non sono cose nuove nella

storia. Non procederemo più oltre in questa discussione di questioni personali che non interessano più da trent'anni. In ogni caso è veramente deplorevole che, sotto il pretesto di giustizia, si faccia ingiuria ad uomini, la cui vita avrebbe diritto di essere placida ed altamente onorata, anche quando essi avessero fatto fare alla scienza solo un terzo dei progressi, che questa realmente deve a loro.

I lavori di Mayer sul principio trovarono in Germania un'accoglienza assai fredda, scoraggiante ed anche ostile, e non furono pubblicati che con molta difficoltà, mentre furono rapidamente apprezzati in Inghilterra. Ma l'abbondanza dei nuovi fenomeni scoperti li fece cadere in oblio; fu Tyndall che nella sua celebre opera “ *Heat a mode of motion* „ (1863) richiamò l'attenzione sopra di essi per il grande elogio che egli ne fece. Ne venne in Germania una reazione che raggiunse il suo punto culminante nello scritto di Dühring intitolato “ *Roberto Mayer*, il Galileo nel XIX secolo „ (1878). Tosto sembrò che l'ingiustizia, di cui era vittima Mayer, dovesse venire compensata da una ingiustizia in senso inverso. I valori del Mayer trovarono un'approvazione entusiastica e senza riserva in una recensione di Popper (*Das Ausland*, 1876, n. 35), che è d'altronde notevole per le suggestioni che contiene nella teoria della conoscenza. Mi sono sforzato (“ Principien der Wärme „) ossia (“ Principî del calore „) di dare un'esposizione precisa ed imparziale delle contribuzioni degl'investigatori alla teoria meccanica del colore. Da essa appare che ciascuno di essi sia caratterizzato da un'originalità intellettuale propria, causa delle sue scoperte. Mayer è il filosofo della scienza del calore e dell'energia; Ioule, benchè egli pure sia condotto al principio dell'energia da considerazioni filosofiche, ne fonda la teoria sperimentale; ed Helmholtz ne stabilisce la teoria dal punto di vista fisico. Helmholtz, Clausius e Thomson utilizzano tutti e tre le idee di Carnot, il cui pensiero segue un cammino tutto suo proprio. Uno qualunque degli altri investigatori sopra nominati poteva non essere allora esistito, il corso della scienza ne sarebbe stato rallentato, ma non sarebbe stato

arrestato. (Cfr. anche l'edizione delle opere di Mayer, fatta da Weyrauch; Stuttgart, 1893).

5. La vasta veduta, che si esprime nel principio della conservazione della energia, non è propria della meccanica, ma invece è, come vedremo, intimamente connessa al pensiero scientifico e sintetico *in generale*. La nostra scienza della natura consiste nella riproduzione mentale dei fatti o nella loro espressione quantitativa astratta. Le regole di questa riproduzione sono le leggi naturali. La legge di causalità riposa solo sull'intima convinzione della possibilità generale di regole di ricostruzione; essa esprime soltanto la *dipendenza reciproca dei fenomeni*. È inutile mettere specialmente in evidenza lo spazio ed il tempo, poichè tutte le relazioni di tempo e di spazio sono implicitamente espresse nelle altre dipendenze dai fenomeni.

Le leggi naturali sono equazioni fra gli elementi misurabili $\alpha, \beta, \gamma \ldots w$ dei fenomeni. Siccome la natura è variabile, il numero di queste equazioni è necessariamente sempre minore di quello degli elementi misurabili presenti.

Quando conosciamo *tutti* i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, mediante i quali ad esempio i valori di $\lambda, \mu, \nu \ldots$ son dati, possiamo chiamare causa il gruppo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ ed effetto il gruppo $\lambda, \mu, \nu \ldots$ e, in questo senso, possiamo dire che l'effetto è determinato *in un modo unico* dalla causa. Il principio della ragione sufficiente, usato per esempio da Archimede nel suo sviluppo delle leggi della leva, dice anche unicamente che l'azione di un numero dato di circostanze non può essere *simultaneamente* determinato ed indeterminato.

Poniamo due circostanze α e λ fra loro in relazione. Tutte le altre circostanze rimanendo invariabili, un cambiamento di α sarà accompagnato da un cambiamento corrispondente di λ; ma inversamente un cambiamento di λ dà origine in generale anche ad un cambiamento di α. Ritroveremo la considerazione di questa dipendenza *reciproca* in Stevino, Galileo, Huygens, ecc.; questa stessa idea ha contribuito alla scoperta dei fenomeni *inversi* dei fenomeni noti. Il cambiamento di volume del gaz me-

diante il cambiamento della temperatura corrisponde al cambiamento della temperatura mediante il cambiamento del volume; il fenomeno Seebeck corrisponde al fenomeno Peltier, ecc. In queste specie d'inversione è indispensabile di portare tutta la nostra attenzione alla *forma* della dipendenza. La figura 232 fa vedere chiaramente che ogni cambiamento di λ è accompagnato da un cambiamento notevole di a senza che sia vera l'inversa. Le relazioni fra i fenomeni elettromagnetici ed i fenomeni di induzione, scoperti da Faraday, ne dànno un eccellente esempio.

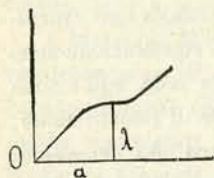



Fig. 232.

Si faccia passare un gruppo di circostanze $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, che determina un altro gruppo $\lambda, \mu, \gamma \ldots$ dai loro valori iniziali ai valori finali $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \ldots$; le circostanze del secondo gruppo passano nello stesso tempo da λ, $\mu, \gamma \ldots$ a $\lambda', \mu', \gamma' \ldots$ Se il primo gruppo riprende i valori iniziali, pure il secondo li riprende. In ciò precisamente consiste "l'equivalenza della causa e dell'effetto", idea di cui Mayer ha molte volte segnalato l'importanza.

Quando il primo gruppo può subire solo cambiamenti *periodici*, i cambiamenti del secondo sono pure conseguentemente periodici, nè possono essere *permanenti*. I metodi intellettuali sì fecondi seguiti da Galileo, Huygens, Sadi-Carnot, Mayer e da altri, si riconducono a questa semplice e potente idea che *i cambiamenti meramente periodici di una serie di circostanze possono solo costituire l'origine di cambiamenti egualmente periodici di un'altra serie e non affatto di cambiamenti continui e permanenti.* Le formule come "l'effetto è equivalente alla causa", "il lavoro non si può creare dal nulla", "il moto perpetuo è impossibile" non sono altro che formule particolari, meno determinate e meno chiare, di questa idea, che non appartiene solamente alla meccanica, ma che appartiene all'intiero dominio del pensiero scientifico. Così scompare ogni misticismo metafisico, che potrebbe ancora collegarsi al principio della conservazione dell'energia (1).

Tutte le idee di conservazione come il concetto di sostanza hanno il loro solido fondamento nella economia del pensiero. Un cambiamento isolato, senza nessun punto di sostegno o senza nessun punto di riferimento, è inconcepibile e non immaginabile. La questione che si fa è quindi di sapere qual'è la rappresentazione che si mantiene durante il cambiamento, qual'è la *legge* che subisce, l'*equazione* che rimane verificata, il *valore* che rimane costante? Quando si dice che in ogni fenomeno di rifrazione l'indice rimane costante, che in ogni fenomeno di caduta dei gravi *g* rimane eguale a 9,81, che in ogni sistema isolato l'energia non varia, tutti questi teoremi hanno una stessa funzione di economia, che è di agevolare la riproduzione dei fatti nel pensiero.

Si possono confrontare queste righe, scritte nel 1883, con gli sviluppi di Petzoldt intorno alla tendenza, alla *stabilità* nella vita intellettuale (*Maxima, Minima und Aekonomie,* Vierteljahrsschr. f. w. Philos., 1891).

6. Qui debbo aggiungere alcune osservazioni rispetto a certe Memorie, pubblicate dopo il 1883, e riguardanti il principio della conservazione dell'energia, quelle di J. Popper (*Die Physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung*, Vienna, 1883), G. Helm (*Die Lehre von der Energie,* Lipsia, 1887), M. Plank (*Das Princip der Erhaltung der Energie,* Lipsia, 1887), F. A. Müller (*Das Problem der Continuität in der Mathematik und Mechanik*, Marburgo, 1886). I lavori di Popper e di Helm, indipendenti fra loro, vanno così bene d'accordo nella loro *tendenza*, ad un tempo fra loro e con le mie proprie ricerche, che ho letto poche cose che mi siano state così simpatiche come queste, senza che perciò le differenze individuali

(1) Per abbattere le applicazioni di questo stesso principio all'universo intiero, basta rammentarsi che ogni principio scientifico è un'astrazione, che presuppone la ripetizione di casi *simili.*

svaniscono. Questi due autori si incontrano specialmente nel loro tentativo di una energetica generale, rispetto alla quale si troverà una *indicazione* nel mio scritto: *Ueber die Erhaltung der Arbeit*, p. 54. Da allora in poi questa " energetica generale „ è stata trattata partitamente da Helm, Ostwald, ecc.

Già nel 1872 (*Erhaltung der Arbeit*, pp. 42 e seg.), ho mostrato che la convinzione della impossibilità del moto perpetuo è fondata sulla credenza generale della determinazione *unica* di un gruppo di elementi (meccanici) $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mediante un altro gruppo di elementi $x, y, z \ldots$ Le idee di Planck (pp. 99, 138, 139) concordano in sostanza colle mie; solo la forma dell'esposto è alquanto diversa. Del resto ho insistito più volte su ciò, che tutte le forme del principio di causalità provengono da tendenze subbiettive, a cui la natura *non* è necessitata a confermarsi; ed in ciò le mie idee sono assai prossime a quelle di Popper e di Helm.

Plank (pp. 21 e seg., p. 135) ed Helm (pp. 25 e seg.) parlano del principio " metafisico „ che Mayer aveva scelto per guida. Entrambi riconoscono che Joule doveva essere così guidato da idee analoghe, benchè non le abbia espresse (Plank, pp. 26 e seg., Helm, p. 28); la mia opinione è perfettamente conforme alla loro.

Alcune osservazioni mi paiono necessarie rispetto ai pretesi punti di vista " metafisici „ di Mayer, a cui, secondo Helmholtz, gli ardenti fautori delle speculazioni metafisiche attribuiscono *il più gran* valore, ma che egli stesso considera come le parti *più deboli* di tutto l'esposto. Per mezzo di proposizioni come queste: " nulla non può nascere dal nulla „, " l'effetto è equivalente alla causa „ ecc., è impossibile di nulla dimostrare *ad altri*. Ho dimostrato altrove con esempio (*Erhaltung der Arbeit*), quanto siano impotenti queste proposizioni che furono *accolte* nella scienza fino ad un'epoca ancora assai prossima a noi. Ma nel caso di Mayer, esse non mi sembrano siano *debolezze*. Esse sono invece in lui l'espressione di un istinto *potente*, del bisogno non

soddisfatto ancora e mal definito di una concezione *sostanziale* di ciò che presentemente chiamiamo energia; non è esatto ai miei occhi qualificare questo bisogno di metafisico. Ora si sa che a Mayer non mancava la forza di fare la *luce* su questo bisogno intellettuale. Mayer non si comportò *diversamente* da Galileo, Black, Faraday e da altri grandi investigatori, benchè parecchi di questi fossero forse più discreti e più prudenti di lui.

Ho già precedentemente affrontato questo punto (*Beitr. zur Anal. d. Empfind*, 1ª ediz., 1886; pp. 161 e seg.). Mettendo da banda il fatto, che io non condivido il punto di vista di Kant e che, in un modo generale, io non mi pongo in nessun punto di vista metafisico — nemmeno dal punto di vista di Berkeley, come pretesero lettori frettolosi di quella fra le mie opere, che io ho ora citato, — le mie idee si accordano con quelle di F. A. Müller (pp. 104 e seg.). Si troverà il principio della conservazione dell'energia discusso partitamente nel mio lavoro sui *principii del calore.*

II. *Relazioni della Meccanica con la fisiologia.*

1. Ogni scienza trae la sua origine dai bisogni della vita. Benchè le vocazioni particolari, le tendenze e le capacità personali di ciascuno dei ricercatori la dividano e la suddividano in tanti rami, tuttavia è la relazione con il *tutto* che può solo dare a ciascuno di essi la freschezza e la forza della vita. Questa connessione solamente permetterà ad un investigatore di raggiungere gli scopi che si è proposto e di preservarsi da mostruosi sviluppi unilaterali.

La divisione del lavoro, la specializzazione dell'investigatore ad un campo ristretto e l'investigazione in questo dominio come un lavoro di tutta la vita, sono le condizioni necessarie per un fecondo sviluppo scientifico. Questa specializzazione e questa limitazione solo permettono di costituire i metodi particolari,

intellettuali ed economici, indispensabili per conquistare questo dominio. Ma esse espongono ad un tempo al pericolo di sovrastimare il *mezzo*, il *metodo*, che è la preoccupazione costante, e di considerarlo come lo *scopo* reale della scienza, mentre esso non è che uno strumento.

2. Il grandissimo sviluppo formale della fisica, sproporzionato rispetto a quello delle altre scienze naturali, ha creato uno stato speciale della nostra intellettualità. Le nozioni astratte, che costituiscono la supellettile della fisica, i concetti di massa, forza, atomo, i quali hanno solo per oggetto di richiamare esperienze sistematiche a scopo di economia, ricevono dalla maggior parte degli investigatori della natura un'esistenza reale al di là del pensiero. Inoltre si giunge a credere che queste masse e questa forza siano le cose essenziali da ricercare, e che note queste, tutto ciò che ha relazione coll'equilibrio e col moto delle masse si inferisca naturalmente. L'uomo che conoscesse l'universo solo per mezzo del teatro e che arrivasse a scoprire il segreto e il meccanismo della scena, potrebbe probabilmente pensare che l'universo reale avesse anche delle cordicine, e che basterebbe di trovarle per acquistare la conoscenza ultima di tutte le cose. Parimenti non dobbiamo considerare quali *basi* dell'universo reale i mezzi intellettuali ausiliari, di cui ci serviamo per la *rappresentazione* del mondo sulla *scena del pensiero*.

3. Nella esatta conoscenza dell'ordinamento delle scienze particolari in relazione alla scienza generale si trova una filosofia speciale, che si può esigere da ogni investigatore. La mancanza di concezioni esatte su questo punto si rivela dall'apparizione dei problemi, i cui enunciati sono assurdi sia che si considerino come insolubili o no. Una tale usurpazione della fisica a danno della fisiologia, una concezione erronea delle vere relazioni di queste due scienze, si manifesta nel problema della possibilità o della impossibilità di *spiegare* le sensazioni mediante i movimenti degli atomi.

È interessante cercare quali condizioni abbiano potuto condurre a formulare un problema così straordinario. Innanzi tutto

osserviamo che si concede una maggiore *fiducia* alle esperienze sulle relazioni di tempo e di spazio, che si attribuisce ad esse un carattere più obbiettivo, più *reale*, che alle esperienze sul calore, sul suono, sul colore, ecc. Una ricerca un po' esatta impedirà tuttavia di cadere in errore su questo punto e proverà che le sensazioni di tempo e di spazio sono *sensazioni* come lo sono quelle di colore, di suono o di odore, ma che noi vediamo più chiare e che siamo molto più esercitati nella conoscenza delle prime che in quella delle seconde. Lo spazio ed il tempo sono sistemi ben coordinati di serie di sensazioni. Le grandezze, che incontriamo nelle equazioni della meccanica, non sono altro che i segni ordinali dei termini di queste serie, che debbono essere messe in evidenza nelle nostre rappresentazioni. Le equazioni rappresentano le dipendenze reciproche di questi segni ordinali.

Un corpo è un insieme relativamente costante di sensazioni tattili e visuali, associato alle stesse sensazioni di spazio e di tempo. I principii della meccanica, ad esempio quello della accelerazione reciproca di due masse, dànno direttamente od indirettamente la relazione, che esiste fra queste sensazioni di tatto, di luce, di spazio e di tempo. Essi conservano un *senso intelligibile solo* mediante i loro contenuti formati dalle sensazioni (e spesso assai complicati).

Dedurre le sensazioni del moto delle masse equivale perciò a spiegare il più semplice ed il più vicino mediante il più complicato ed il più lontano — fatta astrazione in oltre dal fatto, che i *concetti meccanici* siano mezzi di risparmio, che sono stati sviluppati solo per l'esposizione dei fatti *meccanici*, e non per quella dei fatti *fisiologici* e *psicologici*. Per impedire che siano posti problemi di un carattere così falso, basta ben distinguere il *mezzo* dallo *scopo* della ricerca e di limitarsi alla rappresentazione dei *fatti*.

4. Una scienza qualunque può solo riprodurre complessi di questi *elementi* comunemente chiamati *sensazioni*. Un elemento come il calore di un corpo A non dipende solo da elementi come quelli, il cui insieme costituisce ad esempio una

fiamma B, ma anche dall'insieme degli elementi del nostro corpo, ad esempio dall'insieme degli elementi del nervo N. Come oggetto o semplice elemento N non è essenzialmente, ma solo convenzionalmente diverso da A e da B. La relazione tra A e B è una questione di *fisica*, quella fra A ed N è una questione di *fisiologia*. Nessuna di queste due questioni può esistere *isolatamente;* esse esistono *insieme entrambe*. Solo per eccezione può essere trascurata o l'una o l'altra. Similmente i fenomeni, che in apparenza sono puramente meccanici, sono quindi sempre ad un tempo fisologici e perciò anche elettrici, chimici, ecc. Onde la meccanica non comprende la *base* dell'universo, e nemmeno ne abbraccia una parte; essa ne mostra un *aspetto* soltanto.

APPENDICI

APPENDICE I.

(Al Cap. I, § I, nn. 5, 6; § II, n. 3).

Io devo qui richiamare l'attenzione de' miei lettori sopra un interessante scritto di G. Vailati, (*La dimostrazione del principio della leva data da Archimede,* Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, maggio e giugno 1904), nel quale l'autore, insieme ad Hölder, prende posizione contro la mia critica della deduzione della legge della leva di Archimede, e contemporaneamente si oppone in parte anche ad Hölder. Io credo che ciascuno leggerà con vantaggio le considerazioni del Vailati; e confrontandole con ciò che io ho detto nel Capitolo I, §§ I e II, sarà posto in grado di formarsi un chiaro giudizio sopra i punti controversi. Il Vailati dimostra che Archimede deduce la legge della leva appoggiandosi sopra cognizioni anteriori (dedotte dall'esperienza) relative al centro di gravità. Che un tale processo sia possibile, soddisfacente e magari anche molto fecondo in certi gradi di sviluppo per l'indagine, che forse sia questo l'unico, io non l'ho mai contrastato; al contrario l'ho espressamente riconosciuto con il modo, onde io, ho esposto le deduzioni di Stevino e di Galilei, modellate a questo riguardo su quelle di Archimede. L'intiero mio libro ha però per iscopo di convincere il lettore, che non si possono concepire facilmente leggi della natura con l'aiuto di supposizioni evidenti, ma che esse debbono essere dedotte dall'esperienza; io avrei mancato a questo scopo, se io non avessi distrutto l'impressione, che si potesse dedurre la legge generale della leva dall'equilibrio di pesi eguali, attaccati a braccia uguali. Io dovevo adunque mostrare dove viene introdotta l'esperienza, che già contiene la legge ge-

nerale completa della leva. Questa esperienza si trova nella supposizione fatta nel Cap. I. § I, e nello stesso modo si trova anche in ognuna delle leggi generali, e senza dubbio giuste, sul centro di gravità, riportate dal Vailati. Ciò che il moderno scienziato deve analizzare o marcare nella deduzione di Archimede, sta precisamente nel fatto che la relazione di proporzionalità tra i pesi ed i bracci di leva non è ricavata nel modo più semplice direttamente da un'esperienza, ma viene offerta al lettore stupìto come trovato mediante un giro artifizioso. La stessa deduzione di leggi semplici, che sembrano quasi evidenti, può piacere al matematico, specialmente a coloro, che preferiscono il metodo di Euclide, e ad ogni altro, che la pensi allo stesso modo; ma partendo da un altro punto di vista, e avendo di mira altri scopi, noi abbiamo tutte le ragioni di distinguere ed apprezzare diversamente la deduzione e l'intuizione, l'artificio logico ed il convincimento, e l'intima veduta. Se al lettore è di giovamento questa discussione, a me importa poco di avere ragione in ogni parola.

APPENDICE II.

(Al Cap. I, § VI, n. 8).

P. Duhem espone nel suo libro: *Les origines de la Statique*, Parigi, 1905, T. I, il pensiero già sostenuto da Wohlwill, che la coltura scientifica moderna è connessa con l'antica molto più intimamente di quanto ordinariamente si crede. Le concezioni scientifiche del rinascimento sono derivate da uno sviluppo graduale molto lento, derivante per gradi insensibili da quelle dell'antichità greca, specialmente delle scuole peripatetica ed alessandrina. Noto subito che il libro di Duhem contiene in poco spazio una gran quantità di cose interessanti e chiaramente istruttive, alla cui conoscenza si può giungere solo mediante uno studio faticoso di stampe e manoscritti antichi. Per questo soltanto il libro è già ammirabile e fruttuóso.

In particolare Duhem attribuisce a Giordano di Nemore, scrittore del XIII secolo come volgarizzatore e studioso di antiche concezioni, e così pure ad un posteriore elaboratore del *Liber Jordani de ratione ponderis*, che egli chiama precursor di Leonardo da Vinci, una grande influenza su Leonardo, Cardano e Benedetti Le più importanti correzioni al *Liber Jordani de ratione ponderis*, che Tartaglia dà per sue proprie e che egli applica anche nei *Quesiti et inventioni diverse*, senza nominare Giordano ed i suoi commentatori successivi, sono infatti già contenute in un manoscritto: *Liber Jordani de rationi ponderis*, che Duhem ha trovato nella biblioteca nazionale di Parigi. Anche i manoscritti d Leonardo, che non furono sufficientemente conservati e protetti da utilizzazioni incoscienti, hanno, secondo Duhem, esercitato la loro azione su Cardano e Benedetti. Gli autori fin qui nominati esercitarono la loro influenza in Italia, prima di ogni altro su Galilei, in Olanda su Stevino; per ambedue queste vie le stesse idee prevalsero in Francia, ove esse trovarono terreno propizio in Roberval e Descartes. Secondo ciò adunque, la continuità fra la statica antica e la moderna non sarebbe stata mai interrotta.

Consideriamo alcune particolarità. Aristotile nota, riguardo alle leva, nei suoi problemi meccanici, che i pesi in equilibrio sono inversamente proporzionali ai bracci di leva, od inversamente proporzionali agli archi descritti in uno stesso movimento dagli estremi dei bracci. Volendo interpretarla con grande larghezza, si può riguardare questa osservazione come l'espressione incompleta del principio degli spostamenti virtuali. In Giordano nemerario (Duhem, *l. c.*, pp. 121, 122) l'equilibrio della leva viene connesso al fatto che le lunghezze, di cui si sollevano o si abbassano i pesi, che stanno in equilibrio, siano inversamente proporzionali ai pesi stessi. Con ciò vengono chiaramente indicate le condizioni essenziali. Giordano sa anche che un peso non agisce sempre egualmente, e introduce, sia pur solo qualitativamente, il concetto della *gravitas secundum situs*. *Secundum situs gravius, quando in eodem situ minus obliquus est descensus*, (*l. c.*, p. 118). Il precursore di Leonardo migliora e completa l'enun-

ciato di Giordano; egli riconosce che l'equilibrio di una leva ad angolo, il cui asse sta sopra i pesi, è stabile, ricorrendo alla considerazione di possibili innalzamenti ed abbassamenti. Egli sa anche che una tale leva si orienta in modo, che i pesi siano proporzionali alle distanze dalla verticale passante per l'asse; giunge dunque in sostanza all'uso del concetto di movimento. La *gravitas secundum situm*, raggiunge dunque qui una forma quantiva, e viene in modo splendido usata nella risoluzione del problema del piano inclinato, quando due pesi su due piani inclinati di uguale altezza, ma di differente lunghezza, sono uniti fra loro mediante una fune ed una corrucola in modo, che uno deve salire, quando l'altro scende. Questi pesi nel caso di equilibrio sono fra loro inversamente proporzionali agli spostamenti virtuali, misurati sulla verticale, cioè direttamente proporzionali alle lunghezze dei piani inclinati. Con questo dunque il precursore ha già messo in evidenza gli elementi essenziali della statica moderna. Lo studio dei manoscritti di Leonardo, solo parzialmente pubblicati, dà la più ricca messe; il confronto delle sue diverse note occasionali mostra chiaramente la sua conoscenza del principio degli spostamenti virtuali o per meglio dire del concetto di lavoro, anche se non lo nomina in modo speciale. " Quando una forza sposta (solleva?) in un certo tempo un corpo (un peso?), di un determinato tratto, la stessa forza può nello stesso tempo spostare (sollevare?) la metà del corpo (del peso?) di un tratto doppio „.

Questa legge viene applicata a macchine, leve, sistemi di carrucole, con cui vien meglio precisato un significato un po' dubbio delle parole riferite. Se si ha una quantità determinata di acqua, la quale può cadere ad una determinata profondità, si può con essa (secondo Leonardo) far funzionare una o due ruote uguali, ma nel secondo caso ottenere solo tanto, quanto si ottiene col primo. Il geniale Aperçu " della leva potenziale „ pone Leonardo in grado di ottenere tutti que' concetti, che furono più tardi basati, sul concetto di momento. I suoi disegni fanno sospettare che la considerazione della carrucola e dell'asse della ruota gli

abbiano indicata la via alla sua concezione (vgl. Mech. p. 23). Le costruzioni di Leonardo riguardanti le taglie riposano evidentemente sul concetto della leva potenziale. Meno felice fu Leonardo nel trattare il problema del piano inclinato. Vicino a disegni nei quali si manifesta un giusto modo di vedere, si trovano diverse costruzioni inesatte.

Noi dobbiamo però considerare gli scritti di Leonardo come appunti, i quali fissano le diverse idee, punti di vista, principii di ricerche non aventi la pretesa di condurre queste ricerche secondo un principio unico. Se dunque Leonardo non potè risolvere problemi, che erano già completamente risoluti nel XIII secolo, si vede come bisogna riconoscere con Duhem, che non basta affatto, che un concetto sia acquisito una volta e reso noto, ma spesso sono necessari anni e secoli, affinchè esso sia generalmente riconosciuto e compreso.

Il concetto della impossibilità del moto perpetuo si trova sviluppato già in Leonardo con grande chiarezza. Le sue considerazioni sulla ruota da molino, già ricordate, lasciano già intravedere ciò. Nessuna spinta senza vita può spingere o tirare un corpo mosso senza accompagnarlo; queste spinte non possono essere altro che forza o la gravità. Quando la gravità spinge o trae, essa produce il moto solo in quanto essa tende al riposo; nessun corpo può pel suo movimento di caduta ritornare all'altezza primitiva; il suo moto ha quindi " un termine „ (l. c., 53). La forza è una potenza invisibile, la quale si manifesta nei corpi mediante il moto (qui si deve pensare certo a ciò che oggi si chiama forza viva); tanto più essa è grande, tanto più rapidamente si consuma (l. c. p. 54). Cardano sostiene un modo di vedere simile, nel quale si può sospettare l'influenza di Leonardo, se si ha motivo di negare al primo un modo proprio di vedere (l. c. pp. 40, 47, 58). Anche il concetto di Aristotile, che solo il movimento circolare del cielo sia eterno, comparisce di nuovo in Cardano. Duhem considerò Cardano non come un comune plagiario; secondo lui egli ha utilizzato, tacendolo, i lavori dei suoi predecessori, specialmente quelli di Leonardo;

ma li ha portati in migliore connessione e molti corrispondentemente allo stato della scienza nel XVI secolo. Il Cardano non riesce a risolvere il problema del piano inclinato; egli pensa che il peso del corpo sul piano inclinato stia a tutto il peso, come l'angolo di elevazione del piano sta all'angolo retto. Benedetti si mette in opposizione a tutti i predecessori, ed esercita una buona influenza specialmente per la critica della dottrina dinamica di Aristotile. Del resto però Benedetti combatte ciò che è giusto anche parecchie volte. Nei suoi scritti si ritrovano i pensieri di Leonardo, ad ogni modo anche alcuni errori di di quest' ultimo.

Se si considerano i trovati, di cui si è finora discorso, come sufficientemente noti ed accessibili ai successori, non rimane certo per questi, in special modo per Stevino e Galilei, molto più da produrre nel campo della statica (vgl. Mech. p. 26 e seg). La soluzione di Stevino del problema del piano inclinato è certo del tutto originale, ma i risultati delle considerazioni sue e del Galilei, che questo ultimo ricollega agli studî di Cardano, eran però già noti al predecessore di Leonardo. Stevino partendo dalla considerazione del piano inclinato giunge alla composizione e scomposizione di componenti ortogonali secondo il principio del parallelogramma; ritiene questo principio anche per generale, senza però poterlo dimostrare. Quest'ultima lacuna è colmata da Roberval. Egli immagina un peso R, tenuto in equilibrio mediante funi tese su carrucole, e caricate con pesi P, Q. Se ora si concepisce una corda come un' asta, che possa girare attorno alla carrucola, applicando il principio di Leonardo della leva potenziale, e procedendo ugualmente rispetto all'altra corda, si trovano le relazioni fra R e P e Q e tutte le leggi che valgono per il triangolo o per il parallelogramma delle forze (l. c., p. 319). Descartes trova nel principio degli spostamenti virtuali la base per la comprensione di tutte le macchine; egli vede nel lavoro, cioè nel prodotto del peso pel tratto di caduta (secondo la sua denominazione “ forza „) la causa determinante, la ragione del comportamento delle macchine, il perchè e non solo

il come di ciò che avviene. Questo non dipende dalla velocità, ma dagli spostamenti in alto ed in basso; poichè è lo stesso sollevare 100 libbre di due piedi, che 200 libbre di un piede (l. c., p. 328, vgl. Mech. p. 56. sentenze di Pascal). La non disconoscibile influenza di tutti i predecessori da Giordano a Roberval sui suoi pensieri non è da Descartes riconosciuta, però le sue considerazioni segnano da per tutto progressi importanti; ed egli fa risaltare punti essenziali. Riguardo alle singole particolarità occorre che io rimandi il lettore al magnifico libro del Duhem. Io vorrei qui solo esprimere la mia opinione un poco diversa sui rapporti tra la scienza naturale antica e la moderna. Questa scienza si accresce in due modi; in primo luogo quando noi riteniamo in mente i fatti ed i fenomeni osservati, e cerchiamo di imitarli nelle dimostrazioni e di ricostruirli col pensiero nel susseguirsi delle osservazioni. Questi tentativi di costruzione che avvengono o l'uno dopo l'altro, o contemporaneamente, rivelano sempre certe mancanze, per le quali la corrispondenza di esse, sia con i fatti, sia fra loro, viene turbata. Sorge allora il bisogno della correzione sui fatti, e nella logica connessione della costruzione. Questo è il secondo processo edificativo della scienza. Se uno si riferisse soltanto a se stesso e dovesse di nuovo incominciare solo con le sue osservazioni o coi suoi pensieri, egli non potrebbe giungere molto innanzi; questo vale tanto per ogni singolo uomo, quanto per ogni singolo popolo.

Noi non potremo mai stimare abbastanza l'eredità che i nostri predecessori della coltura, i naturalisti, gli astronomi ed i matematici greci ci hanno lasciato. In possesso di un'immagine del mondo, sia pure incompleta ed armati degli insegnamenti logico-critici dei matematici greci, noi siamo proceduti nella indagine in condizioni favorevoli. Questo possesso ci facilita la continuazione del lavoro, e non solo l'eredità scientifica, ma anche la coltura materiale.

Nel nostro caso speciale debbono essere considerate anche le macchine e i dispositivi, e così la tradizione del loro uso. Con questa eredità materiale noi possiamo con facilità appagare,

ripetere ed estendere le osservazioni, che hanno condotto gli antichi scienziati alle loro scoperte, e così imparare a comprendere bene queste ultime. Mi sembra proprio che questa eredità materiale, che eccita sempre nuovamente l'attività individuale, sia stimata troppo poco rispetto alla letteraria. Si può forse ammettere che le osservazioni, siano pure manchevoli, di Aristotile e per fino quelle più esatte dei matematici alessandrini, non avrebbero sempre nuovamente eccitato .gli uomini, che osservano e si occupano delle macchine, anche se non ci fossero state conservate mediante scritti! Non è forse la stessa cosa per il riconoscimento della impossibilità del moto perpetuo, che si deve pure presentare a chiunque, il quale non fantasticamente, secondo l'uso degli Alchimisti, cerchi miracoli nella meccanica, ma al contrario come indagatore si occupi delle macchine? Anche se queste invenzioni vengono trasmesse al successore, questi le deve sempre prima acquistare da sè. Il suo unico vantaggio consiste in quella specie di rincorsa, che egli ottiene nel percorrere più rapidamente la stessa via, e mediante questa rincorsa egli supera il predecessore. Una conoscenza incompleta, formulata in parole, offre un punto di appoggio relativamente solido al pensiero vago, il quale può partire da esso per investigare i fatti, e ritornare ognora ad esso, confrontando ed esaminando.

Che nuove esperienze rinforzino tale punto d'appoggio, che lo spostino lentamente o magari ne dimostrino la fallacia, esso ci ha pur sempre recato vantaggio ed aiuto. Se invece il predecessore è riguardato come una grande autorità, egli agisce suggestivamente ed i suoi errori sono apprezzati come vedute profonde; tutto ciò non può agire che come un impedimento sui successori. Sembrerebbe secondo alcune ricerche di Wohlwill e di Duhem, che lo stesso Galilei fino alla più tarda età sia stato talvolta dal peso dell'eredità peripatetica impedito di percepire senza turbamento la sua propria luce di gran lunga più viva. Nel valutare l'importanza di uno scienziato bisogna pur badare non solo a qual nuovo uso egli abbia fatto degli antichi modi

di vedere, ma fra quale opposizione dei contemporanei e dei successori i suoi modi di vedere si sian fatti valere. Da questo punto di vista mi sembra che Duhem sia andato troppo in là nella sua venerazione per Aristotile. In Aristotile (De coelo, L. III, C. 21) per esempio si trovano, fra considerazioni poco chiare e poco incoraggianti, questi passi: “ Qualunque sia la forza motrice, il più piccolo ed il più leggero riceveranno dalla stessa forza più moto. La velocità del corpo meno pesante sta a quella del più pesante, come il corpo del più pesante sta al più leggero „. Se si fa astrazione dal fatto che non si può attribuire ad Aristotile una retta distinzione tra spazio, velocità ed accelerazione, si può riconoscere qui l'espressione di un fatto sperimentale primitivo giusto; il quale in definitiva ha condotto al concetto di massa. Però già da tutto il contenuto del Cap. II non si può neppure pensare a riferire questi punti al sollevamento di pesi mediante macchine, di combinarli, con l'espressione di Aristotile, sopra la leva e di vedere il germe del concetto di lavoro. (Duhem, l. c. pp. 6-7. Cfr. Vailati, *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, 1906 febbraio-marzo, p. 3) Duhem biasima poi Stevino per la sua antipatia per i peripatetici. Mi sembra però che Stevino abbia ragione, quando egli si dichiara contrario ai cerchi “ mirabili „ di Aristotile, i quali nel caso dell'equilibrio non sono neppur descritti dal mobile. Questo è altrettanto giusto, quanto la protesta di Gilberto e di Galilei contro la supposizione dell'azione di un semplice luogo o punto. Solo dopo una più matura concezione, quando si riconosce il lavoro come la circostanza determinante della velocità, la deduzione dinamica dell'equilibrio acquista il vantaggio di una più grande generalità e razionalità. Prima di ciò non si può obbiettar nulla contro le deduzioni generali di Stevino basate sui fondamenti istintivi dell'esperienza e secondo l'esempio di Archimede.

APPENDICE III.

(Al Cap. II, § I, n. 1).

Per rendersi conto della lentezza con cui i nuovi concetti sopra l'aria furono compresi dagli uomini, basta leggere l'articolo sull'aria, che Voltaire, uno degli uomini più illuminati del suo tempo (1764) faceva stampare nella Enciclopedia del suo *Dictionnaire philosophique* un secolo dopo Guericke, Boyle e Pascal e non molto prima delle scoperte di Cavendish, Priestley, Volta e Lavoisier: " L'aria non sarebbe visibile, nemmeno percettibile, tutte le funzioni che si attribuiscono all'aria le potrebbero compiere le nebbie, che noi percepiamo e della cui esistenza nessuno può dubitare. Come potrebbe l'aria renderci possibile l'audizione contemporanea dei diversi suoni di una esecuzione musicale? Aria ed etere vengono posti per quel che riguarda la sicurezza della loro esistenza allo stesso gradino „.

APPENDICE IV.

(Al Cap. II, § I, n. 8).

Luoghi degli scritti di Galileo.

Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. — Dialogo secondo.

" Sagr. Ma quando l'artiglieria si pianta, se non a perpendicolo, ma inclinata verso qualche parte, qual dovrebbe essere il moto della palla? andrebbe ella forse, come nell'altro tiro, per la linea perpendicolare, e ritornando anco poi per l'istessa?

" Sempl. Questo non farebbe ella, ma uscita dal pezzo seguiterebbe il suo moto per la linea retta, che continua la dirittura della canna, se non in quanto il proprio peso la farebbe declinar da tal dirittura verso terra „.

“ SAGR. Talchè la dirittura della canna è la regolatrice del moto della palla: nè fuori di tal linea si muove, o muoverebbe se il peso proprio non la facesse declinare in giù... „.

Discorsi e dimostrazioni matematiche — Dialogo terzo.

“ Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus quicumque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indelibiter impressus, quod in solo horizontali plano contingit: nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debiliatur, est multo minus tollitur „.

Anche se Galilei giunse gradatamente alla conoscenza della legge d'inerzia, anche se questa gli si presentò come una scoperta puramente casuale, in tutti i brani, riportati dall'edizione padovana del 1764, la limitazione di questa legge al moto orizzontale compare come dovuta alla materia trattata; la supposizione, che Galilei verso la fine della sua carriera scientifica non avesse la piena conoscenza di questa legge, sembra quindi difficile a sostenersi.

APPENDICE V.

(Al Cap. II, § I, n 21).

Galilei nei suoi giovani anni ha sostenuto l'opinione che un corpo che ne muova un altro direttamente imprime ad esso una forza, che diminuisce a mano a mano; mentre in Aristotile è l'aria che, posta contemporaneamente in moto dal corpo agente conserva questo moto per un tempo più lungo, e lo comunica sempre di nuovo al corpo mosso. Secondo le ricerche di Wohlwill, G. Filopono scrittore del VI secolo, combatte pel primo espressamente quest'ultimo modo di vedere, che è in opposizione ad ogni sano istinto. Perchè dovrebbe la mano moventesi toccare la pietra, se è l'aria che s'incarica di tutto? Questa domanda naturale di

G. Filopono non mancò di esercitare la sua azione su Leonardo, Cardano, Benedetti, Giordano Bruno e Galilei. Filopono si oppone anche decisamente all'ipotesi, che i corpi più pesanti cadano più rapidamente, richiamando l'attenzione contemporaneamente alla testimonianza dei sensi. Finalmente Filopono presenta un altro tratto tutto moderno, negando ogni forza al luogo come tale e attribuendo invece ai corpi la tendenza di conservare il loro ordine. (Mech. p. 198. E Wohlwill, *Ein Vorgänger Galileis im VI Jahrhundert. Physikalische Zeitschrift von Riecke und Simon*, I. Jahrg. n. 1, pp. 23-32).

Inoltre richiamiamo l'attenzione sulle ricerche di Duhem senza entrare nelle particolarità interessanti storicamente, che Duhem riporta. (*De l'accélération produite par une force constante. Notes pour servir à l'histoire de la dynamique*. Congrès international de philosophie. Genève 1905, p. 859). Aggiungiamo qui solo le seguenti considerazioni. Secondo la dottrina aristotelica, intesa alla lettera, una forza costante dovrebbe produrre una velocità costante. Poichè però la velocità di caduta sempre crescente difficilmente può sfuggire anche ad una rozza osservazione, sorge la difficoltà di mettere questa accelerazione d'accordo con la dottrina esistente. Avvicinandosi al suolo, secondo le idee di Aristotile, il corpo diviene più pesante. Anche il viaggiatore si affretta accostandosi al suo punto di arrivo, come si esprime Tartaglia. L'aria che indubbiamente è concepita talvolta come impedimento e poi di nuovo come motore, deve servire ora a quello, ora a questo ufficio per rendere compatibile le contraddizioni. Lo strato di aria impedente fra il corpo e il suolo è (secondo il commentatore Semplicio) più grande al principio della caduta che non alla fine. Il “ precursore „ di Leonardo (v. Appendice II) trova di nuovo che l'aria una volta posta in moto è per il corpo in moto un ostacolo più piccolo. L'osservatore ingenuo di una pietra lanciata obliquamente od orizzontalmente. la quale descrive quasi una traiettoria iniziale rettilinea, doveva ricevere l'impressione naturale, che la gravità fosse neutralizzata dall'impulso al moto. (Mech. p. 155). Di qui

la distinzione fra moto naturale e moto violento. Le considerazioni sul lancio, di Leonardo, Tartaglia, Cardano, Galilei e Torricelli mostrano come a poco a poco la rappresentazione di una successione dei due moti, ritenuti come essenzialmente diversi, si venga trasformando in quella di un miscuglio e di una contemporaneità di ambedue. Leonardo conosce la caduta accelerata dei gravi, intravede il crescere della velocità proporzionalmente al tempo, che egli attribuisce alla resistenza dell'aria successivamente diminuente, ma non sa dedurre la giusta dipendenza dello spazio dal tempo. Appena verso la metà del secolo XVI compare l'idea, che la gravità eserciti continuamente impulsi sul corpo cadente, impulsi che si aggiungono alla forza impressa prima costante e che va man mano diminuendo. Questo modo di vedere viene sostenuto da A. Piccolomini, da I. C. Scaliger e da I. B. Benedetti.

Già Leonardo nota di passaggio che la freccia non è spinta dalla corda, che la tocca solo alla massima tensione dell'arco, ma anche nelle altre posizioni. (Duhem, *l. c.*, p. 882). Solo però quando Galilei rinunciò alla diminuzione graduale spontanea della *vis* impressa e ricondusse questa diminuzione a resistenze ed a forze opposte, e studiò la caduta dei gravi sperimentalmente, e senza considerarne le cause, poterono saltar fuori quantitativamente nette le leggi del moto uniformemente accelerato.

Dalla esposizione storica di Duhem inoltre emerge che Descartes indipendentemente da Galilei ha per lo sviluppo dei concetti fondamentali della moderna dinamica dei meriti molto maggiori di quello che viene ordinariamente ammesso e che ho ammesso io stesso (Mach, p. 274). Io gli sono veramente riconoscente per questo insegnamento.

Descartes si occupò dell'accelerazione della caduta durante la sua dimora in Olanda (1617-1619) in compagnia di Beckmann, riferendosi alle ricerche di Cardano, e probabilmente a quelle di Scaliger e di Benedetti. Egli riconobbe prima della pubblicazione di Galilei, come risulta dalle lettere scritte nel 1629 a Mersenne, completamente la legge di inerzia, la legge del moto

uniformemente accelerato sotto l'influenza di una forza costante. Sbagliò solo riguardo alla legge di dipendenza dello spazio dal tempo. Le idee di Galileo e di Descartes si completano a vicenda. Galilei studia la caduta dei gravi fenomenologicamente, senza ricercare la causa di essa; mentre Descartes deduce il moto dalla forza costante. In ambedue le ricerche si riconosce l'azione di un elemento costruttivo, speculativo; solo che questo in Galilei si riferisce strettamente al caso concreto, mentre in Descartes si giova di risultati molto più generali. Descartes ha osservato (*Principii di filosofia*), la trasmissione del moto, la perdita di moto del corpo urtante e l'acquisto di moto da parte del corpo urtato, e trasse da ciò i concetti filosofici generali seguenti: 1. Senza cedere moto ad altri corpi non si ha perdita di moto (inerzia). 2. Ogni movimento è originario, oppure trasmesso da qualche cosa. 3. La quantità di moto originario è indistruttibile. Ogni moto generante in apparenza spontaneo, cioè, la cui origine non è percettibile, egli potè rappresentarselo, partendo da questo punto di vista come indotto da urti impressi invisibilmente (vgl. Mech, p. 319).

Il grande vantaggio che io forse, in opposizione a Duhem, attribuisco al metodo di Galilei, consiste nella esposizione accurata e completa del semplice fatto, con che nulla rimane da nascondere sotto il nome di *forza*, sia ancora da indovinare mediante la pura speculazione. Su questo punto le opinioni saranno ancora al giorno d'oggi divise.

APPENDICE VI.

(Al Cap. II, § VI, n. 12).

Gli astronomi hanno trovato necessario di studiare la questione della connessione del " sistema inerziale „ col sistema di coordinate, usate in astronomia (Vlg. a questo proposito: A. Auding, *Ueber Coordinaten und zeit, Enciclopädie der mathematischen Wissenschaften*, VI, 2, Fasc. 1-H. Scaliger, *Ueber die sogenaunte*

absolute Bewegung, *Sitzungsbericht der Münchener Akademie*, *mathem-naturwissensch. Classe*. Vol. 36. Fasc. 1, 1906). Questa ultima Memoria termina con le parole: dopo tutto ciò noi potremo con una certa sicurezza esprimere le legge che un sistema empirico di coordinate usato in astronomia non può girare attorno ad un " sistema inerziale „ per più di alcuni e probabilmente pochi secondi di arco in un secolo.

Quando anche il " sistema inerziale „ fosse fissato a sufficienza per l'uso pratico, il fisico desidererà ancora sempre di sapere in qual modo la sua determinazione dipende dalle singole masse dell'universo. Da questa tendenza derivano i lavori di A. Föppl (*Ueber einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. Sitzungsbericht der Münchener Akademie*, vol. 34, 1 fasc., 1904 — *Ueber absolute und relative Bewegung*. Ebenda, 3. H.). Nel secondo lavoro Föppl parte dalle seguenti idee: Se tutti i corpi celesti assumessero delle posizioni rispettive fisse, noi dovremmo aspettarci, secondo ciò che finora si sa, che un corpo lasciato a se stesso, riferito ad un sistema, legato fissamente a quei corpi, descriva una traiettoria rettilinea. Separiamo ora da tutto l'universo un corpo grande, per es. la Terra, allora un corpo lasciato a se stesso, si comporterebbe in vicinanza della Terra ancora approssimativamente come pel caso precedente. Si può però sperare che con una sufficiente finezza di ricerca il suo movimento venga influenzato in modo determinabile dal moto relativo, rispetto alla massa potente e prossima della Terra. Se si arriva a stabilire la specie di queste " forze di velocità „, ci si presenta la probabilità di capire secondo il principio della sovrapposizione la costruzione di tutto il " sistema inerziale „. Föppl ritiene possibile che le eventuali " forze di velocità „ in certe circostanze esercitano delle azioni non ancora rimarcate. Tenendo conto di questo punto di vista l'esperienze riportate nella prima Memoria di Föppl si comprendono facilmente. Esse mirano a stabilire, se il comportamento del pendolo di Foucault, rispetto alla volta celeste, o piuttosto quello, molto più sensibile di un giroscopio,

messo in moto elettro-magneticamente, sia influenzato in guisa dimostrabile dalla massa terrestre rotante? Da esperienze, condotte però non con tutta la precisione che si può raggiungere, Föppl deduce che una tale influenza non può superare il 2 %. Se anche l'autore suddetto considera il risultato delle sue esperienze fin qui effettuate come negativo, egli ritiene però la loro continuazione come non del tutto inutile. Egli viene rinforzato in questa idea dalla comparsa di fenomeni finora incomprensibili, come le variazioni della gravità con il tempo, sospettate da K. R. Koch (*Drude's Annalen*, vol. 15, 1904, p. 146), e la rimarchevole deviazione a sud dei corpi cadenti, dimostrata da E. H. Hall (*Physical Review*, XVII, 1903, pp. 179, 245).

Io posso solo aggiungere che le quattro Note ricordate sono per me del più alto interesse. Io auguro ai loro autori il più grande successo, poichè a qualunque risultato essi giungano, questo deve chiarire le questioni qui toccate. Siccome non si sa ancora assolutamente nulla delle " forze di completamento della velocità " presunte da Föppl, sarebbe forse da pensare, se esperienze con moti progressivi (di caduta) non potrebbero dare risultati più favorevoli, che non quelli ottenuti con masse rotanti, nelle quali potrebbe aver luogo la soppressione di un'azione parziale per opera delle altre.

APPENDICE VII.

(Al Cap. II, § VIII, n. 7).

Venne esposto che la forma attuale della nostra meccanica è fondata su un accidente storico. Questo viene illustrato in modo istruttivo dalle considerazioni del colonnello E. Hartmann: *Définition physique de la force.* Congrès international de philosophie, Genève, 1905, p. 728. L'autore mostra l'applicabilità di concetti divergenti dalle concezioni usuali.

Indicazioni cronologiche sopra alcuni dei principali fondatori della meccanica e dei loro scritti

ARCHIMEDE (287-212 a. C.). Una completa edizione delle sue opere fu pubblicata, coi commenti di Eutocio, ad Oxford nel 1792; una traduzione francese da F. Peyrard (Parigi, 1808); una traduzione tedesca da Ernesto Nizze (Stralsund, 1824).

LEONARDO DA VINCI (1452-1519). I manoscritti scientifici di Leonardo sono sostanzialmente contenuti nell'opera di Grothe: *Leonardo da Vince als Ingenieur und Philosoph* (Berlino, 1874).

GUIDO UBALDO e Marchionibus Montis (1545-1607) *Mechanicorum liber* (Pesaro, 1577).

S. STEVINO (1548-1620) *Beghinselen der Weegkonst* (Leida, 1585); *Hyponnemata mathematica* (Leida, 1608).

GALILEI (1564-1642) *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (Leida, 1638). La prima edizione completa degli scritti di Galileo fu pubblicata a Firenze (1842-1856) in 15 volumi in-8°.

KEPLER (1571-1630). *Astronomia nova* (Praga, 1609); *Harmonices mundi* (Linz, 1619); *Stereometria doliorum* (Linz, 1615); edizione delle sue opere complete di Fritsch (Frankfurt, 1858).

MARCUS MARCI (1595-1667). *De proportione motus* (Praga, 1639).

DESCARTES (1596-1675). *Principia philosophiae* (Amsterdam, 1644).

ROBERVAL (1602-1675). *Sur la composition des mouvements* (Anc. Mém. de l'Acad. de Paris, t. VI).

GUERICKE (1602-1686). *Experimenta Magdeburgica* (Amsterdam, 1672).

FERMAT (1608-1665). Varia opera (Tolosa, 1679).

TORRICELLI (1608-1647). *Opera geometrica* (Firenze, 1644).

WALLIS (1616-1703). *Mechanica sive de motu* (Londra, 1670).

MARIOTTE (1620-1684). Oeuvres (Leida, 1717).

PASCAL (1623-1662). *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs* (Parigi, 1668); *Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air* (Parigi, 1662).

BOYLE (1627-1691). *Experimenta physico mechanica* (Londra, 1660).

HUYGENS (1629-1695) *The laws of motion on the collision of bodies.* Philos. Trans., 1669; *Horologium oscillatorium* (Parigi, 1673); *Opuscula posthuma* (Leida, 1703).

WREN (1632-1723). *The law in the collision of bodies.* Philos. Trans., 1669.

LAMI (1640-1715). *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments de méchaniques* (Parigi, 1687).

NEWTON (1642-1726). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londra, 1686).

LEIBNIZ (1646-1716). *Acta Eruditorum* 1686, 1695; *Leibnizii et Joh. Bernoulli comercium epistolicum* (Lausanne et Ginev. 1745).

GIACOMO BERNOULLI (1654-1705). *Opera omnia* (Ginevra, 1762).

VARIGNON (1654-1722). *Projet d'une nouvelle méchanique* (Parigi, 1687).

GIOVANNI BERNOULLI (1667-1748). *Acta erudit.* 1693; *Opera omnia* (Losanna, 1742).

MAUPERTIUS (1698-1759). *Mém. de l'Acad. de Paris*, 1740; *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1745-1747; *Oeuvres* (Parigi, 1752).

MACLAURIN (1698-1746). *A complete system of fluxions* (Edinburgo, 1742).

DANIELE BERNOULLI (1700-1782), *Comment. Acad Petrop.*, T. I. *Hydrodynamica* (Strassburg, 1738).

EULERO (1707-1783). *Mechanica sive motus scientia* (Pietroburgo, 1736); *Methodus inveniendi lineas curvas* (Losanna, 1741); *Viele Abhandlungen in den schriften der berliner und petersburger Akademie.*

CLAIRAUT (1713-1765). *Théorie de la figure de la terre* (Parigi, 1743).

D'ALEMBERT (1717-1783). *Traité de dynamique* (Parigi, 1743).

LAGRANGE (1736-1813). *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima.* Misc. Taurin, 1762; *Mécanique analytique* (Parigi, 1788).

LAPLACE (1749-1827). *Mécanique céleste* (Parigi, 1799).

Fourier (1768-1830). *Théorie analit. de la chaleur* (Parigi, 1822).

GAUSS (1777-1855). *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii.* Comment. societ. Gottinga, 1829; *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* (Crelle's Journal, IV, 1829); *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (1832). *Gesammtausgabe* (Gottinga, 1867).

POISOT (1777-1859). *Eléments de statique* (Parigi, 1804).

PONCELET (1788-1867). *Cours de mécanique* (Metz, 1826).

BELANGER (1790-1874). *Cours de mécanique* (Parigi, 1847).

MÖBIUS (1790-1867). *Statik* (Lipsia, 1837).

CORIOLIS (1792-1843). *Traité de mécanique* (Parigi, 1829).

C. G. J. Jacobi (1804-1851). *Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch* (Berlino, 1866).

R. Hamilton (1805-1865). *Lectures on Quaternions* 1853. *Abhandlungen.*

Grassmann (1809-1877). *Ausdehnungslehre* (Lipsia, 1844).

H. Herz (1857-1894). *Principien der Mechanik* (Lipsia, 1894).

L. Boltzmann. *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik* (Lipsia, 1897-1904).

A. Föppel. *Vorlesungen über technische Mechanik*, 4 vol. (Lipsia, 1898-1900).

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Hrsgeg. in Auftr. der Akademien di Gottinga, Lipsia, München e Vienna (Lipsia, serie 1898). Il IV vol. contiene la Meccanica: per le questioni qui trattate, sono specialmente importanti:

A. Voss. *Die Prinzipien der rationellen Mechanik*, IV, 1, p. 3-121 (1901).